УДК 517.9

Об одном классе разностных операторов[1]

Г. В. Гаркавенко, Н. Б. Ускова (Воронеж, Россия)
g.garkavenko@mail.ru, nat-uskova@mail.ru

В работе рассматривается разностный оператор второго порядка с инволюцией при потенциале. Получены условия на потенциал, при которых возможно преобразование подобия исследуемого оператора в оператор блочно-диагонального вида и приведены оценки его собственных значений.

Ключевые слова: разностный оператор, метод подобных операторов, спектр.

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00732).

On a class of difference operators[1]

G. V. Garkavenko, N. B. Uskova (Voronezh, Russia)
g.garkavenko@mail.ru, nat-uskova@mail.ru

We consider the difference operator two order with involution. The conditions for the potential, in which the similarity transform this operator for the block-diagonal operator was obtained. We obtain also the asymptotic estimates for the eigenvalues.

Keywords: difference operator, method of similar operators, spectrum.

Acknowledgements: this work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 19-01-00732).

В работах [1] – [6] исследовались спектральные свойства разностного оператора, возникающего при дискретизации дифференциального оператора второго порядка с растущим потенциалом. Получены асимптотические оценки собственных значений, собственных векторов и спектральных проекторов. Первоначально задача исследования такого разностного оператора ставилась в [7]. В настоящей работе изучается разностный оператор, соответствующий дискретизации оператора второго порядка с растущим потенциалом с инволюцией, т. е. оператору $d^2x/dt^2 - q(-t)x(t)$ и изучается вопрос его приведения с помощью преобразования подобия к оператору блочно-диагонального вида. При этом выписываются условия на потенциал, при которых такое преобразование возможно.

Заметим, что дифференциальные операторы второго порядка с инволюцией активно изучаются в настоящее время (см., например, [8] – [10]).

Перейдем к более подробной постановке задачи. Как обычно, через $l_2(\mathbb{Z})$ обозначено гильбертово пространство двусторонних комплексных последовательностей $y : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, суммируемых с квадратом модуля $\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} |y(i)|^2 < \infty$, со скалярным произведением $(x, y) = \sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} x(i)\overline{y(i)}$

и с нормой $\|y\|_2 = \left(\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} |y(i)|^2\right)^{1/2}$, порождаемой этим скалярным произведением. Введем в рассмотрение следующие пространства операторов. Символом $\mathrm{End}\, l_2$ обозначим банахову алгебру ограниченных линейных операторов, действующих в l_2 с нормой $\|X\| = \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|Xx\|$, $x \in l_2$, $X \in \mathrm{End}\, l_2$. Нам также потребуется более узкое подпространство операторов из $\mathrm{End}\, l_2$. Пусть $\{Q_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — дизъюнктная система ортопроекторов в $\mathrm{End}\, l_2$. Тогда каждому оператору $X \in \mathrm{End}\, l_2$ можно поставить в соответствие две матрицы: числовую $X \sim (x_{ij})$ относительно стандартного базиса $\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$, $e_n(k) = \delta_{nk}$, n, $k \in \mathbb{Z}$, δ_{nk} — символ Кронекера и операторную $X \sim (X_{ij})$, где $X_{ij} = Q_i X Q_j$, $i, j \in \mathbb{Z}$, относительно введенной системы ортопроекторов. Оператор $X \in \mathrm{End}\, l_2$ отнесем к $\mathrm{End}_1\, l_2 \subset \mathrm{End}\, l_2$, если конечна величина $\sum\limits_{p\in\mathbb{Z}} \max\limits_{i-j=p} \|Q_i X Q_j\|$, принимаемая за норму в $\mathrm{End}_1\, l_2$. Таким образом, $\mathrm{End}_1\, l_2$ — подпространство операторов из $\mathrm{End}\, l_2$, (операторные) матрицы которых имеют суммируемые диагонали. Заметим, что в работах [1] – [6] использовалось именно это пространство в качестве пространства допустимых возмущений метода подобных операторов.

Рассмотрим в пространстве l_2 разностный оператор $\mathcal{E} : D(\mathcal{E}) \subset l_2 \to l_2$, действующий по формуле $(\mathcal{E}x)(n) = x(n-1) + x(n+1) - 2x(n) - q(-n)x(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, где $q : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ — растущая последовательность, условия на которую появятся ниже. Область определения $D(\mathcal{E})$ оператора $\mathcal{E}$ состоит из таких $x \in l_2$, что $\mathcal{E}x \in l_2$, т. е. $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |q(-n)x(n)|^2 < \infty$. Следуя далее общей схеме метода подобных операторов [1], оператор $\mathcal{E}$ представляют в виде $\mathcal{E} = A - B$, где A — оператор с диагональной матрицей и $B \in \mathrm{End}_1\, l_2$ (см. [1] – [6]). Преобразованием подобия оператор $\mathcal{E}$ приводит к оператору $A - Y$, где $Y \in \mathrm{End}_1\, l_2$ также имеет диагональную матрицу (или матрицу, имеющую ненулевой центральный блок порядка $2k+1$, где $k \in \mathbb{Z}_+$ — некоторое число и ненулевую главную диагональ). В рассматриваемом случае этот вариант не проходит, так как у оператора $\mathcal{E}$ стоит растущая последовательность по побочной диагонали. Поэтому мы будем осуществлять блочную диагонализацию оператора $\mathcal{E}$, т. е. будем преобразованием подобия приводить его к следующему виду: по главной диагонали будут стоять ненулевые блоки размера 2×2 и центральный блок размера $2k+1 \times 2k+1$.

