УДК 517.9

Применение метода обобщенных степеней для построения решений кватернионного варианта системы Коши-Римана[1]

Ю. А. Гладышев, Е. А. Лошкарева (Калуга, Россия)
losh-elena@yandex.ru

Рассматривается обобщенная система Коши-Римана для кватернионных функций в восьмимерном пространстве. Изучены некоторые классы решений этой системы и заявлено, что существует возможность использования для построения решений этой системы дифференциальных уравнений обобщенных степеней. В настоящем сообщении указан один из способов решения этой задачи.

Ключевые слова: обобщенные степени Берса, кватернионы, система Коши-Римана.

Application of the generalized degree method for constructing solutions of the quaternion variant of the Cauchy-Riemann system[1]

Yu. A. Gladyshev, E. A. Loshkareva (Kaluga, Russia)
losh-elena@yandex.ru

A generalized Cauchy-Riemann system for quaternionic functions in an eight-dimensional space is considered. Some classes of solutions of this system are studied and it is stated that it is possible to use generalized degrees of differential equations to construct solutions of this system. This message indicates one of the ways to solve this problem.

Keywords: generalized degrees of Bers, quaternions, Cauchy-Riemann system.

Введение

Обобщенная система Коши-Римана в пространстве R^8 [1] имеет вид

$$\left.\begin{array}{c} D_1X - \Psi D_2 = 0, \\ X\bar{D}_2 + \bar{D}_1\Psi = 0 \end{array}\right\}. \tag{1}$$

Здесь X, Ψ - функции переменной x_i $\left(i = \overline{1,8}\right)$, принимающие значения в теле кватернионов с системой единиц e_i $\left(i = \overline{0,3}\right)$, а D_1, D_2 кватернионые операторы

$$D_1 = \sum_0^3 e_i \frac{\partial}{\partial x_{i+1}}, D_2 = \sum_0^3 e_i \frac{\partial}{\partial x_{i+5}}, i = \left(\overline{0,3}\right). \tag{2}$$

Далее переменные x_5, x_6, x_7, x_8 для удобства обозначим $y_k, k = \overline{(1,4)}.$

Об одном использовании метода обощенных степеней

Система (1) допускает введение новых функций α, β от x_i, y_k вида

$$X = \bar{D}_1\alpha + \beta D_2, \;\; \psi = -\alpha\bar{D}_2 + D_1\beta. \tag{3}$$

Предполагая, что α, β таковы, что X, Ψ имеют непрерывные первые производные, убеждаемся, что функции α, β гармонические кватернионы

$$\left(D_1\bar{D}_1 + D_2\bar{D}_2\right)\alpha = 0, \;\; \left(D_1\bar{D}_1 + D_2\bar{D}_2\right)\beta = 0, \tag{4}$$

то есть все компоненты α, β являются решениями восьмимерного уравнения Лапласа.

Обратно, если α, β удовлетворяют (4), то X', Ψ' и X'', Ψ''

$$X' = \bar{D}_1\alpha, \;\; \Psi' = -\alpha\bar{D}_2, \tag{5}$$

$$X'' = \beta D_2, \;\; \Psi'' = \bar{D}_1\beta, \tag{6}$$

дают решения системы (1).

Таким образом преобразование (3) сводит решение системы (1) к построению решений уравнения Лапласа и последующему использованию соотношений (5), (6).

Поскольку при физической интерпретации системы (1) она совпадает с системой Максвелла [2,3,4], при определенном отождествлении компонент X_i, Ψ_i с напряженностями полей , то величины α, β можно связать с электрическими и магнитными потенциалами. Поэтому назовем α, β кватернионными потенциалами.

Для приложения ОС введем комплексные переменные

$$z_k = x_k + iy_k, \;\; \bar{z}_k = x_k - iy_k, \;\; i = \overline{1,4}. \tag{7}$$

Запишем соответствующие операторы

$$D_k = \tfrac{\partial}{\partial z_k} = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial}{\partial x_k} - i\tfrac{\partial}{\partial y_k}\right), \;\; \bar{D}_k = \tfrac{\partial}{\partial \bar{z}_k} = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial}{\partial x_k} + i\tfrac{\partial}{\partial y_k}\right), \tag{8}$$

а так же их правые обратные

$$I_k = \int\limits_{z_{k0}}^{z_k} d\xi..., \;\; \bar{I}_k = \int\limits_{\bar{z}_{k0}}^{\bar{z}_k} d\eta.... \tag{9}$$

Ограничим их действие чисто алгебраическими операциями над переменными $z_k, \bar{z}_k$. Введенные операторы обладают всеми свойствами, необходимыми для применения метода ОС. Ниже всюду использован параметрический вариант метода ОС. Поэтому функции, используемые во всех выражениях и конструкциях, являются комплекснозначными однокомпонентными функциями восьми комплексных переменных $z_k, \bar{z}_k, k = \overline{1,4}$. В переменных $z_k, \bar{z}_k$ уравнение Лапласа запишем

$$\sum_{k=1}^{4} 4\frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial z_k \partial \bar{z}_k} = 0, \quad \sum_{k=1}^{4} 4\frac{\partial^2 \beta_i}{\partial z_k \partial \bar{z}_k} = 0, \quad i = \overline{1,4}, \tag{10}$$

