УДК 517.518.3

О сходимости орторекурсивных разложений почти всюду[1]

В. В. Галатенко (Москва, Россия)
vgalat@imscs.msu.ru
Т. П. Лукашенко (Москва, Россия)
lukashenko@mail.ru
В. А. Садовничий (Москва, Россия)
info@rector.msu.ru

Изложены результаты о сходимости почти всюду орторекурсивных разложений. Установлено, что для орторекурсивных разложений, сходящихся к разлагаемой функции, множитель Вейля $W(k) = \log_2^2(k+1)$, как и для ортогональных разложений.

Ключевые слова: орторекурсивные разложения функций, сходимость почти всюду, множитель Вейля.

Благодарности: исследование выполнено при поддержке Междисциплинарной научно–образовательной школы Московского университета "Математические методы анализа сложных систем".

An almost everywhere convergence orthorecursive expansions[1]

V. V. Galatenko (Moscow, Russian Federation)
vgalat@imscs.msu.ru
T. P. Lukashenko (Moscow, Russian Federation)
lukashenko@mail.ru
V. A. Sadovnichiy (Moscow, Russian Federation)
info@rector.msu.ru

State results on almost everywhere convergence for orthorecursive expansions. Establish for orthorecursive expansions convergent to the expanded functions Weil multiplier $W(k) = \log_2^2(k+1)$ as for orthogonal expansions.

Keywords: orthorecursive expansions of functions, almost everywhere convergence, Weil multiplier.

Acknowledgements: this research has been supported by the interdisciplinary Scientific and Educational School of Moscow University "Mathematical Methods of Complex Systems' Analysis".

Орторекурсивные разложения [1, 2] являются естественным обобщением классических ортогональных разложений. Напомним их определение.

Пусть $\mathbf{H}$ — пространство со скалярным произведением $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ (для определенности будем рассматривать пространства над $\mathbf{R}$), $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{H}$

— произвольная система нормированных элементов, $f \in \mathbf{H}$ — раскладываемый элемент. Определим индуктивно последовательность остатков $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ и последовательность коэффициентов $\{\widehat{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$r_0 = f; \quad \widehat{f}_n = (r_{n-1}, e_n),\ r_n = r_{n-1} - \widehat{f}_n e_n,\ n = 1, 2, \ldots .$$

Орторекурсивным разложением элемента f по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \widehat{f}_n e_n$.

Легко видеть, что если система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ортогональна, то орторекурсивное разложение по ней совпадает с классическим рядом Фурье. Даже без ортогональности системы для орторекурсивных разложений выполняются классические свойства ортогональных разложений, такие как равенство Бесселя

$$\|r_N\|^2 = \left\| f - \sum_{n=1}^{N} \widehat{f}_n e_n \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{N} \left| \widehat{f}_n \right|^2,$$

неравенство Бесселя

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \widehat{f}_n \right|^2 \leq \|f\|^2$$

и эквивалентность сходимости разложения к разлагаемому элементу равенству Парсеваля

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \widehat{f}_n \right|^2 = \|f\|^2$$

(см., например, [2]).

В теории ортогональных рядов известна теорема Меньшова–Радемахера (см. [3, 4] или [5, с. 332, 532]), утверждающая, что для сходимости почти всюду на $[0, 1]$ ряда ортонормированных функций $\sigma = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$ достаточно, чтобы сходился ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \log_2^2(k+1)$.

Меньшовым Д. Е. в [3] было также показано, что в приведенном условии $\log_2^2(k+1)$ нельзя заменить на любую неубывающую последовательность $o\left(\log_2^2(k+1)\right)$ — растущую медленнее $\log_2^2(k+1)$. Доказывающие этот факт теоремы ряда авторов см. в [5, гл. 9, § 1].

О переносе теоремы Меньшова–Радемахера на ряд других систем см. [6].

Рассмотрим вопрос об аналогичном условии на коэффициенты орторекурсивных разложений, гарантирующие их сходимость почти всюду. Оказалось, что в общем случае ситуация следующая (см. [7]).

