УДК 517.518

Преобразования Фурье сверток функций из пространств Лебега и Лоренца[1]

Б. И. Голубов (Долгопрудный, Россия),
С. С. Волосивец (Саратов, Россия)
golubovboris1939@gmail.com, volosivetsss@mail.ru

В работе приводятся условия весовой интегрируемости преобразований Фурье сверток функций из пространств Лоренца и Лебега, а также количественные оценки, связанные с этой интегрируемостью. Доказана неулучшаемость полученных результатов.

Ключевые слова: преобразование Фурье, весовая интегрируемость, свертка, пространство Лебега, пространство Лоренца.

Благодарности: работа второго автора выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках выполнения государственного задания (проект № FSRR-2020-0006).

Fourier transforms of convolutions of functions from Lebesgue and Lorentz spaces[1]

B. I. Golubov (Dolgoprudnyi, Russia),
S. S. Volosivets (Saratov, Russia)
golubovboris1939@gmail.com, volosivetsss@mail.ru

In the paper the conditions for weighted integrability of Fourier transforms of convolutions of functions from Lebesgue and Lorentz spaces and the quantitative estimates connected with such integrabilty are given. The sharpness of obtained results is proved.

Keywords: Fourier transform, weighted integrability, convolution systems, Lebesgue space, Lorentz space.

Acknowledgements: the work of the econd author was supported by the Ministry of science and education of the Russian Federation in the framework of the basic part of the scientific research state task, project FSRR-2020-0006).

Введение

Пусть $L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$, обозначает пространство измеримых по Лебегу на $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ функций, для которых норма

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

конечна. При $p = \infty$ вместо $L^\infty(\mathbb{R})$ будем рассматривать пространство $B(\mathbb{R})$ ограниченных измеримых функций или пространство $C_0(\mathbb{R})$ непрерывных функций $f(x)$, стремящихся к нулю при $x \to \pm\infty$, с нормой $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.

Для $f \in L^1(\mathbb{R})$ определим комплексное преобразование Фурье $\widehat{f}$ равенством

$$\widehat{f}(t) = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{-itx}\, dx.$$

Легко видеть, что в этом случае $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R})$ (см. [1, гл. 5. предл. 5.1.2].

В случае $1 < p \le 2$ преобразование Фурье $\widehat{f}$ функции $f \in L^p(\mathbb{R})$ определяется как предел при $a \to +\infty$ функции $(2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-a}^{a} f(t)e^{-itx}\, dt$ в норме $L^{p'}(\mathbb{R})$, где $1/p + 1/p' = 1$, т.е.

$$\widehat{f}(x) = (L^{p'}(\mathbb{R})) \lim_{a\to+\infty} (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-a}^{a} f(t)e^{-itx}\, dt.$$

В частности, $\widehat{f} \in L^{p'}(\mathbb{R})$ и имеет место аналог неравенства Хаусдорфа-Юнга $\|\widehat{f}\|_{p'} \le (2\pi)^{1/(2p')-1/(2p)}\|f\|_p$, доказанный Е. Титчмаршем (см. [2, гл. 4, теорема 74] или [1, гл. 5. предл. 5.2.5]). При $p = p' = 2$ получаем $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ и в этом случае справедливо равенство Планшереля $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$ (см. [1, гл. 5. теорема 5.2.4]). Важной частью теоремы Планшереля является восстановление $f(x)$ по формуле

$$f(x) = (L^2(\mathbb{R})) \lim_{a\to+\infty} (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-a}^{a} \widehat{f}(t)e^{itx}\, dt.$$

Пусть $p, q \ge 1$, $\omega_{p,q}(x) = |x|^{1/p-1/q}$. Рассмотрим весовое пространство $L^q_{\omega_{p,q}}(\mathbb{R})$ измеримых на $\mathbb{R}$ функций с конечной нормой

$$\|f\|_{q,\omega_{p,q}} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} (|x|^{1/p-1/q}|f(x)|)^q\, dx\right)^{1/q} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |x|^{q/p-1}|f(x)|^q\, dx\right)^{1/q}.$$

