УДК 517.518

Абсолютная сходимость рядов по мультипликативным системам и приближение в равномерной метрике[1]

С. С. Волосивец, А. Н. Мингачев (Саратов, Россия)
VolosivetsSS@mail.ru

Мы доказываем оценки для остатка $\rho_n(f)$ ряда из модулей коэффициентов Фурье функции f по мультипликативной системе при условии что наилучшие равномерные приближения f не превосходят заданных мажорант. Также мы рассматриваем двойственную задачу.

Ключевые слова: абсолютная сходимость, мультипликативная система, наилучшее приближение, равномерная метрика.

Благодарности: работа первого автора выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках выполнения государственного задания (проект № FSRR-2020-0006).

Absolute convergence of series with respect to multiplicative systems and approximation in uniform metric[1]

S. S. Volosivets, A. N. Mingachev (Saratov, Russia)
VolosivetsSS@mail.ru

We prove estimates for the remainder $\rho_n(f)$ of series of modules of Fourier coefficients of a function f with respect to multiplicative system if uniform best approximations of f does not exceed given majorants. Also, we consider a dual problem.

Keywords: absolute convergence, multiplicative systems, best approximation, uniform metric.

Acknowledgements: the work of the first author was supported by the Ministry of science and education of the Russian Federation in the framework of the basic part of the scientific research state task, project FSRR-2020-0006).

Введение

Пусть $\mathbf{P}=\{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, такая что $2 \le p_j \le N$ при всех $j \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}_j = \{0, 1, \dots, p_j - 1\}$. Определим последовательность $\{m_j\}_{j=0}^{\infty}$ следующим образом: $m_0 = 1$, $m_n = m_{n-1}p_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда любое число $x \in [0, 1)$ представимо в виде

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j m_j^{-1}, \ x_j \in \mathbb{Z}_j, \tag{1}$$

а каждое $k \in \mathbb{Z}_+$ однозначно представимо в виде

$$k = \sum_{j=1}^{\infty} k_j m_{j-1}, \ k_j \in \mathbb{Z}_j. \tag{2}$$

Разложение (1) также однозначно, если при $x = s/m_n$, $0 < s < m_n$, $s \in \mathbb{Z}$, брать конечное число ненулевых x_j.

Для чисел $x \in [0, 1)$ и $k \in \mathbb{Z}_+$ с разложениями (1), (2) положим по определению $\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j k_j / p_j\right)\right)$. Система функций $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ называется мультипликативной системой. Известно, что она ортонормирована и полна в $L^1[0, 1)$ (см. [1, гл. 1,§ 1.5]). Легко видеть, что при $0 \le n < m_k$ функция $\chi_n(x)$ постоянна на $I_j^k = [(j-1)/m_k, j/m_k)$, $1 \le j \le m_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Для $f \in L^1[0, 1)$ коэффициенты Фурье и частичная сумма Фурье по системе $\{\chi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ задаются формулами

$$\widehat{f}(j) = \int\limits_0^1 f(t)\overline{\chi_j(t)}\, dt, \ j \in \mathbb{Z}_+, \quad S_n(f)(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \widehat{f}(j)\chi_j(x), \ n \in \mathbb{N}.$$

Через $C^*[0, 1)$ обозначим замыкание множества полиномов по системе $\{\chi_i\}_{i=0}^{\infty}$ в равномерной норме $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1)} |f(x)|$. Как обычно, пространство $L^p[0, 1)$, $1 \le p < \infty$, снабжено нормой $\|f\|_p = \left(\int\limits_0^1 |f(t)|^p\, dt\right)^{1/p}$.

Пусть $\mathcal{P}_n = \{f \in L^1[0, 1) : \widehat{f}(i) = 0, i \ge n\}$, $n \in \mathbb{N}$, тогда определим наилучшее приближение для $f \in L^p[0, 1)$, $1 \le p < \infty$, формулой $E_n(f)_p = \inf\{\|f - Q\|_p : Q \in \mathcal{P}_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Аналогично определяется $E_n(f)_\infty$ для $f \in C^*[0, 1)$.

