УДК 517.956.32+517.929

О существовании решения задачи Коши для одного гиперболического дифференциально-разностного уравнения[1]

Н. В. Зайцева (Москва, Россия)
zaitseva@cs.msu.ru

Исследована начальная задача в полосе для двумерного гиперболического дифференциально-разностного уравнения, содержащего сумму дифференциального оператора и оператора сдвига по пространственной переменной. Для построения решения использовалась классическая операционная схема. Показано, что полученное решение является классическим, если вещественная часть символа дифференциально-разностного оператора положительна.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, дифференциально-разностное уравнение, задача Коши, классическое решение.

On the existence of a solution to the Cauchy problem for a hyperbolic differential-difference equation[1]

N. V. Zaitseva (Moscow, Russia)
zaitseva@cs.msu.ru

An initial value problem in a strip is investigated for a two-dimensional hyperbolic differential-difference equation containing the sum of a differential operator and a shift operator with respect to a spatial variable. A classic operating scheme was used to build the solution. It is shown that the obtained solution is classical if the real part of the symbol of the differential-difference operator is positive.

Keywords: hyperbolic equation, differential-difference equation, Cauchy problem, classical solution.

Исследована следующая задача: найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям

$$u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D); \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + b\, u(x-h,t) = 0, \quad (x,t) \in D; \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

где $a > 0$, $b > 0$, $h \neq 0$ — заданные вещественные числа, $u_0(x) \in L_1(\mathbb{R})$ и $u_0(x) \in C(\mathbb{R})$, $D = \{(x,t) |\, x \in \mathbb{R},\, 0 < t < T\}$ — область координатной плоскости Oxt, $\overline{D} = \{(x,t) |\, x \in \mathbb{R},\, 0 \leq t < T\}$.

Определение. *Классическим решением задачи* (1)–(3) *будем называть функцию* $u(x,t)$, *непрерывную и непрерывно дифференцируемую по* *переменным* x *и* t *в множестве* $\overline{D}$*; у которой существуют непрерывные производные* u_{xx} *и* u_{tt} *в области* D*; удовлетворяющую в каждой точке области* D *соотношению* (2)*; и такую, что для каждой точки* $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ *пределы функций* $u(x_0, t) - u_0(x_0)$ *и* $u_t(x_0, t)$ *при* $t \to 0+$ *существуют и равны нулю.*

Для построения решения задачи были использованы классическая операционная схема и идеи работ [1, 2]. В работе [3] показано, что необходимым условием существования решения является требование положительности вещественной части символа дифференциально-разностного оператора уравнения, которое гарантируется выполнением условий

$$0 < b \leq 2a^2/h^2$$

на коэффициенты a, b и сдвиг h.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Муравник А. Б.* Эллиптические задачи с нелокальным потенциалом, возникающие в моделях нелинейной оптики // Матем. заметки. 2019. Т. 105, № 5. С. 747–762.

[2] *Муравник А. Б.* Эллиптические дифференциально-разностные уравнения в полупространстве // Матем. заметки. 2020. Т. 108, № 5. С. 764–770.

[3] *Зайцева Н. В.* Классические решения гиперболического уравнения с нелокальным потенциалом // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 498, № 3. С. 37–40.