Пусть $|\cdot|$ — мера Лебега и f^* — невозрастающая перестановка f, т.е. f^* нестрого убывает на $(0, +\infty)$ и

$$|\{x \in (0, +\infty) : f^*(x) > \lambda\}| = |\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > \lambda\}|$$

для любого $\lambda > 0$. Тогда при $1 \le p, q < \infty$ пространство Лоренца $L^{p,q}(\mathbb{R})$ (см. [3]) состоит из измеримых на $\mathbb{R}$ функций, для которых конечна норма

$$\|f\|^*_{L^{p,q}} = \left(\int\limits_0^\infty (x^{1/p-1/q} f^*(x))^q \, dx\right)^{1/q} = \left(\int\limits_0^\infty x^{q/p-1} (f^*(x))^q \, dx\right)^{1/q}.$$

Легко видеть, что $L^q_{\omega_{q,q}}(\mathbb{R}) = L^{q,q}(\mathbb{R}) = L^q(\mathbb{R})$ при $1 \le q < \infty$. При $1 \le p < \infty$ по определению

$$\|f\|_{\infty,\omega_{p,\infty}} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^{1/p} |f(x)|, \quad \|f\|^*_{L^{p,\infty}} = \sup_{x\in\mathbb{R}} x^{1/p} f^*(x).$$

Для $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p \le 2$, справедливо неравенство Харди-Литтлвуда

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(x)|^p |x|^{p-2} \, dx\right)^{1/p} \le C\|f\|_p,$$

или $\|f\|_{p,\omega_{p',p}} \le C\|f\|_p$ (см. [2, гл. 4, теорема 80]).

Свертка функций $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ (т.е. f, g интегрируемы по Лебегу на каждом компакте из $\mathbb{R}$) определяется равенством $f * g(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y) \, dy$, если последний интеграл существует. Известно, что для $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$, $g \in L^1(\mathbb{R})$, функция $f * g$ принадлежит $L^p(\mathbb{R})$ и верно неравенство $\|f * g\|_p \le \|f\|_p \|g\|_1$ (см. [1, предл. 0.2.2]). Кроме того, для $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le 2$, $g \in L^1(\mathbb{R})$ справедливо равенство $\widehat{f * g}(x) = (2\pi)^{1/2} \widehat{f}(x)\widehat{g}(x)$, почти всюду на $\mathbb{R}$ (см. [1, гл. 5, теоремы 5.1.3 и 5.2.12]). Используя плотность $L^1(\mathbb{R}) \cap L^{p,q}(\mathbb{R})$ в $L^{p,q}(\mathbb{R})$ при $1 < p < 2$, $1 \le q \le \infty$, методом доказательства теоремы 5.2.12 из [1] можно установить, что формула выше верна для $f \in L^{p,q}(\mathbb{R})$ при $1 < p < 2$, $1 \le q \le \infty$.

В случае тригонометрических рядов абсолютная сходимость рядов Фурье 2π-периодических сверток и ее обобщения изучались М. Изуми и С. Изуми [4], а также К.Онневиром [5]. Положим для 2π-периодической интегрируемой на периоде функции f (т.е. $f \in L^1_{2\pi}$, пространства $L^p_{2\pi}$ вводятся аналогично)

$$c_k(f) = (2\pi)^{-1} \int\limits_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} \, dt, \quad k \in \mathbb{Z},$$

а для $f, g \in L^1_{2\pi}$ свертка вводится равенством $(f * g)_{2\pi} = \int\limits_0^{2\pi} f(x - t)g(t) \, dt$.

Будем писать также $A_n \asymp B_n$, $n \in \mathbb{N}$, если $A_n = O(B_n)$ и $B_n = O(A_n)$

при $n \in \mathbb{N}$. Далее такое же обозначение будет использоваться для выражений, зависящих от функции f. Результаты следующей теоремы A содержатся в работе К. Онневира [5].

