УДК 519.85

О минимизации сильно квазивыпуклой функции на слабо выпуклом множестве[1]

С. И. Дудов, М. А. Осипцев
(Саратов, Россия)
DudovSI@info.sgu.ru, Osipcevm@gmail.com

Рассматривается конечномерная задача минимизации сильно квазивыпуклой функции на слабо выпуклом допустимом множестве аргументов. Приводятся необходимые и достаточные условия её решения. Получены достаточные условия решения для случая, когда допустимое множество задано как лебегово множество слабо выпуклой функции. Кроме того, для случая дифференцируемой целевой функции получены достаточные условия локального минимума, включающее «сильное» условия стационарности, с указанием радиуса соответствующий окрестности.

Ключевые слова: сильно квазивыпуклая функция, сильно и слабо выпуклые множества и функции, субдифференциал, нормальный конус, достаточные условия минимума, радиус окрестности локального минимума.

On minimization of a strongly quasi-convex function on a weakly convex set[1]

S. I. Dudov, M. A. Osiptsev (Saratov, Russia)
DudovSI@info.sgu.ru, Osipcevm@gmail.com

The finite-dimensional problem of minimization of a strongly quasi-convex function on a weakly convex valid set of arguments is considered. Necessary and sufficient conditions for its solution are given. Sufficient solution conditions are obtained for the case when the admissible set is defined as a Lebesgue set of a weakly convex function. In addition, for the case of a differentiable target function, the sufficient conditions for the local minimum, including the «strong» stationarity condition are obtained with the indication of the radius of the corresponding neighborhood.

Keywords: strongly quasi-convex function, strongly and weakly convex sets and functions, subdifferential, normal cone, sufficient minimum conditions, radius of neighborhood of local minimum.

Вспомогательные факты

Одна из тенденций развития теории экстремальных задач последнего периода времени – исследование свойств решения задач сильно-слабо выпуклого программирования, то есть задач минимизации сильно или слабо выпуклых функций на сильно или слабо выпуклых допустимых множествах аргументов, и разработка численных методов их решения (см., напр., [1] – [5]). Интерес к таким задачам появился в следствии изучения свойств сильно и слабо выпуклых множеств и функций в рамках параметрически выпуклого анализа, являющегося одним из разделов негладкого анализа (см., напр., [1], [6], [7]).

Здесь мы рассматриваем задачу

$$f(x) \to \min_{x \in D}, \tag{1}$$

где D – слабо выпуклое замкнутое множество из конечномерного действительного пространства $\mathbb{R}^p$, а целевая функция $f(\cdot)$ является сильно квазивыпуклой на некотором открытом выпуклом множестве, содержащим D.

Наша цель – получить необходимые и достаточные условия решения задачи (1), отражающие роль констант сильной квазивыпуклости целевой функции $f(\cdot)$ и слабой выпуклости допустимого множества D.

Напомним определение используемых здесь базовых понятий.

Определение 1. *Пусть $r > 0$ и точки x_1 и x_2 из $\mathbb{R}^p$ таковы, что что $\|x_1 - x_2\| \leqslant 2r$. Обозначим через $D_r(x_1, x_2)$ пересечение всех евклидовых шаров из $\mathbb{R}^p$ радиуса r, содержащих точки x_1 и x_2. Множество $A \subset \mathbb{R}^p$ называется слабо выпуклым с константой r (r-слабо выпуклым), если для любой пары точек из A, таких что $\|x_1 - x_2\| < 2r$ и $x_1 \neq x_2$, пересечение $D_r(x_1, x_2) \cap A$ содержит хотя бы одну точку, отличную от x_1 и x_2.*

Определение 2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ – некоторое выпуклое множество и $\rho > 0$. Функция $f(\cdot) : \Omega \to \mathbb{R}$ называется*
а) сильно квазивыпуклой с константой ρ (ρ-СКВ) на множестве Ω, если для всех $x_0, x_1 \in \Omega$ и $\alpha \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$f((1-\alpha)x_0 + \alpha x_1) \leqslant \max\{f(x_0), f(x_1)\} - \frac{\rho}{2}\alpha(1-\alpha)\|x_0 - x_1\|^2.$$

б) Слабо выпуклой с константой ρ (ρ-слабо выпуклой) на множестве Ω, если для всех $x_0, x_1 \in \Omega$ и $\alpha \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$f((1-\alpha)x_0 + \alpha x_1) \leqslant (1-\alpha)f(x_0) + \alpha f(x_1) + \frac{\rho}{2}\alpha(1-\alpha)\|x_0 - x_1\|^2.$$

Далее используем обозначения:
$N(x, D)$ – нормальный конус множества D в точке x (см. [8]),
$B(x, r)$ – замкнутый евклидов шар радиуса r с центром в точке x,
$\partial f(x)$ – субдифференциал Кларка функции $f(\cdot)$ в точке x,
$Arg \min_{x \in D} f(x) = \{y \in D : f(y) = \min_{x \in D} f(x)\}$,
$A(x) = \{-\partial f(x)\} \cap N(x, D)$, $m(x) = \min_{v \in A(x)} \|v\|$,
$f'(x)$ – градиент функции $f(\cdot)$ в точке x.