Для убывающей к нулю последовательности $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ будем писать $f \in E(\varepsilon)$, если $\|f\|_\infty \le \varepsilon_0$ и $E_n(f)_\infty \le \varepsilon_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Для убывающей к нулю последовательности $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ рассмотрим

$$A(\lambda) = \{f \in C^*[0, 1) : \rho_n(f) := \sum_{k=n}^{\infty} |\widehat{f}(k)| \le \lambda_n, n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Будем использовать также средние Валле-Пуссена $v_n(f) = n^{-1} \sum\limits_{k=n+1}^{2n} S_k(f)$.

Будем писать $A_n \asymp B_n$, $n \in \mathbb{N}$, если существуют постоянные $C_1, C_2 > 0$, такие что $C_1 A_n \le B_n \le C_2 A_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Формулы, теоремы

Лемма 1 установлена в [2].

Лемма 1. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $Q_n \in \mathcal{P}_{m_n}$, такой что 1) $\|Q_n\|_\infty \le C m_n^{1/2}$; 2) $\sum\limits_{k=0}^{m_n-1} |\widehat{Q_n}(k)| \ge m_n$.*

Лемма 2 доказывается аналогично теореме 4.23 из [3, гл. 4, § 10].

Лемма 2. *$f \in C^*[0,1)$ $\|f - v_n(f)\|_\infty \le C E_n(f)_\infty$, $n \in \mathbb{N}$.*

Теорема 1. *Пусть $f \in C^*[0,1)$ и сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} E_n(f)_\infty$. Тогда величина $\rho_n(f) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} |\widehat{f}(k)|$ удовлетворяет неравенству*

$$\rho_n(f) \le C \left(n^{1/2} E_n(f)_\infty + \sum_{k=n}^{\infty} k^{-1/2} E_k(f)_\infty \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 2. *Пусть последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ убывает к нулю, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} \varepsilon_n$ сходится и последовательность $\{n^\beta \varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ не убывает для некоторого $\beta > 0$. Тогда*

$$\sup\{\rho_n(f) : f \in E(\varepsilon)\} \asymp \sum_{k=n}^{\infty} k^{-1/2} \varepsilon_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 3. *Пусть $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ убывает к нулю и удовлетворяет Δ_2-условию $\lambda_n \le C \lambda_{2n}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда справедливо соотношение*

$$\sup\{E_n(f)_\infty : f \in A(\lambda)\} \asymp \lambda_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Начнем с очевидного неравенства

$$E_n(f)_\infty \le \|f - S_n(f)\|_\infty \le \sum_{k=n}^{\infty} |\widehat{f}(k) \chi_k(x)| \le \rho_n(f) \le \lambda_n$$

для $f \in A(\lambda)$. С другой стороны, пусть $a_n = \lambda_n - \lambda_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда для функции $h(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x)$ находим, что

$$\rho_n(h)_\infty = \sum_{k=n}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=n}^{\infty} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) = \lambda_n, n \in \mathbb{N},$$

и $\rho_0(h) = \lambda - 1 \le \lambda_0$, то есть $h \in A(\lambda)$. В силу леммы 2 и почти очевидного равенства $\|\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k \chi_k\|_\infty = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ при $b_k \ge 0$, получаем

$$E_n(h)_\infty \ge C_1 \|h - v_n(h)\|_\infty = C_1 \left(\sum_{k=n+1}^{2n-1} \frac{k-n}{n} a_k + \sum_{k=2n}^{\infty} a_k \right) \ge$$

$$\ge C_1 \sum_{k=2n}^{\infty} a_k = C_1 \lambda_{2n} \ge C_2 \lambda_n.$$

Таким образом, соотношение результат теоремы установлен.

Отметим, что близкие вопросы для тригонометрических рядов рассматривались Н. А. Ильясовым [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М. : Наука, 1987. 344 с.

[2] *Волосивец С. С.* Сходимость рядов Фурье по мультипликативным системам и p-флуктуационный модуль непрерывности // Сиб. матем. журнал. 2006. Т. 47, № 2. С. 241–258.

[3] *Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку : Элм, 1981. 180 с.

[4] *Ильясов Н. А.* Прямая и обратная теоремы в теории абсолютно сходящихся рядов Фурье непрерывных периодических функций // Известия Уральского государственного университета. Математика и Механика. Компьютерные науки. 2006. Т. 44, № 1. С. 89–112.