или, приняв обозначение $D_k = 4\frac{\partial^2}{\partial z_k \partial \bar{z}_k}$, как

$$\sum_{k=1}^{4} D_k \alpha_i = 0, \quad \sum_{k=1}^{4} D_k \beta_i = 0. \tag{11}$$

Для обобщенной константы C найдем

$$C = \prod_{k=1}^{4} \left(f_{1k}\left(z_k\right) + f_{2k}\left(\bar{z}_k\right)\right). \tag{12}$$

Здесь f_{1k}, f_{2k} аналитические функции соответствующих комплексных переменных. Из вида C следует, что она представлена как произведение функций, зависящих от пар переменных $z_k, \bar{z}_k$.

В дальнейшем в качестве f_{1k}, f_{2k} возьмем важный случай степенных функций

$$f_{1k} = c_{1k} z_k^{l_k}, \quad f_{2k} = c_{2k} \bar{z}_k^{m_k}. \tag{13}$$

Комплексные величины c_{1k}, c_{2k} дают в дальнейшем при подстановке в (12) 16 произведений. Назовем эти произвольные постоянные параметрами. Далее будем использовать интегральные операторы I_k , определив их на основе (9) как

$$I_k = \frac{1}{4} \int_{z_{k0}}^{z_k} d\eta \int_{\bar{z}_{k0}}^{\bar{z}_k} d\xi, \quad k = \overline{1,4}. \tag{14}$$

Напомним, что $z_k, \bar{z}_k$ рассматриваются как независимые переменные.

Обозначенная степень $X^{(p)}C$ определена

$$X_1^{(p_1)} X_2^{(p_2)} X_3^{(p_3)} X_4^{(p_4)} C = p_1! p_2! p_3! p_4! I_1^{(p_1)} I_2^{(p_2)} I_3^{(p_3)} I_4^{(p_4)} C = \prod_{k=1}^{4} p_k! I_k^{(p_k)} C. \tag{15}$$

Левая сторона формулы имеет символический характер и указывает на конструкцию и свойства правой части, которая может быть вычислена как комплексная функция 8 комплексных переменных $z_k, \bar{z}_k, k = \overline{1,4}$. Действительно, используя (11) и независимость комплексных переменных, найдем, проводя операции интегрирования по комплексным переменным при C, определенном в (11)

$$X^{(p)}C = \prod_{k=1}^{4} p_k! \left(\frac{l_k! z_k^{p_k+l_k}}{(p_k+l_k)! p_k!} c_{k1} + \frac{m_k! z_k^{p_k} \bar{z}_k^{p_k+m_k}}{(p_k+m_k)! p_k!} c_{k2} \right). \tag{16}$$

По построению (15) имеет следующие правила «дифференцирования», то есть действия операторов

$$D_i \prod_{k=1}^{4} X_k^{(p_k)} C = p_i \prod_{k=1}^{4} X_k^{(p_k-\delta_{ki})} C, \tag{17}$$

где δ_{ki} дельта Кронекера. Составим линейную комбинацию степеней $X^{(p)}C$, подставив ее в символической форме как степень суммы $\sum \alpha_k X_k^{(1)} C$

$$V_n = \left(\sum_{k=1}^{4} \alpha_k X_k^{(1)} \right)^n. \tag{18}$$

Здесь α_k некоторые произвольные действительные числа. Прежде чем переходить к построению базисных решений (10) приведем следующую формулу

$$D_i \left(\sum_{j=1}^{4} \alpha_j X_j^{(p)} \right)^n = n\alpha_i \left(\sum_{j=1}^{4} \alpha_j X_j^{(p-1)} \right)^{n-1}. \tag{19}$$

Из вида (19) следует, что выражение V_n , введенное в (18) удовлетворяет (10), если потребовать

$$\sum_{j=0}^{4} \alpha_j = 0. \tag{20}$$

Есть возможность построить решение методом ОС несколько в другом виде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Гладышев Ю. А.* О некоторых классах решений обобщенной системы Коши — Римана // Проблемы математического анализа. 2021. Вып. 109. С. 59–64.

[2] *Ландау Л. Д.* Теория поля. Москва : Наука, 1973. 504 с.

[3] *Гладышев Ю. А., Лошкарева Е. А.* Об одной физической интерпретации обобщенных условий Коши-Римана // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Сборник трудов Международной научной конференции, 2021. P. 102–109.

[4] *Gladyshev Ya. A., Loshkareva E. A.* On one physical interpretation of generalized conditions Cauchy-Riemann // J. Phys.: Conf. Ser. 2021. 1902 012037.