УДК 517.535

Задача Гельфонда об оценках модулей полюсов наипростейших дробей[1]

Д. Я. Данченко, В. И. Данченко (Владимир, Россия)
vdanch2012@yandex.ru

Получены оценки модулей полюсов наипростейших дробей с малыми нормами на единичной окружности.

Ключевые слова: наипростейшие рациональные дроби, оценки, вычеты.

Gelfond's Problem about estimates for modules of poles of the simple partial fractions[1]

D. Ya. Danchenko, V. I. Danchenko(Vladimir, Russia)
vdanch2012@yandex.ru

We are obtained estimates for modules of poles of the simple partial fractions with a small norms on the unit circle.

Keywords: simple partial fractions, estimates, residues.

Рассмотрим наипростейшие дроби порядка не выше $n \in \mathbb{N}$ вида

$$\rho_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - \xi_k}, \quad |\xi_k| \geq 1, \tag{1}$$

где $\frac{1}{z-\xi_k} \equiv 0$ при $\xi_k = \infty$. Пусть $\delta(\rho_n) := \min\{|\xi_k| - 1 : \ k = 1, \dots, n\}$. При $n \in \mathbb{N}$ и $M > 0$ через $d(n, M) = \inf \delta(\rho_n)$ обозначим расстояние до единичной окружности γ множества полюсов всех дробей вида (1) с условием $|\rho_n(z)| \leq M$, $z \in \gamma$.

Легко видеть, что $d(n, M) > 0$ для любых фиксированных n и M. А.О. Гельфонду [1] принадлежит задача об оценке величин $d(n, M)$ снизу (это один из вариантов классической задачи Е.А. Горина [2] об оценках расстояний до прямых). В [3] эта задача решена частично: показано, что

$$d(n, M) \geq \frac{1}{2}\frac{1}{n+1} \ln \frac{n+1}{1 + 2M\ln(3n)} - \frac{1}{n+1} \asymp \frac{1}{2}\frac{\ln n}{n}, \tag{2}$$

где $n > n_0(M)$, а в качестве $n = n_0(M)$ можно взять любое решение неравенства $n - 2M\ln(2n+1) \geq 2$, например, достаточно взять $n > 4M^2 + 4$.

Оценка (2) является точной по порядку n. Например, для логарифмической производной (1) от многочлена $z^n - n - 1$ имеем $|\rho_n(z)| \leq 1$, $z \in \gamma$, и $\delta(\rho_n) = (1 + o(1)) \ln n/n$, $n \to \infty$.

Однако при $M \to 0$ и фиксированных n оценка (2) не отражает возрастания модулей полюсов. В настояшей заметке в этом направлении оценка (2) дополняется следующим предложением.

Теорема 1. *При выполнении условий $n \geq 2$, $M < 1/10$, для дроби* (1) *имеем:*

$$2 \min\{|\xi_j| : \ j = 1, \ldots, n\} > M^{-\frac{1}{n+1}}. \tag{3}$$

Оценка (3) *точна по порядку величин M и n. Это подтверждается, например, логарифмической производной многочлена $Q(z) = z^n - r^n$, $r^n > 10n$.*

Теорема 1 обобщается. Справедлива

Теорема 2. *Пусть $r_n := \rho_n + f$, где ρ_n — дробь вида* (1), *а f — функция класса Харди H^∞ во внешности замыкания единичного круга, $f(\infty) = 0$. Тогда при $M := \|r_n\|_{\infty,\gamma} < 1/10$ справедлива оценка типа* (3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Гельфонд А. О.* Об оценке мнимых частей корней многочленов с ограниченными производными их логарифмов на действительной оси // Матем. сб. 1966. Т. 71(113), № 3. С. 289–296.

[2] *Горин Е. А.* Частично гипоэллиптические дифференциальные уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами // Сиб. матем. журн. 1962. Т. 3, № 4. С. 500–526.

[3] *Данченко В. И.* Оценки расстояний от полюсов логарифмических производных многочленов до прямых и окружностей // Матем. сб. 1994. Т. 185, № 8. С. 63–80.