Пусть $P_n(x) = (x, e_n)e_n + (x, e_{-n})e_{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, $P_0(x) = (x, e_0)e_0$, где e_m, $m \in \mathbb{Z}$, — векторы стандартного базиса в l_2. В качестве невозмущенного оператора берем оператор $A = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} P_n \mathcal{E} P_n$, а возмущением считаем оператор $B = \mathcal{E} - \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} P_n \mathcal{E} P_n$. Очевидно, что $B \in \operatorname{End}_1 l_2$. Оператор A имеет собственные значения, совпадающие с объединением собственных значений матриц

$$\begin{pmatrix} -2 & q(n) \\ q(-n) & -2 \end{pmatrix}.$$

А именно,

$$\sigma(A) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+} \sigma_n,$$

где $\sigma_0 = \{q(0)-2\}$, $\sigma_n = \{-2 \pm \sqrt{q(n)q(-n)}\}$, $n \in \mathbb{N}$. Соответствующие ортогональные собственные векторы находятся в $\operatorname{Im} P_n$ и в $\operatorname{Im} P_n$, $n \in \mathbb{N}$, имеют координаты $e_{n,1} = (1, -\sqrt{\frac{q(-n)}{q(n)}})$, $e_{n,2} = (\sqrt{\frac{q(n)}{q(-n)}}, 1)$, $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, в базисе из своих собственных векторов матрица $\widetilde{A}$ оператора A диагональна. Но, чтобы это было возможно, необходимо требовать сбалансированность последовательности $q : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ (потенциала q): пусть существуют такие константы $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, что

$$c_1|q(-n)| < |q(n)| < c_2|q(-n)|. \tag{1}$$

В базисе e_0, $e_{i,1}$, $e_{i,2}$, $i \in \mathbb{N}$, матрица возмущения $\widetilde{B}$ имеет ненулевые блоки $B_{i,i+1}$ и $B_{i,i-1}$, которые легко можно непосредственно вычислить. При этом $\widetilde{B} = U^{-1}BU \in \operatorname{End}_1 l_2$.

Теперь к оператору $\widetilde{A} - \widetilde{B}$ можно применить схему метода подобных операторов из, например, [4].

Имеет место

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* (1) *и*

$$\gamma_i = \operatorname{dist}(\sigma_i, \sigma(\widetilde{A}) \setminus \sigma_i) \to \infty \tag{2}$$

при $i \to \infty$*. Тогда существует такое* $k > 0$*, что оператор* $\mathcal{E}$ *подобен оператору* $\widetilde{A} - P_{(k)}XP_{(k)} - \sum\limits_{i>k} P_iXP_i$*, где* $X \in \operatorname{End}_1 l_2$ *— решение некоторого нелинейного уравнения метода подобных операторов и его можно найти методом простых итераций, причем* $X_{(0)} = 0$*,* $X_{(1)} = \widetilde{B}$ *и т. д.*

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 собственные значения* $\widetilde{\lambda}_{n,1}$ *и* $\widetilde{\lambda}_{n,2}$ *имеют асимптотику*

$$|\widetilde{\lambda}_{n,i} - \lambda_{n,i}| \le c_3\gamma_n^{-1}, \quad i = 1, 2,$$

где $c_3 > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* Спектральный анализ разностных операторов второго порядка с растущим потенциалом // ТВИМ. 2015. № 3(28). С. 40–48.

[2] *Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* Спектральный анализ одного класса разностных операторов с растущим потенциалом // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, № 4. С. 395–402.

[3] *Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* Метод подобных операторов в исследовании спектральных свойств одного класса разностных операторов // Вестник ВГУ. Серия: Физика-Математика. 2016. № 3. С. 101–111.

[4] *Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* Метод подобных операторов в исследовании спектральных свойств разностных операторов с растущим потенциалом // Сиб. электрон. матем. изв. 2017. Т. 14. С. 673–689.

[5] *Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* Асимптотика собственных значений разностного оператора с растущим потенциалом и полугруппы операторов // Математическая физика и компьютерное моделирование. 2017. Т. 20, № 4. С. 6–17.

[6] *Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б., Зголич А. Р.* Метод подобных операторов и спектральные свойства разностного оператора с четным потенциалом // Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. 2016. № 20(241). С. 42–49.

[7] *Мусилимов Б., Отелбаев М.* Оценка наименьшего собственного значения одного класса матриц, соответствующего разностному уравнению Штурма-Лиувилля // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1981. Т. 21, № 6. С. 1430–1434.

[8] *Крицков Л. В., Сарсенби А. М.* Базисность Рисса системы корневых функций дифференциального оператора второго порядка с инволюцией // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53, № 1. С. 35–48.

[9] *Владыкина В. Е., Шкаликов А. А.* Спектральные свойства обыкновенных дифференциальных операторов с инволюцией // Доклады РАН. 2019. Т. 484, № 1. С. 12–17.

[10] *Kopzhassanova A. A., Lukashov A. L., Sarsenbi A. M.* Spectral properties of non-self-adjoint perturbation for a spectral problem with involution // Abstr. Appl. Anal. 2012. Article ID: 590781. 5 p.