УДК 517.51

О существовании и структуре универсальных (относительно тригонометрической системы) функций[1]

М. Г. Григорян (Ереван, Армения)
gmarting@ysu.am

Изучаются вопросы существования и описания структуры функций, ряды Фурье которых универсальны тем или иным смыслом в различных функциональных классах.

Ключевые слова: универсальная функция, ряд Фурье, сходимость,классические системы.

Благодарности: исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 21AG-1A066.

On the existence and structure of universal (with respect to the trigonometric system) functions[1]

M. G. Grigoryan (Yrevan, Armenia)
gmarting@ysu.am

Are studied the questions of existence and description the structure of functions whose Fourier series universal in one sense or another in various functional classes.

Keywords: universal function, Fourier series, convergence, classical systems.

Acknowledgements: this work was supported by the RA MES State Committee of Science, in the frames of the research project № 21AG-1A066.

Введение

В докладе будет представлендаен обзор результатов, связанных с существованием, как ранее известных функций универсальных в том или ином смысле в различных функциональных классах, так и новых (различных типов относительно классических систем) универсальных функций: Будут рассмотрены проблемы, связанные с существованием и свойствами функций с универсальными рядами Фурье в разных смыслах в различных функциональных пространствах, а также будет описана структура таких универсальных функций.

Пусть $M[0,1]$— совокупность всех (не обязательно конечных) измеримых функций (соотв. $L^0[0,1]$) - класс всех (соотв. почти везде конечных) измеримых на $[0,1]$ функций. Под сходимостью в метрике $M[0,1]$

или в метрике $L^0[0,1]$ мы будем подразумывать сходимость почти всюду. Пусть $E \subseteq [0,1]$ некоторое измеримое множество и $|E|$– мера Лебега измеримого множества $E \subseteq [0,1]$, $\operatorname{supp} f = \{ x \in [0,1]; f(x) \neq 0\}$, $L^p(E)$ $(p > 0)$ – класс всех тех измеримых на E функций, для которых $\int_E |f(x)|^p dx < \infty$ и $C(E)-$класс всех непрерывных на $E \subseteq [0,1]$ функций. Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – полная ортонормированная система на $[0,1]$, и пусть $c_k(U) = \int_0^1 U(x)\varphi_k(x)dx$, $k \in \mathbf{N}-$коэффициенты Фурье по системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ функции $U \in L^1[0,1]$,($\mathbf{N}-$ совокупность всех натуральных чисел). Пусть метрическое пространство $S-$ какое-нибудь из пространств $M[0,1]$, $L^p[0,1]$, $p \geq 0$.

Определение 1. *Пусть $\Lambda = \{N_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbf{N}$ (подмножество) подпоследовательность $\{ N_m\}_{m=1}^{\infty}$ натуральных чисел, и пусть*

$$\rho(\Lambda) := \sup \lim_{m\to\infty} \frac{\Lambda_m}{m}, \tag{1.4}$$

(здесь Λ_m- число элементов из Λ, не превышающих m). $\rho(\Lambda)-$называется плотностью подпоследовательности $\{ N_m\}_{m=1}^{\infty}$ (подмножества Λ).

В работах [1] -[13] были получены некоторые результаты связанные с существованием и описанием структуры функций, ряды Фурье которых по заданной классической системе универсальны тем или иным смыслом в различных функциональных классах. Такие функции мы назовем универсальными относительно классических систем.

Определение 2. *Будем говорить, что для класса S относительно системы $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$: функция $U \in L^1[0,1]$*

а) универсальна, если ряд Фурье функции $U(x)$ по этой системе универсален в S,

б) почти универсальна, если можно найти числа (знаки) $\delta_k = \pm 1, k = 0,1,2,..,$ с $\rho(k \in \mathbf{N}, \delta_k = 1) = 1$ такие, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \delta_k c_k(U) W_k(x)$ был бы универсальным в S,

в) в смысле знаков своих коэффициентов Фурье по этой системе, если ряд Фурье функции $U(x)$ по этой системе универсален в S в смысле знаков. .

Замечание 1. *Не существует функции $U \in L^1[0,1]$ универсальная для классов $M[0,1]$ и $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$относительно тригонометрической системы (соотв. относительно системы Уолша)* Отметим, что в работе [2], [5] построена интрегрируемая функция $U(x)$ унивесальная для классов $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$ относительно системы Уолша в смысле знаков.

Отметим также, что нам не известен ответ и на вопрос 2:

Вопрос 1. *Существует ли ограниченная ортонормированная система* $\{\varphi_n(x)\}$ *такая, что можно было бы построить функцию* $U \in L^1[0,1]$ *универсальную для класса* $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$ *или для класса* M[0,1] *относительно этой системы .*

Справедливы следующие теоремы

Теорема 1. *Существует функция* $U \in L^1[0,1]$ *которая является почти универсальной для класса* $M[0,1]$*относительно тригонометрической системы* $\{e^{2\pi kix}\}_{k=-\infty}^{\infty}$.