Теорема A. 1) *Если $g, h \in L^p_{2\pi}$, $1 < p \le 2$, $1/p + 1/p' = 1$, то ряд $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |c_k((g*h)_{2\pi})|^{p'/2}$ сходится.*

2) *Для любого $1 < p \le 2$ найдутся $g, h \in L^p_{2\pi}$ такие, что для любого $0 < \beta < p'/2$ ряд $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |c_k((g*h)_{2\pi})|^{\beta}$ расходится.*

Аналог теоремы A для преобразования Фурье доказан в [6].

Н. А. Ильясов [7], [8], [9] рассматривал при $r > 0$ величину

$$(\rho_n^{(r)}(f))^r = \sum_{|k|\ge n} |c_k(f)|^r, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $f = (g*h)_{2\pi}$ и изучал соотношения между этой величиной и наилучшими приближениями функций g и h в соответствующих метриках. В частности, в [7] им доказан такой количественный вариант теоремы A.

Теорема B. 1) *Пусть $1 < p \le 2$, $1/p + 1/p' = 1$, $g, h \in L^p_{2\pi}$, $f = (g*h)_{2\pi}$, $\gamma = p'/2$. Тогда*

$$\rho_{n+1}^{(\gamma)}(f) \le C(p) E_n(g)_{L^p_{2\pi}} E_n(h)_{L^p_{2\pi}}, \quad n \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\},$$

где $E_n(g)_{L^p_{2\pi}} = \inf_{t_n \in T_n} \|g - t_n\|_{L^p_{2\pi}}$ — наилучшее приближение тригонометрическими полиномами t_n порядка не выше n ($t_n \in T_n$) функции $g \in L^p_{2\pi}$ в $L^p_{2\pi}$.

2) *Пусть $1 < p \le 2$, $1/p + 1/p' = 1$, $\alpha, \beta > 0$, $\gamma = p'/2$. Тогда существуют $g, h \in L^p_{2\pi}$, такие что $E_n(g)_{L^p_{2\pi}} \asymp n^{-\alpha}$, $E_n(h)_{L^p_{2\pi}} \asymp n^{-\beta}$, $n \in \mathbb{N}$, и для $f = (g*h)_{2\pi}$ справедливо соотношение $\rho_{n+1}^{(\gamma)}(f) \asymp n^{-\alpha-\beta}$, $n \in \mathbb{N}$.*

Хорошо известен критерий М. Рисса абсолютной сходимости тригонометрического ряда (см. [10, гл. 9, § 7]).

Теорема C. *Ряд Фурье функции $f \in L^1_{2\pi}$ сходится абсолютно тогда и только тогда, когда функцию f можно представить в виде $f = (g*h)_{2\pi}$, где $g, h \in L^2_{2\pi}$.*

В работе Н. А. Ильясова [9] установлен количественный вариант этой теоремы.

Теорема D. *Пусть последовательность$\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ убывает и стремится к нулю. Тогда множество непрерывных 2π-периодических функций f со свойством $\rho_{n+1}^{(1)}(f) = O(\lambda_n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, совпадает со множеством*

$$\{(g*h)_{2\pi} : f, g \in L^2_{2\pi}, E_n(g)_{L^2_{2\pi}} = O(\lambda_n^{1/2}), E_n(h)_{L^2_{2\pi}} = O(\lambda_n^{1/2}), \quad n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Вместо $E_n(g)_{L^p_{2\pi}}$ мы будем рассматривать наилучшие приближения целыми функциями экспоненциального типа. Пусть $\sigma \geq 0$, $g(z)$ является целой функцией и для любого $\varepsilon > 0$ существует $A = A(\varepsilon) > 0$, такое что $|g(z)| \leq Ae^{(\sigma+\varepsilon)|z|}$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Тогда будем говорить, что $g(z)$ принадлежит пространству целых функций E_σ экспоненциального типа не выше σ. Для $f \in L^{p,q}(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $\sigma \geq 0$, определим

$$A_\sigma(f)_{L^{p,q}} = \inf\{\|f-g\|_{L^{p,q}} : g \in L^{p,q}(\mathbb{R}) \cap E_\sigma\}.$$

При $p = q$ вместо $A_\sigma(f)_{L^{p,p}}$ будем писать $A_\sigma(f)_p$.

