УДК УДК 517.55+517.96

Дискретный аналог формулы Ньютона-Лейбница и операторы с суммирующим эффектом[1]

А. А. Григорьев (Красноярск, Россия)
grigrow@yandex.ru
Е. К. Лейнартас (Красноярск, Россия)
lein@mail.ru
А. П. Ляпин (Красноярск, Россия)
aplyapin@sfu-kras.ru

Работа посвящена некоторым проблемам теории суммирования функций многих дискретных переменных. В результате исследования введено понятие разностных операторов с суммирующим эффектом — операторов, позволяющих решать задачу суммирования; получен критерий, описывающий класс полиномиальных разностных операторов, обладающих суммирующим эффектом.

Ключевые слова: задача суммирования, формула суммирования Эйлера-Маклорена, числа Бернулли, полиномы Бернулли, многомерные разностные уравнения.

On a discrete analogue of the Newton-Leibniz formulae and operators with a summing effect[1]

A. A. Grigoriev (Krasnoyarsk, Russia)
grigrow@yandex.ru
E. K. Leinartas (Krasnoyarsk, Russia)
lein@mail.ru
A. P. Lyapin (Krasnoyarsk, Russia)
aplyapin@sfu-kras.ru

The paper deals with some aspects of the theory of summation of discrete multivariate functions. As a result of the investigation it was defined difference operators with summing effect — operators, allowing to solve the summation problem; the criterion describing a class of polynomial difference operators with a summing effect was obtained.

Keywords: summation problem, Euler–Maclaurin formula, Bernoulli numbers, Bernoulli polynomials, multidimensional difference equation.

Задача суммирования функций является одной из основных задач теории конечных разностей и решает ее знаменитая формула Эйлера-Маклорена, полученная Эйлером в 1733 году и независимо от него Маклореном в 1738 году (см. [1]).

В работах [2], [4] исследовалась задача рационального суммирования, т. е. отыскания сумм вида

$$S(x) = \sum_{t=0}^{x} \varphi(t), \tag{1}$$

где функция $\varphi(t)$ — рациональная функция. Решение задачи состоит в отыскании решения в символьном виде, т. е. явно в виде математической функции (формулы).

Задача суммирования сводится к решению так называемого (см. [3]) телескопического уравнения — неоднородного разностного уравнения

$$(\delta - 1)f(x) = \varphi(x), \tag{2}$$

где δ — оператор сдвига: $\delta f(x) := f(x+1)$.

По аналогии с задачей интегрирования функций, решение $f(x)$ уравнения (2) называют *дискретной первообразной функции* $\varphi(x)$. Если $f(x)$ — дискретная первообразная функции $\varphi(x)$, тогда искомая сумма равна

$$S(x) = f(x+1) - f(0). \tag{3}$$

Формула (3) называется *дискретным аналогом формулы Ньютона–Лейбница.*

Подход Эйлера к задаче отыскания дискретной первообразной основан на операторном равенстве $\delta = e^D$, которое позволяет записать уравнение (2) в виде

$$Df(x) = \left[\frac{D}{e^D - 1}\right]\varphi(x),$$

где D — оператор дифференцирования.

Выражение в квадратных скобках правой части последнего равенства называется *оператором Тодда* и понимается следующим образом: $\left[\frac{D}{e^D-1}\right] = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{m!} D^m$, где b_m — числа Бернулли (см., например, [5]). Таким образом, получаем формулу Эйлера-Маклорена

$$\sum_{t=0}^{x} \varphi(t) = \int_{0}^{x+1} \varphi(t)dt + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{m!}\Big[\varphi^{(m-1)}(x+1) - \varphi^{(m-1)}(0)\Big].$$

Подход Эйлера к задаче суммирования функции $\varphi(t) = \varphi(t_1, \ldots, t_n)$ нескольких переменных предполагает, что нужно найти многомерный аналог уравнения (2), дать определение дискретной первообразной и получить аналог формулы Ньютона-Лейбница (3). В данной работе это реализовано в задаче суммирования функции по целым точкам n-мерного параллелепипеда (теорема 1 и лемма 1).

Для функции нескольких дискретных аргументов $\varphi(t)=\varphi(t_1,\ldots,t_n)$ рассматривается задача отыскания суммы ее значений по всем целочисленным точкам n-мерного параллелепипеда с «переменной» вершиной $x\in\mathbb{Z}^n_{\geqslant}$:

$$\Pi(x)=\{t\in\mathbb{R}^n_{\geqslant}: 0\leqslant t_j\leqslant x_j, j=1,\ \ldots,n\}. \tag{4}$$

Искомую сумму можно записать так:

$$S(x)=\sum_{t_1=0}^{x_1}\cdots\sum_{t_n=0}^{x_n}\varphi(t_1,\ldots,t_n)=\sum_{t\in\Pi(x)}\varphi(t). \tag{5}$$

Решить задачу суммирования — значит найти формулу, выражающую сумму (5) через не зависящее от x (конечное) число слагаемых.