Теорема 1. *Если пространство Лебега $L^2(\Omega)$, $0 < \mu\Omega < \infty$, сепарабельно, а λ_k — такая строго положительная последовательность, что все $\lambda_k \geq 1$ и*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \infty,$$

то для любой функции $f(x) \in L^2(\Omega)$, $\|f(x)\| > 0$, найдется такая нормированная последовательность функций $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, что орторекурсивный ряд $f(x)$ по системе $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ не сходится по норме пространства, не сходится поточечно почти всюду на Ω и при этом

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}_k|^2 \cdot \lambda_k < \infty.$$

Теорема 2. *Если $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность функций из пространства Лебега $L^2(\Omega)$, нормы которых ограничены в совокупности $\sup\limits_k \|e_k(x)\| = C < \infty$, положительная последовательность $\lambda_k \geq 1$ такова, что ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \Lambda < \infty,$$

а числовая последовательность a_k удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \cdot \lambda_k = L < \infty,$$

то функциональнай ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e_k(x)$ абсолютно сходится почти всюду на Ω и

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} |a_k e_k(x)| \right\| \leq C\sqrt{L\Lambda}.$$

Замечание. Условия теорем 1 и 2 показывают, что эти теоремы дополняют друг друга и не могут быть усилены.

Условие сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}$ может быть существенно ослаблено, если ограничиться рассмотрением орторекурсивных разложений, сходящихся по норме к разлагаемой функции (что имеет место, в частности, для полных ортонормированных систем). Более конкретно, получена следующая теорема.

Теорема 3. *Если орторекурсивное разложение функции* $f(x) \in L^2(\Omega)$ *по последовательности нормированных функций* $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *сходится к* $f(x)$ *в* $L^2(\Omega)$ *и сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}_k|^2 \log_2^2(k+1),$$

то орторекурсивное разложение $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \hat{f}_k e_k(x)$ *сходится к* $f(x)$ *почти всюду на* Ω.

Таким образом, для орторекурсивных разложений по последовательности нормированных функций, сходящихся по норме к разлагаемой функции, множителем Вейля является, как и для ортонормированных систем (см. [5, Гл. 9]), последовательность $\lambda_k = \log_2^2(k+1)$. Это усиление результата из [7], где было доказано, что для орторекурсивных разложений, сходящихся по норме к разлагаемой функции, множителем Вейля является последовательность $\lambda_k = \sqrt{k}$. Улучшить теорему 3 нельзя, так как окончательность множителя Вейля $\log_2^2(k+1)$ установлена даже для ортонормированных систем (см. в [3] и [5, гл. 9, § 1]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Лукашенко Т. П.* Об орторекурсивных разложениях по системе Фабера–Шаудера // Тез. докл. 10-й Саратовской зимней школы “ Современные проблемы теории функций и их приложения”, Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 2000. С. 83.

[2] *Лукашенко Т. П.* О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2001. № 1. С. 6–10.

[3] *Menchoff D.* Sur les séries de fonctions ortogonales // Fund. Math. 1923. Vol. 4. P. 82–105.

[4] *Rademacher H.* Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen // Math. Annalen. 1922. Vol. 87. P. 111–138.

[5] *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М. : издательство АФЦ, 1999. 550 с.

[6] *Галатенко В. В., Лукашенко Т. П., Садовничий В. А.* Об условии сходимости почти всюду функционального ряда со слабым аналогом свойства ортонормированности // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2016. № 2. С. 18–24.

[7] *Galatenko V. V., Lukashenko T. P., Sadovnichiy V. A.* Convergence Almost Everywhere of Orthorecursive Expansions in Functional Systems // Advances in Dynamical Systems and Control. Studies in Systems, Decision and Control. V. 69. Springer International Publishing Switzerland, 2016. P. 3–11.

[8] *Галатенко В. В., Лукашенко Т. П., Садовничий В. А.* Об условии сходимости почти всюду орторекурсивных разложений // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2016. № 5. С. 20–25.