Теорема 2. *Существуют совокупность замкнутых множеств* $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, *с* $F_1 \subset ... \subset .. F_n \subset F_{n+1} \subset .. \subset [0,1]$ *и* $lim_{n\to\infty}|F_n| = 1$ *и функция* $U \in L^1[0,1]$ *таких, что функция* $U(x)$ *является почти универсальной для классов* $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$ *и* $L^1(F_n)$ $n \in N$ *относительно тригонометрической системы* $\{e^{2\pi kix}\}_{k=-\infty}^{\infty}$.

Теорема 3. *Существует функция* $U \in L^1[0,1]$ *(*$suppU \subset [0,\varepsilon]$, *здесь* $\varepsilon \in (0,1)-$ *наперед заданное число) со сходящимся по* $L^1[0,1]$ *норме и почти всюду на* $[0,1]$ *рядом Фурье -Уолша с монотонно убывающими коэффициентами, и которая является универсальной для класса* $L^0[0,1]$ *относительно системы Уолша* ***в смысле знаков.***

Замечание 2. *Нетрудно видеть, что теорема 2 окончательна в некотором смысле (неулучшаема), она не верна при* $p \geq 1$. .

В этой работе мы опишем структуру тех функций, которые почти универсальны для классов $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$относительно системы Уолша с точки зрения широко известных классических теорем Лузина и Меньшова "Об исправлении функций".

А именно доказывается следующая

Теорема 4. *Для любого* $\varepsilon \in (0,1)$ *существует совокупность замкнутых множеств* $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, *с* $E_1 = F_1 \subset ... \subset .. F_n \subset F_{n+1} \subset .. \subset [0,1]$ *и* $|E_1| \geq 1-\varepsilon$, $lim_{n\to\infty}|F_n| = |E|$,*таких, что для каждой функции* $f \in L^1[0,1]$ *можно найти функцию* $g \in L^1[0,1]$, *совпадающую с* f *на* E_1 *со сходящимся по* $L^1[0,1]$ *норме рядом Фурье -Уолша с монотонно убывающими коэффициентами, и такую, что она была бы универсальной для пространств для классов* $L^p[0,1]$,$p \in (0,1)$ *и* $L^1(F_n), C(F_n)$ $n > 1 \in N$ *относительно системы Уолша.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Grigoryan M. G.* On the universal and strong property related to Fourier-Walsh series // Banach Journal of Math. Analysis. 2017. Vol. 11, № 3. P. 698–712.

[2] *Grigoryan M. G., Sargsyan A. A* On the universal function for the class $L^p[0,1], p \in (0,1)$ // Journal of Func. Anal. 2016. Vol. 270, № 8. P. 3111–3133.

[3] *Grigoryan M. G., Galyan L. N* On the universal functions // Journal of Approximation Theory. 2018. Vol. 225. P. 191–208.

[4] *Григорян М. Г.* О структуре функций, универсальных относительно классических систем // 10-й международный симпозиум ряды фурье и их приложения, Ростов-на-Дону, 2018, 27.05.–0.3.07., С. 46–47.

[5] *Григорян М. Г., Саргсян А. А.* О структуре функций,универсальных для классов $L^p[0,1], p \in (0,1)$ // Матем.сборник. 2018. Т. 209, № 1. С. 37–58.

[6] *Grigoryan M. G., Galyan L. N.* On Fourier series that are universal modulo signs // Studia Mathematica. 2019. Vol. 249(2). P. 215–231.

[7] *Grigoryan M. G., Sargsyan A. A.* On the universal function for the class $L^p[0,1], p \in (0,1)$ // Positivity. 2017. Vol. 21, № 3. P. 1425–1451.

[8] *Grigoryan Martin G.* Functions universal with respect to the classical systems // Advances in Operator Theory. 2020. Vol. 5, № 4. P. 1414–1433.

[9] *Martin Grigoryan, Artsrun Sargsya* Universal functions for classes $L^p[0,1]^2, p \in (0,1)$, with respect to the double Walsh system // Positivity. 2019. Vol. 23, № 5. P. 1261–1280.

[10] *Григорян М. Г.* Функции универсальные относительно системы Уолша // Изв. НАН Арм. сер. матем. 2020. Т. 55, № 6. С. 51–67.

[11] *Григорян М. Г.* Функции с универсальными рядами Фурье-Уолша // Матем. сборник. 2020. Т. 211, № 6. С. 107–131.

[12] *Grigoryan M. G.* Universal Fourier Series // Math. Notes. 2020. Vol. 108, iss. 2. С. 282–285.

[13] *Григорян М. Г., Galoyan L. N.* Функции, универсальные относительно тригонометрической системы // Изв. РАН. Сер. матем. 2021. Т. 85, вып. 2. С. 73–94.

[14] *Григорян М. Г.* О существовании и структуре универсальных функций // Доклады Академии Наук. Математика (Doklady Mathematics). 2021. Т. 496, № 1. С. 30-33.