Целью нашей работы является установление аналога теоремы А для двух различных пространств Лоренца и преобразований Фурье, а также теоремы В для различных пространств Лебега и широких классов последовательностей, эквивалентных последовательности наилучших приближений. Приводится количественный аналог теоремы М. Рисса для преобразований Фурье.

Основные результаты

Теорема 1. *Пусть* $1 < p_1, p_2 < 2$, $1 \leq q_1 \leq p_1'$, $1 \leq q_2 \leq p_2'$, $1/r = 1/p_1 + 1/p_2 - 1 \in (1/2, 1)$, $1/s = 1/q_1 + 1/q_2$ *(т.е.* $1/s \geq 1/r'$*). Если* $f \in L^{p_1,q_1}(\mathbb{R})$, $g \in L^{p_2,q_2}(\mathbb{R})$, *то* $h = f * g \in L^{r,s}(\mathbb{R})$ *и справедливы неравенства*

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}} |x|^{s/r'-1}|\widehat{h}(x)|^s\,dx\right)^{1/s} \leq C\|f\|^*_{L^{p_1,q_1}}\|g\|^*_{L^{p_2,q_2}},$$

$$\left(\int\limits_{|x|\geq n} |x|^{s/r'-1}|\widehat{h}(x)|^s\,dx\right)^{1/s} \leq CA_n(f)_{L^{p_1,q_1}}A_n(g)_{L^{p_2,q_2}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $A_n(f)_{L^{p,q}}$ *определено в конце Введения.*

Следствие 1. *Пусть* $1 < p_1, p_2 < 2$, $1/r = 1/p_1 + 1/p_2 - 1 \in (1/2, 1)$. *Если* $f \in L^{p_1}(\mathbb{R})$, $g \in L^{p_2}(\mathbb{R})$, *то* $h = f * g \in L^r(\mathbb{R})$ *и справедливы неравенства*

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}} |\widehat{h}(x)|^{r'}\,dx\right)^{1/r'} \leq C\|f\|_{p_1}\|g\|_{p_2},$$

$$\left(\int\limits_{|x|\geq n} |\widehat{h}(x)|^{r'}\right)^{1/r'} \leq CA_n(f)_{p_1}A_n(g)_{p_2}, \tag{1}$$

где $A_n(f)_p = A_n(f)_{L^{p,p}}$.

Теорема 2. *Пусть* $1 < p_1, p_2 < 2$, $1 \le q_1 \le p_1'$, $1 \le q_2 \le p_2'$, $1/r = 1/p_1 + 1/p_2 - 1 \in (1/2, 1)$, $1/s = 1/q_1 + 1/q_2$. *Если* $1 \le \theta < s$, *то существуют* $f_0 \in L^{p_1,q_1}(\mathbb{R})$, $g_0 \in L^{p_2,q_2}(\mathbb{R})$, *такие что* $h_0 = f_0 * g_0 \notin L^{r,\theta}(\mathbb{R})$ *и интеграл* $\int\limits_0^\infty x^{\theta/r'-1}|\widehat{h_0}(x)|^\theta\,dx$ *расходится.*

Замечание 1. Теоремы 1 и 2 дают обобщение теоремы A на случай различных пространств Лоренца и преобразований Фурье.

Докажем точность неравенства (1) из следствия 1.

Теорема 3. *Пусть* $1 < p_1, p_2 < 2$, $1/r = 1/p_1 + 1/p_2 - 1$, *последовательности* $\{\nu_n\}_{n=1}^\infty$ *и* $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ *убывают к нулю и для них выполнены условия*

$$\sum_{k=n}^\infty \nu_k^{p_1} k^{-1} \asymp \nu_n^{p_1}, \quad n \in \mathbb{N}; \quad \sum_{k=n}^\infty \mu_k^{p_2} k^{-1} \asymp \mu_n^{p_2}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Пусть также $\{\nu_n\}_{n=1}^\infty$ *и* $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ *удовлетворяют* Δ_2*-условию* $\nu_n \le C\nu_{2n}$, $\mu_n \le C\mu_{2n}$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда существуют функции* $f_0 \in L^{p_1}(\mathbb{R})$, $g_0 \in L^{p_2}\mathbb{R})$, *такие что* $A_n(f_0)_{p_1} \asymp \nu_n$, $A_n(g_0)_{p_2} \asymp \mu_n$, $n \in \mathbb{N}$. *и для* $h_0 = f_0 * g_0 \in L^r(\mathbb{R})$ *верно, что*

