УДК 517.5

Метод решения задачи Дельсарта для сферических дизайнов[1]

Д. В. Горбачев, Д. Р. Лепетков, И. А. Мартьянов (Тула, Россия)
dvgmail@mail.ru

Приводится численно-аналитический метод решения экстремальной задачи Дельсарта для взвешенных сферических дизайнов.

Ключевые слова: сферический дизайн, задача Дельсарта, квадратурная формула, интервальная арифметика.

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-31-90152).

Method for solving the Delsarte problem for spherical designs[1]

D. V. Gorbachev, D. R. Lepetkov, I. A. Martyanov (Tula, Russia)
dvgmail@mail.ru

A numerical-analytical method for solving the Delsarte extremal problem for weighted spherical designs is presented.

Keywords: spherical design, Delsarte problem, quadrature formula, interval arithmetic.

Acknowledgements: this work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 19-31-90152).

Пусть $\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ — единичная сфера. Множество узлов $\{x_\nu\}_{\nu=1}^N \subset \mathbb{S}^d$ и положительных весов $\{\lambda_\nu\}_{\nu=1}^N$, $\sum_{\nu=1}^N \lambda_\nu = 1$, называется сферическим s-дизайном, если квадратурная формула

$$\frac{1}{|\mathbb{S}^d|}\int_{\mathbb{S}^d} f(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{N} \lambda_\nu f(x_\nu)$$

справедлива для любого алгебраического многочлена

$$f(x) = \sum_{k_1+\ldots+k_{d+1}\le s} c_{k_1\ldots k_{d+1}} x_1^{k_1}\ldots x_{d+1}^{k_{d+1}}$$

степени не выше s. Дизайн называется минимальным, если он содержит наименьшее число узлов $N(d,s)$.

P. Delsarte, J.M. Goethals и J.J. Seidel (1977) в случае равных весов $\lambda_1 = \ldots = \lambda_N = \frac{1}{N}$ доказали, что

$$N(d,s) \geq A(d,s) = \sup f(1),$$

где супремум берется по всем неотрицательным непрерывным на отрезке $[-1,1]$ функциям вида

$$f(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} f_k P_k(t), \quad P_k(t) = \frac{P_n^{(\frac{d}{2}-1,\frac{d}{2}-1)}(t)}{P_n^{(\frac{d}{2}-1,\frac{d}{2}-1)}(1)},$$

для которых $f(1) > 0$ и $f_k \leq 0$ для всех $k \geq s+1$. Данная оценка остается справедливой и для произвольных весов.

Решение варианта задачи $A(d,s)$ для многочленов степени не выше s ($f_k = 0$ при $k \geq s+1$) влечет оценку жестких дизайнов

$$N(d,s) \geq \binom{d + [\frac{s+1}{2}] - 1}{d} + \binom{d + [\frac{s}{2}]}{d}.$$

В.А. Юдин, Н.Н. Андреев, P. Boyvalenkov с соавторами показали, что решение общей задачи $A(d,s)$ позволяет в некоторых случаях усилить оценку жестких дизайнов.

Предлагается метод точного решения задачи $A(d,s)$ в частных случаях. Он базируется на идее В.В. Арестова и А.Г. Бабенко (1997) для сферических кодов, которая заключается в существовании специальной квадратурной формулы, согласованной с экстремальной функцией.

Теорема. *Пусть существуют узлы* $-1 \leq r_1 < r_2 < \ldots < r_u < r_{u+1} = 1$*, веса* $\rho_1 > 0, \ldots, \rho_{u+1} > 0$*, целые числа* $s+1 \leq k_1 < \ldots < k_v$ *и неотрицательный на* $[-1,1]$ *многочлен* f^**, такие что*

$$Q(P_0) = 1, \quad Q(P_k) = 0, \quad k \in \{1, \ldots, s, k_1, \ldots, k_v\},$$

$$Q(P_k) > 0, \quad k \in \{s+1, s+2, \ldots\} \setminus \{k_1, \ldots, k_v\},$$

$$f^*(t) = 1 + \sum_{k=1}^{s} f_k^* P_k(t) + \sum_{i=1}^{v} f_{k_i}^* P_{k_i}(t),$$

$$f^*(r_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad f_{k_i}^* < 0, \quad i = 1, \ldots, v,$$

где

$$Q(f) = \sum_{i=1}^{u+1} \rho_i f(r_i).$$

Тогда f^* *— экстремальная функция и*

$$A(d,s) = f^*(1) = \frac{1}{\rho_{u+1}}.$$

Практическое применение теоремы состоит из следующих шагов. Вначале методами оптимизации многочлен f^* находится численно. Это позволяет определить параметры u, v, k_i в теореме и найти начальные приближения неизвестных узлов r_i и весов ρ_i. Затем узлы и веса могут быть рассчитаны с большой точностью из полиномиальной системы уравнений с рациональными коэффициентами $S(r, \rho) = 0$. Далее многочлен f^* уточняется, для чего веса r_i берутся в качестве двойных нулей, а оставшийся множитель вычисляется из решения системы линейных уравнений. Убеждаемся, что все нули f^*, кроме r_i, лежат вне отрезка $[-1, 1]$ (в комплексной области), что влечет неотрицательность f^*. Смотрим знаки коэффициентов f^*_k. Свойство $Q(P_k) > 0$ проверяется как и в методе Арестова–Бабенко при помощи оценки Стилтьеса–Бернштейна для многочленов Гегенбауэра.

Таким образом, численно с большой точностью убеждаемся, что все условия из теоремы выполнены. Чтобы утверждать существовании соответствующего аналитического решения остается показать, что в малой окрестности найденных численно узлов и весов существует действительное решение. Для этого в разобранных примерах мы успешно применили функцию certify из библиотеки HomotopyContinuation.jl, которая реализует интервальный метод Кравчука проверки существования аналитического решения системы полиномиальных уравнений. В качестве примера приведем решение задачи $A(2, 4) = 9.31033\ldots$, где $u = v = 4$, $\{k_1, \ldots, k_4\} = \{7, 12, 17, 22\}$.