УДК 517.9

О точке множества коэффициентов однолистных функций, доставляемой функцией пика[1]

В. Г. Гордиенко (Саратов, Россия)

valeriygor@mail.ru

В работе изучаются свойства точки граничной поверхности системы начальных коэффициентов в классе ограниченных однолистных функций, доставляемой симметризованной функцией Пика.

Ключевые слова: однолистная функция, принцип максимума Понтрягина, функция Пика.

On the point of the set for coefficients of univalent functions, delivered by the function pick[1]

V. G. Gordienko (Saratov, Russia)

valeriygor@mail.ru

In this paper we study the properties of a point of the boundary surface for the system of initial coefficients in the class of bounded univalent functions, delivered by a symmetrized Pick function.

Keywords: univalent function, Pontryagin maximum principle, Pick function.

Введение

Пусть $S-$ класс однолистных аналитических в единичном круге $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функций f, нормированных разложением

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

и $S(M)-$ класс функций $f \in S$, удовлетворяющих в $\mathbb{D}$ ограничению $|f(z)| < M,\ M > 1$. Класс $S(M)$ обладает более сложной структурой по сравнению с классом $S(\infty) = S$. На данный момент для всех $M > 1$ известны точные оценки второго [1] и третьего [2] тейлоровских коэффициентов. В первом случае $\max\limits_{f \in S(M)} |a_2|$ достигается только для вращений функции Пика

$$P_M(z) = MK^{-1}\left(\frac{K(z)}{M}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(M) z^n,$$

где $K(z)$– функция Кёбе, во втором - $\max\limits_{f\in S(M)} |a_3|$, $M \leq e$ достигается функцией Пика $P_{M^2}(z) = \left[P_{M^2}(z^2)\right]^{1/2}$ и её вращениями. При $M > e$ функции Пика не являются экстремальными. Точные оценки четвёртого коэффициента известны только для M близких к единице [3], со знаком равенства для вращений симметризованной функции $P_{M^3}(z)$. Эти результаты позволили, в своё время, Хажинскому и Тамми сформулировать гипотезу о том, что для каждого $n \geq 2$ существует $M_n > 1$ такое, что для всех $M \in (1, M_n)$ и всех функций $f \in S(M)$ справедливы неравенства

$$|a_n| \leq \frac{2}{n-1}\left(1 - \frac{1}{M^{n-1}}\right)$$

со знаком равенства для вращений функции $P_{M^n}(z) = [P_{M^n}(z^n)]^{1/n}$, которая была доказана в работах [4],[5]. Отыскание констант M_n является трудной задачей.

Структура класса $S(M)$ формирует интерес к описанию свойств границы множеств значений функционалов $V_n(M) = (a_2, a_3, \ldots, a_n)$, в частности, к отысканию седловых точек. Первый из таких результатов для $n = 3$ получен в работе [6].

Формулы, теоремы

Исследуем характер точки граничной поверхности $\partial V_5(M)$ множества значений $V_5(M) = \{a_2, a_3, a_4, \mathrm{Re}\, a_5 : f \in S(M)\}$, доставляемой симметризованной функцией Пика $P_{M^4}(z)$. В работе [7] найдено значение $M_5^* = 2.06263\ldots$ такое, что для всех $M \in (1, M_5^*)$ точка $A_M = (0, 0, 0, 1/2(1 - 1/M^4))$ граничной поверхности $\partial V_5(M)$, доставляемая функцией $P_{M^4}(z)$, является точкой локального максимума, что доказывает локальную гипотезу Хажинского-Тамми. Попутно было установлено, что вдоль одного из направлений эта точка имеет угловой характер.

В данной работе, методами теории оптимального управления с применением принципа максимума Понтрягина, продолжено исследование свойств точки A_M. Известно [8], что функции f доставляющие точки граничной поверхности $\partial V_5(M)$, выражаются через интегралы обобщённого дифференциального уравнения Лёвнера

$$\frac{dw}{dt} = -w \sum_{k=1}^{3} \lambda_k \frac{e^{iu_k} + w}{e^{iu_k} - w}, \quad w|_{t=0} = z, \quad 0 \leq t < \log M,$$

с непрерывными функциями $u_k = u_k(t)$ и постоянными числами $\lambda_k \geq 0$,

$k = 1, \ldots, 4,\ \sum_{k=1}^{4} \lambda_k = 1$. Уравнение Лёвнера позволяет записать фазовую систему для коэффициентов функции $f(z) = Mw(z, \log M)$. Граничная поверхность множества $V_5(M)$ параметризуется вектором начальных данных сопряжённой гамильтоновой системы и числами λ_k [8]. Вариация вектора начальных данных и чисел λ_k в окрестности точки A_M, позволяет получить утверждение

Теорема 1. *Точка $A_M = (0, 0, 0, 1/2(1 - 1/M^4))$ граничной поверхности множества $V_5(M) = \{a_2, a_3, a_4, \operatorname{Re} a_5 : f \in S(M)\}$, доставляемая симметризованной функцией Пика $P_{M^4}(z)$, является седловой точкой для всех $M \geq 2.550812\ldots$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Pick G.* Über die konforme Abbildung eines Kreises auf ein schlichtes und zugleich beschränktes Gebiet // S.-B. Kaiserl. Akad. Wiss. Wien. Math.-Naturwiss. Kl. Abt. II a. 1917. B. 126. P. 247–263.

[2] *Schaffer A. C., Spencer D. C.* The coefficients of schlicht functions // Duke Math. J. 1945. Vol. 12. P. 107–125.

[3] *Schiffer M., Tammi O.* On the fourth coefficient of bounded univalent functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. Vol. 119. P. 67–78.

[4] *Siewierski L.* Sharp estimation of the coefficients of bounded univalent functions near the identity // Bull. Acad. Polon. Sci. 1968. Vol. 16. P. 575–576.

[5] *Schiffer M., Tammi O.* On bounded univalent functions which are close to identity // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math. 1968. Vol. 435. P. 3–26.

[6] *Захаров А. М., Прохоров Д. В.* Седловые точки множества коэффициентов однолистных функций // Математика.Механика. Сб.науч.тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2003. С. 33–36.

[7] *Гордиенко В. Г., Самсонова К. А.* Определение границы в локальной гипотезе Хажинского-Тамми для пятого коэффициента // Изв.Сарат.ун-та. Новая серия. Серия Математика.Механика.Информатика. 2013. Т. 13, Вып. 4. С. 18–31.

[8] *Прохоров Д. В.* Множества значений систем функционалов в классах однолистных функций // Матем. Сборник. 1990. Т. 181, № 12. С. 1659–1667.