$$\left(\int\limits_{|x|\ge n} (\widehat{h_0}(x))^{r'}\,dx\right)^{1/r'} \asymp \nu_n\mu_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Замечание 2. Следствие 1 и теорема 3 дают обобщение теоремы B на более широкий класс двусторонних мажорант наилучших приближений и на случай преобразований Фурье. Легко видеть, что последовательности $\nu_n = n^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, $\mu_n = n^{-\beta}$, $\beta > 0$, удовлетворяют условию (2).

Теорема 4. *Пусть выполнены условия следствия 1,* $2 \ge \theta > r$, $\gamma \in (0, r')$. *Тогда существуют функции* $f_0 \in L^{p_1}(\mathbb{R})$, $g_0 \in L^{p_2}(\mathbb{R})$, *такие что* $h_0 = f_0 * g_0 \notin L^\theta(\mathbb{R})$ *и* $\widehat{h_0} \notin L^\gamma(\mathbb{R})$.

В заключение установим аналог теоремы D.

Теорема 5. *Пусть* $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ *и* $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ — *убывающая к нулю последовательность. Тогда функция* f *удовлетворяет соотношению* $\int\limits_{|x|\ge n} |\widehat{f}(t)|\,dt = O(\varepsilon_n)$, $n \in \mathbb{N}$, *в том и только в том случае, когда* $f = g * h$, *где* $g, h \in L^2(\mathbb{R})$ *и при этом* $A_n(f)_2 = O(\varepsilon_n^{1/2})$ *и* $A_n(g)_2 = O(\varepsilon_n^{1/2})$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$.

Замечание 3. Некоторые результаты для мультипликативных преобразований Фурье. близкие к теоремам 3-5 настоящей работы, можно найти в [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Butzer P. L., Nessel R. J.* Fourier analysis and approximation. New York-London. : Academic Press, 1971. 572 p.

[2] *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М. : Гостехиздат, 1948. 420 с.

[3] *Lorentz G. G.* Some new functional spaces // Ann. Math. 1950. Vol. 51, № 1. P. 37–55.

[4] *Izumi M., Izumi S.-I.* Absolute convergence of Fourier series of convolution functions // J. Approx. Theory. 1968. Vol. 1, № 1. P. 103–109.

[5] *Onneweer C. W.* On absolutely convergent Fourier series // Arkiv Mat. 1974. Vol. 12, № 1. P. 51–58.

[6] *Krayukhin S. A., Volosivets S. S.* Functions of bounded p-variation and weighted integrabilty of Fourier transforms // Acta Math. Hung. 2019. Vol. 159, № 2. P. 374–399.

[7] *Ilyasov N. A.* To the M.Riesz theorem on absolute convergence of the trigonometric Fourier series // Transactions of NAS of Azerbaijan, Ser. of phys.-tech. and math. sciences. 2004. Vol. 24, № 1. P. 113–120.

[8] *Ilyasov N. A.* To the M.Riesz theorem on absolute convergence of the trigonometric Fourier series (second report) // Transactions of NAS of Azerbaijan, Ser. of phys.-tech. and math. sciences. 2004. Vol. 24, № 4. P. 135–142.

[9] *Ильясов Н. А.* Скоростная L_p-версия критерия М.Рисса абсолютной сходимости тригонометрических рядов Фурье // Труды ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 193–202.

[10] *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М. : Физматгиз, 1961. 936 с.

[11] *Golubov B. I., Volosivets S. S.* Fourier transforms of multiplicative convolutions // Industrial mathematics and complex systems / Ed. by P. Manchanda et al. Singapore : Springer, 2017. Ch. 7. P. 129–140.