Разностное уравнение относительно неизвестной функции $f(x)$ записывается следующим образом:

$$P(\delta)f(x)=\varphi(x),\ x\in\mathbb{Z}^n_{\geqslant}. \tag{6}$$

Определение. Полиномиальный разностный оператор $P(\delta)$ назовем *оператором, обладающим суммирующим эффектом,* если существует решение $f(x)$ уравнения (6), такое что сумма (5) выражается через значения $f(x)$ в конечном и не зависящем от $x=(x_1,\ldots,x_n)$ числе точек.

В этом случае, естественным образом, $f(x)$ можно называть *дискретной первообразной функции $\varphi(x)$,* а соответствующее выражение, решающее задачу суммирования (5) — *дискретным аналогом формулы Ньютона–Лейбница.*

Для любой точки x определим оператор проекции π_j вдоль оси x_j:

$$\pi_j x:=(x_1,\ldots,x_{j-1},0,x_{j+1},\ldots,x_n),$$

и определим его действие на функциях: $\pi_j f(x):=f(\pi_j x)$.

Обозначим $\mathcal{P}(A)$ – булеан (множество всех подмножеств) множества A. Пусть $V:=\mathcal{P}(\{1,\ldots,n\})$, $J=\{j_1,\ldots,j_k\}\in V$.

Если обозначить $\pi_J=\pi_{j_1}\circ\ldots\circ\pi_{j_k}$, то множество вершин параллелепипеда (4) можно записать в виде $\{\pi_J x, J\in V\}$. Отметим, что $\pi_\varnothing x=x$.

Лемма 1. *Пусть в уравнении (6) разностный оператор $P(\delta)=R(\delta)(\delta-I)$, где $R(\delta)$ — некоторый полиномиальный оператор. Тогда для* *любого решения f уравнения (6) справедлив дискретный аналог формулы Ньютона-Лейбница*

$$\sum_{t\in\Pi(x)}\varphi(t)=R(\delta)\sum_{J\in V}(-1)^{\#J}f(\pi_J(x+I)),$$

где $\#J$ — число элементов множества J.

Мы видим, что в лемме 1 нахождение значения суммы (5) сводится к вычислению значений функции $f(x)$ в вершинах параллелепипеда $\Pi(x+I)$, число которых равно 2^n и не зависит от x. Таким образом, оператор $P(\delta)=R(\delta)(\delta-I)$ обладает суммирующим эффектом.

Теорема 1. *В задаче суммирования (5) суммирующим эффектом обладают полиномиальные разностные операторы $P(\delta)$ вида*

$$P(\delta)=R(\delta)\prod_{j=1}^{n}(\delta_j-1),$$

где $R(\delta)$ — некоторый полином, $j=1,\dots,n$, и только они.

Пример. Найти сумму $S(x_1,x_2)=\sum\limits_{t_1=0}^{x_1}\sum\limits_{t_2=0}^{x_2}\varphi(t_1,t_2)$, где

$$\varphi(t_1,t_2)=\frac{1}{(t_1+t_2+1)(t_1+t_2+2)(t_1+t_2+3)}.$$

Функция $f(t_1,t_2)=\frac{1}{2}(t_1+t_2+1)^{-1}$ является решением разностного уравнения $(\delta_1-1)(\delta_2-1)f(t)=\varphi(t)$. Имеем $P(\delta)=(\delta_1-1)(\delta_2-1), R\equiv 1$. Искомая сумма равна

$$S(x)=f(x_1+1,x_2+1)-f(x_1+1,0)-f(0,x_2+1)+f(0,0)=$$
$$=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{x_1+x_2+3}-\frac{1}{x_1+2}-\frac{1}{x_2+2}+1\Big).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. М : Наука, 1967. 314 с.

[2] *Abramov S. A.* Indefinite sums of rational functions // Proceedings of ISSAC'95. 1995. P. 303–308.

[3] *Kauers M.* The Concrete Tetrahedron // Springer-Verlag Wien, 2011. P. 212.

[4] *Polyakov S. A.* Indefinite summation of rational functions with factorization of denominators // Programming and Computer Software. 2011. Vol. 37, № 6. P. 322–325.

[5] *Shishkina O. A.* Multidimensional Analog of the Bernoulli Polynomials and its Properties // Journal of Siberian Federal University, Mathematics & Physics. 2016. Vol. 9, № 3. P. 376–384.