УДК 517.538

Об аппроксимативных свойствах рядов Фурье по полиномам Якоби – Соболева[1]

Р. М. Гаджимирзаев (Махачкала, Россия)

ramis3004@gmail.com

Рассматривается задача о приближении функции f из пространства W^r частичными суммами ряда Фурье по системе полиномов Якоби $\{P_n^{\alpha-r,-r}(x)\}_{n=0}^{\infty}$, ортогональной относительно скалярного произведения типа Соболева. Основное внимание уделено получению оценки сверху для функции типа Лебега частичных сумм ряда Фурье по системе $\{P_n^{\alpha-r,-r}(x)\}_{n=0}^{\infty}$.

Ключевые слова: полиномы Якоби, ряды Фурье, скалярное произведение типа Соболева, функция Лебега.

On the approximation properties of the Fourier series by the Jacobi – Sobolev polynomials[1]

R. M. Gadzhimirzaev (Makhachkala, Russia)

ramis3004@gmail.com

We consider the problem of approximating a function f from the space W^r by partial sums of the Fourier series by the system of Jacobi polynomials $\{P_n^{\alpha-r,-r}(x)\}_{n=0}^{\infty}$, orthogonal with respect to the Sobolev-type inner product. Upper bounds are obtained for the Lebesgue-type function of partial sums of the Fourier series by the system $\{P_n^{\alpha-r,-r}(x)\}_{n=0}^{\infty}$.

Keywords: Jacobi polynomials, Fourier series, Sobolev type inner product, Lebesgue function.

Введение

Пусть $-1 < \alpha$ – нецелое, $\rho(x) = (1-x)^{\alpha}$, L^2_{ρ} – весовое пространство Лебега, состоящее из измеримых на $[-1,1]$ функций f, для которых

$$\int_{-1}^{1} f^2(x)\rho(x)dx < \infty.$$

Для $r \in \mathbb{N}$ через $W^r_{L^2_\rho}$ обозначим пространство функций f, непрерывно дифференцируемых $r-1$ раз, причем $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна на $[-1,1]$, а $f^{(r)} \in L^2_\rho$, W^r – класс r раз непрерывно дифференцируемых функций f, заданных на $[-1,1]$ и для которых $|f^{(r)}| \le 1$. Для $f, g \in W^r_{L^2_\rho}$

определим скалярное произведение Соболева следующего вида

$$\langle f,g\rangle_S=\sum_{\nu=0}^{r-1}f^{(\nu)}(-1)g^{(\nu)}(-1)+\int\limits_{-1}^{1}f^{(r)}(x)g^{(r)}(x)\rho(x)dx. \qquad (1)$$

Рассмотрим систему полиномов

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}\frac{(x+1)^n}{n!}, & 0\le n\le r-1\\ \frac{2^r}{(n+\alpha-r)^{[r]}\sqrt{h_{n-r}^{\alpha,0}}}P_n^{\alpha-r,-r}(x), & r\le n,\end{cases} \qquad (2)$$

где $P_n^{\alpha-r,-r}(x)$ – полином Якоби степени n. В работе [1] было показано, что система (2) полна в $W^r_{L^2_\rho}$ и ортонормирована относительно скалярного произведения (1). Ряд Фурье по этой системе имеет следующий вид

$$f(x)=\sum_{k=0}^{r-1}\frac{f^{(k)}(-1)}{k!}(x+1)^k+\sum_{k=r}^{\infty}\frac{2^r\widehat{f}_kP_k^{\alpha-r,-r}(x)}{\sqrt{h_{k-r}^{\alpha,0}}(k+\alpha-r)^{[r]}}, \qquad (3)$$

где

$$\widehat{f}_k=\langle f,\varphi_k\rangle_S=\int\limits_{-1}^{1}f^{(r)}(t)\frac{P_{k-r}^{\alpha,0}(t)}{\sqrt{h_{k-r}^{\alpha,0}}}(1-t)^\alpha dt,\quad k\ge r.$$

Через $S_{n+2r}^\alpha(f)=S_{n+2r}^\alpha(f,x)$ обозначим частичную сумму ряда (3):

$$S_{n+2r}^\alpha(f)=\sum_{k=0}^{r-1}\frac{f^{(k)}(-1)}{k!}(x+1)^k+\sum_{k=r}^{n+2r}\frac{2^r\widehat{f}_kP_k^{\alpha-r,-r}(x)}{\sqrt{h_{k-r}^{\alpha,0}}(k+\alpha-r)^{[r]}}.$$

