УДК 517.95

Условия квазинильпотентности полугруппы переноса на полуоси[1]

Ву Нгуен Шон Тунг (Ханой, Вьетнам)
vnsontung@mail.ru

Рассматривается оператор переноса на полуоси в весовом банаховом пространстве типа L^p. Указаны общие условия на выбор весовой функции и на коэффициент поглощения в операторе переноса, при которых порожденная полугруппа оказывается квазинильпотентной (суперустойчивой).

Ключевые слова: оператор переноса, квазинильпотентная полугруппа, весовое банахово пространство.

Superstability conditions for transport semigroup on the semiaxis[1]

Vu Nguyen Son Tung (Hanoi, Vietnam)
vnsontung@mail.ru

Transport operator on the semiaxis is studied in a weighted Banach space of L^p-type. We give general conditions for a choice of a weight function and for an absorption coefficient, for which a generated transport semigroup turns out to be superstable.

Keywords: transport operator, superstable semigroup, weighted Banach space.

Используем стандартные понятия теории полугрупп (см. [1]–[3]). Обсудим условия, при которых оператор вида

$$A \equiv -\frac{d}{dx} - a(x), \qquad x \in [0, +\infty), \tag{1}$$

т. е. оператор переноса с поглощением на полуоси, будет порождать *суперустойчивую* (или, что то же самое, *квазинильпотентную*) полугруппу $U(t)$ класса C_0 в весовом банаховом пространстве типа L^p. В таком случае (см. [4]–[7]) экспоненциальный тип ω_0 полугруппы $U(t)$ равен $(-\infty)$, а спектр производящего оператора A является пустым.

Отметим, что первые исследования по теме — для класса операторов вида (1) — проведены нами в работе [8]. Затем, в работе [9], теория была доведена до конца. Сейчас мы коротко представим соответствующие результаты из [9]. Помимо прочего, их можно использовать в различных нелокальных и обратных задачах, связанных с теорией переноса. Общие постановки подобных задач см. в [9]–[11].

Рассмотрим на полуоси $\mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty)$ в весовом банаховом пространстве $E \equiv L^p\big(\mathbb{R}_+;\ e^{-\nu(x)}\,dx\big)$ с нормой

$$\|h\| = \|h\|_{p,\nu} \equiv \left(\int\limits_0^{+\infty} |h(x)|^p\, e^{-\nu(x)}\, dx \right)^{1/p}, \qquad h \in E,$$

дифференциальный оператор A из формулы (1). Функции $a(x)$ и $\nu(x)$, а также конечное значение $p \geqslant 1$ считаем заданными.

Оператор переноса A с областью определения

$$D(A) = \{\, h \in AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)\colon \quad h \in E, \quad Ah \in E, \quad h(0) = 0 \,\}$$

порождает полугруппу $U(t)$, действующую на элемент $h \in E$ по правилу

$$U(t)h(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ h(x-t)\exp\left(-\int\limits_0^t a(x-s)\, ds \right), & t < x < +\infty. \end{cases} \tag{2}$$

Напомним, что $AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ — множество локально абсолютно непрерывных функций на $\mathbb{R}_+$.

Укажем естественные ограничения на весовой показатель $\nu(x)$ и коэффициент $a(x)$, при которых полугруппа (2) является суперустойчивой (квазинильпотентной) в E. Речь идет о полугруппах класса C_0.

Теорема 1. *Пусть $\nu(x)$ — измеримая, неотрицательная, супераддитивная функция на $\mathbb{R}_+$, причем*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\nu(x)}{x} = +\infty. \tag{3}$$

Тогда для любой измеримой, неотрицательной, локально ограниченной функции $a(x)$ на $\mathbb{R}_+$ полугруппа (2) будет суперустойчивой в пространстве $L^p\big(\mathbb{R}_+;\ e^{-\nu(x)}\,dx\big)$. В частности, подходит выбор $a(x) \equiv 0$.

Обратим внимание на сочетание важного требования (3) и того, что функция $\nu(x)$ должна быть *супераддитивной* на $\mathbb{R}_+$. Последнее означает (см. [12]), что

$$\nu(x_1 + x_2) \geqslant \nu(x_1) + \nu(x_2), \qquad \forall\, x_1, x_2 \geqslant 0. \tag{4}$$

Условие (4) заведомо выполнено, если $\nu(x) = x\,\nu_0(x)$ с неотрицательной, монотонно возрастающей на $\mathbb{R}_+$ функцией $\nu_0(x)$. Но есть и примеры, где такое представление невозможно (см. [9]). В любом случае под действие теоремы 1 попадают стандартные показатели вида $\nu(x) = x^\alpha$ при $\alpha > 1$, или $\nu(x) = x\, \ln_+ x$, или $\nu(x) = x\, \ln_+ \ln_+ x$ и так далее.