Основные результаты

Приведём основные результаты исследования.

Теорема 1. *Пусть* Ω – *открытое выпуклое множество,* $r > 0$, $\rho > 0$ *и*
1) D – r*-слабо выпуклое замкнутое множество,* $D \subset \Omega$,
2) функция $f(\cdot)$ – ρ*-СКВ, локально липшицева на* Ω *и регулярна по Кларку (см. [8]) в точке* $x_0 \in D$.
Для того, что бы в точке $x_0 \in D$ *функция* $f(\cdot)$ *принимала наименьшее на* D *значение необходимо, а если* $\frac{m(x_0)}{\rho} \leqslant r$, *то и достаточно, чтобы*

$$0_p \in \partial f(x_0) + N(x_0, D). \tag{2}$$

Причём, если выполняется (2) *и* $\frac{m(x_0)}{\rho} < r$, *то* $Arg\min\limits_{x \in D} f(x) = \{x_0\}$.

Теорема 2. *Пусть* Ω – *открытое выпуклое множество,* $\rho_h > 0$, $\rho_f > 0$, $D = \{x \in \Omega : h(x) \leqslant 0\}$ *и*
1) $h(\cdot)$ – ρ_h*-слабо выпуклая конечная на* Ω *функция,*
2) $f(\cdot)$ – ρ_f*-СКВ, локально липшицевая на* Ω *и регулярная по Кларку (см. [8]) в точке* $x_0 \in \Omega$ *функция,*
3) $h(x_0) = 0$, $0_p \notin \partial f(x_0)$, $0_p \notin \partial h(x_0)$ *и существуют* $v_f \in \partial f(x_0)$, $v_h \in \partial h(x_0)$ *и* $\lambda > 0$ *такие, что* $v_f + \lambda v_h = 0_p$,
4) выполняется неравенство $\frac{\|v_f\|}{\rho_f} \leqslant \frac{\|v_h\|}{\rho_h}$ *или, если* $m_h \equiv \inf\{\|v\| : v \in \partial h(x), x \in bdD\} > 0$, *неравенство* $\frac{m(x_0)}{\rho_f} \leqslant \frac{m_h}{\rho_h}$.
Тогда $x_0 \in Arg\min\limits_{x \in D} f(x)$. *Кроме того, если хотя бы одно из неравенств в п.4) выполняется строго, то* $Arg\min\limits_{x \in D} f(x) = \{x_0\}$.

Теорема 3. *Пусть* Ω – *открытое выпуклое множество,* $r > 0$, $\rho > 0$ *и*
1) D – r*-слабо выпуклое замкнутое множество,* $D \subset \Omega$
2) функция $f(\cdot)$ – ρ*-СКВ, локально липшицева на* Ω, *регулярна и дифференцируема в точке* $x_0 \in D$,
3) при некотором $\delta > 0$ *выполняется включение*

$$B(0_p, \delta) \subset f'(x_0) + N(x_0, D),$$

4) $\rho = 0$ *или* $\rho > 0$ *и* $r < \frac{\|f'(x_0)\|}{\rho}$.
Тогда $Arg \min\limits_{x \in D \cap \{y : \|y - x_0\| < \lambda(\delta)\}} f(x) = \{x_0\}$, *где*

$$\lambda(\delta) = \begin{cases} 2r, \text{ если } \rho > 0, \ \dfrac{\sqrt{\|f'(x_0)\|^2 - \delta^2}}{\rho} \leqslant r < \dfrac{\|f'(x_0)\|}{\rho}, \\ \dfrac{2r\delta}{\sqrt{\delta^2 + \left(\sqrt{\|f'(x_0)\|^2 - \delta^2} - \rho r\right)^2}}, \text{ если } \rho > 0, \ r < \dfrac{\sqrt{\|f'(x_0)\|^2 - \delta^2}}{\rho}, \\ \dfrac{2r\delta}{\|f'(x_0)\|}, \text{ если } \rho = 0. \end{cases}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Vial J. P.* Strong and weak convexity of set and functions // Math. Oper. Res. 1983. Vol. 8, № 2. P. 231–259.

[2] *Wu Z. Y.* Sufficient global optimality conditions for weakly convex minimization problems // J. Glob. Optim. 2007. Vol. 39. P. 427–440.

[3] *Дудов С. И., Осипцев М. А.* Характеризация решения задач сильно-слабо выпуклого программирования // Матем. сб. 2021. Т. 212, № 6. С. 43-–72.

[4] *Balashov M.* About the gradient projection algorithm for a strongly convex function and a proximally smooth set // J. of Convex Analysis. 2017. Vol. 24, № 2. P. 493–500.

[5] *Balashov M., Polyak B., Tremba A.* Gradient projection and conditional gradient methods for constrained nonconvex minimization // Numerical Functional Analysis and Optimization. 2020. Vol. 41, № 7. P. 822–849.

[6] *Половинкин Е. С., Балашов М. В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М. : Физматлит, 2006. 440 с.

[7] *Иванов Г. Е.* Слабо выпуклые множества и функции. М. : Физматлит, 2006. 352 с.

[8] *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М. : Наука, 1988. 280 с.