В той же работе были исследованы аппроксимативные свойства сумм $S_{n+2r}^\alpha(f)$ для функций из пространства W^r. В частности была доказана следующая (см. [1, теорема 4])

Теорема A. *Пусть* $-1<\alpha$ *– нецелое,* $r\in\mathbb{N}$, $f\in W^r$. *Тогда*

$$|f(x)-S_{n+2r}^\alpha(f)|\le c(r)\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n+2r}\right)^r\omega\left(f^{(r)},\frac{\sqrt{1-x^2}}{n+2r}\right)+$$
$$c(r)\left[\omega\left(f^{(r)},\frac{1}{n+2r}\right)\frac{I_{r,n}^\alpha(x)}{(n+2r)^r}+\omega\left(f^{(r)},\frac{1}{(n+2r)^2}\right)J_{r,n}^\alpha(x)\right], \qquad (4)$$

где

$$I_{r,n}^\alpha(x)=(1+x)^r\int\limits_{-1}^{1-1/n^2}(1-t)^{\alpha-\frac{r}{2}}(1+t)^{\frac{r}{2}}|K_{n+r}^{\alpha-r,r}(x,t)|dt, \qquad (5)$$

$$J_{r,n}^{\alpha}(x) = (1+x)^r \int\limits_{1-1/n^2}^{1} (1-t)^{\alpha} |K_{n+r}^{\alpha-r,r}(x,t)| dt, \tag{6}$$

$$\omega(g,\delta) = \sup_{x,t\in[-1,1],|x-t|\le\delta} |f(x)-f(t)|.$$

В связи с неравенством (4) возникает задача об оценке величин $I_{r,n}^{\alpha}(x)$ и $J_{r,n}^{\alpha}(x)$, определенных равенствами (5) и (6) соответственно. Основными результатами настоящей работы являются теоремы **1** и **2**, в которых получены оценки сверху для $I_{r,n}^{\alpha}(x)$, $J_{r,n}^{\alpha}(x)$ при $x \in (-1,1)$.

Основной результат

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть $r-1<\alpha$ – нецелое, $x\in(-1,1)$. Тогда для величины $I_{r,n}^{\alpha}(x)$ справедливы следующие оценки:*

1) если $x\in\left[0,1-\frac{1}{2n^2}\right]$, то

$$I_{r,n}^{\alpha}(x) \le c(\alpha,r)(1-x)^{\frac{r}{2}}\left[\ln(n\sqrt{1-x}+1)+(1-x)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}+1\right];$$

2) если $x\in\left(1-\frac{1}{2n^2},1\right)$, то

$$I_{r,n}^{\alpha}(x) \le c(\alpha,r)\begin{cases}1, & \alpha\le r-\frac{1}{2},\\ (1-x)^{\frac{r-\alpha}{2}-\frac{1}{4}}, & \alpha>r-\frac{1}{2};\end{cases}$$

3) если $x\in\left[-1+\frac{1}{2n^2},0\right)$, то

$$I_{r,n}^{\alpha}(x) \le c(\alpha,r)(1+x)^{\frac{r}{2}}\left(\ln(n\sqrt{1+x}+1)+(1+x)^{-\frac{1}{4}}+1\right);$$

4) если $x\in\left(-1,-1+\frac{1}{2n^2}\right)$, то

$$I_{r,n}^{\alpha}(x) \le c(\alpha,r)(1+x)^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}.$$

Теорема 2. *Пусть $r-1<\alpha$ – нецелое, $x\in(-1,1)$. Тогда для величины $J_{r,n}^{\alpha}(x)$ справедливы следующие оценки:*

1) если $x\in\left(1-\frac{2}{n^2},1\right)$, то

$$J_{r,n}^{\alpha}(x) \le \frac{c(\alpha,r)}{n^{2r}};$$

2) если $x \in \left[0, 1 - \frac{2}{n^2}\right]$, *то*

$$J_{r,n}^{\alpha}(x) \le c(\alpha, r) \frac{(1-x)^{\frac{r-\alpha}{2} - \frac{3}{4}}}{n^{r+\alpha+\frac{3}{2}}};$$

3) если $x \in (-1, 0)$, *то*

$$J_{r,n}^{\alpha}(x) \le c(\alpha, r) \frac{(1+x)^{\frac{r}{2} - \frac{1}{4}}}{n^{r+\alpha+\frac{3}{2}}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Шарапудинов И. И.* Аппроксимативные свойства рядов Фурье по многочленам, ортогональным по Соболеву с весом Якоби и дискретными массами // Математические заметки. 2017. Т. 101, № 4. С. 611–629.