Имеется возможность избежать существенных ограничений на $\nu(x)$ при соответствующем выборе коэффициента $a(x)$.

Теорема 2. *Пусть $a(x)$ — измеримая, неотрицательная, локально ограниченная функция на $\mathbb{R}_+$, причем*

$$\lim_{x\to+\infty} a(x) = +\infty. \tag{5}$$

Тогда при любом выборе неотрицательной, монотонно неубывающей функции $\nu(x)$ на $\mathbb{R}_+$ полугруппа (2) будет суперустойчивой в пространстве $L^p\big(\mathbb{R}_+;\ e^{-\nu(x)}\,dx\big)$. В частности, подходит выбор $\nu(x)\equiv 0$.

При доказательстве теоремы 2 снова используются соображения супераддитивности (см. [9]), действующие для функции

$$\Phi(x) = \int\limits_0^x \inf_{\tau\in[s,+\infty)} a(\tau)\,ds, \quad x\geqslant 0,$$

связанной с коэффициентом $a(x)$. Основное условие (5) существенно для нашего результата. Несмотря на свой ограничительный характер, оно применимо к большому числу примеров типа $a(x) = x^\beta$ при $\beta > 0$, или $a(x) = \ln_+ x$, или $a(x) = |x-1|^{1/2}$ и так далее.

В качестве простого приложения изложенной теории укажем нелокальную задачу

$$\begin{cases} u_t + u_x + a(x)u = 0, \\ u(0,t) = 0, \\ \int\limits_0^T \eta(t)u(x,t)\,dt = u_1(x), \end{cases} \tag{6}$$

с неизвестной функцией $u = u(x,t)$ на полуоси $x\in\mathbb{R}_+$ при $t\in[0,T]$. Функцию $u_1(x)$ считаем заданной. Пусть коэффициент $a(x)\geqslant 0$ выбран в согласии с теоремой 2. Тогда, как следует из результатов [9], задача (6) будет корректно разрешимой в пространстве $L^p(\mathbb{R}_+)$ с $p\in[1,+\infty)$ при любом выборе весовой функции $\eta\in BV[0,T]$, такой, что $\eta(0+0)\neq 0$. Более того, начальное состояние $u(x,0) = u_0(x)$ решения $u = u(x,t)$ конструктивно восстанавливается методом итераций.

Автор искренне благодарен И. В. Тихонову за постановку задачи и поддержку в исследовании.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.

[2] *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. N.Y.: Springer-Verlag, 1983. viii+280 p.

[3] *Engel K.-J., Nagel R.* One-parameter semigroups for linear evolution equations. N.Y.: Springer-Verlag, 2000. xxii+586 p.

[4] *Sinclair A. M.* Continuous semigroups in Banach algebras. Cambridge: Cambridge University Press, 1982. vi+146 p.

[5] *Balakrishnan A. V.* On superstability of semigroups // In: M.P. Polis et al (eds.). Systems modelling and optimization. Proceedings of the 18th IFIP Conference on System Modelling and Optimization. CRC Research Notes in Mathematics. Chapman and Hall, 1999. P. 12–19.

[6] *Balakrishnan A. V.* Superstability of systems // Applied Mathematics and Computation. 2005. Vol. 164, № 2. P. 321–326.

[7] *Neubrander F., Hart L.* Superstability of semiroups // Pre-print. 2018. P. 1–9. URL: https://people.math.gatech.edu/ lhart31/main12.pdf.

[8] *Ву Нгуен Шон Тунг.* Специальные примеры суперустойчивых полугрупп и их применение в теории обратных задач // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 3. С. 252–262.

[9] *Тихонов И. В., Ву Нгуен Шон Тунг.* Разрешимость нелокальной задачи для эволюционного уравнения с суперустойчивой полугруппой // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56, № 4. С. 490–510.

[10] *Тихонов И. В., Ву Нгуен Шон Тунг.* Разрешимость линейной обратной задачи для эволюционного уравнения с суперустойчивой полугруппой // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. 2018. Т. 26, № 2. С. 103–118.

[11] *Люлько Н. А.* Обратная задача с финальным переопределением для сверхустойчивой гиперболической системы // Марчуковские научные чтения 2019: труды конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики». Новосибирск: ИВМиМГ СОРАН, 2019. С. 305–311.

[12] *Bruckner A., Ostrow E.* Some function classes related to the class of convex functions // Pacific Journal of Mathematics. 1962. Vol. 12. № 4. P. 1203–1215.