УДК 517.518

Двойные косинус- и косинус-синус преобразования Фурье и обобщенные классы Липшица в равномерной метрике[1]

С. С. Волосивец, Ю. И. Кротова (Саратов, Россия)
VolosivetsSS@mail.ru

Мы доказываем критерии принадлежности двойных косинус-преобразования Фурье и косинус-синус-преобразования Фурье интегрируемой функции обобщенным классам Липшица в терминах поведения указанной выше функции.

Ключевые слова: двойное косинус-преобразование Фурье, двойное косинус-синус преобразование Фурье, смешанная разность, обобщенные классы Липшица, слабая монотонность.

Благодарности: работа первого автора выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках выполнения государственного задания (проект № FSRR-2020-0006).

Double cosine and cosine-sine Fourier transforms and general Lipschitz classes in uniform metric[1]

S. S. Volosivets, Yu. I. Krotova (Saratov, Russia)
VolosivetsSS@mail.ru

We prove criterions for double cosine or cosine-sine transforms of an integrable function to belong generalized Lipschitz classes in terms of behaviour of indicated above function.

Keywords: double cosine Fourier transform, double sine Fourier transform, mixed difference, generalized Lipschitz classes, weak monotonicity.

Acknowledgements: the work of the first author was supported by the Ministry of science and education of the Russian Federation in the framework of the basic part of the scientific research state task, project FSRR-2020-0006).

Введение

Пусть функция $f : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{C}$ интегрируема по Лебегу на $\mathbb{R}_+^2$, т.е. $f \in L^1(\mathbb{R}_+^2)$. Тогда двойные косинус- и косинус-синус-преобразования Фурье определяются равенствами

$$\widehat{f}_{cc}(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty f(u,v)\cos ux \cos vy \, du\, dv,$$

$$\widehat{f}_{cs}(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty f(u,v)\cos ux \sin vy \, du\, dv.$$

В одномерном случае см. [2]. Обе функции $\widehat{f}_{cc}(x,y)$ и $\widehat{f}_{cs}(x,y)$ равномерно непрерывны и стремятся к нулю, когда $\max(x,y)\to\infty$. Функцию $\widehat{f}_{cc}(x,y)$ можно рассматривать, как двойное комплексное преобразование Фурье продолженной четным образом по обеим переменным функции f, аналогично, хотя и более сложно можно определить $\widehat{f}_{cs}(x,y)$. Пусть

$$\dot{\triangle}^{m,n}_{t,\tau}f(x,y)=\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{j+k}\binom{m}{j}\binom{n}{k}f(x+(m-2j)\frac{t}{2},y+(n-2k)\frac{\tau}{2})$$

есть смешанная разность порядков $m,n\in\mathbb{N}$ с шагами t,τ функции f в точке (x,y). Рассмотрим класс $\Phi^{(2)}$ положительных на $\mathbb{R}^2_+\setminus\{(0,0)\}$ функций ω, для которых $\omega(0,0)=0$, $\omega(x_1,y_1)\le\omega(x_2,y_1)$, $\omega(x_1,y_1)\le\omega(x_1,y_2)$ при $x_2\ge x_1$, $y_2\ge y_1$, $x_i,y_i\in\mathbb{R}_+$, $i=1,2$.

Если $\omega\in\Phi^{(2)}$ такова, что

$$\int_0^u\int_0^v\frac{\omega(x,y)}{xy}\,dx\,dy=O(\omega(u,v)),\quad u,v>0,$$

то ω принадлежит классу BB. Если $m,n>0$ и $\omega\in\Phi^{(2)}$ такова, что

$$\int_u^\infty\int_v^\infty\frac{\omega(x,y)}{x^{m+1}y^{n+1}}\,dx\,dy\le C\frac{\omega(u,v)}{u^mv^n},$$

то будем писать $\omega\in B_mB_n$.

Для $m,n\in\mathbb{N}$ и $\omega\in\Phi^{(2)}$ по определению $f\in H^{m,n}(\omega)$, если для всех $\delta_1,\delta_2\ge0$ справедливо неравенство

$$\omega_{mn}(f,\delta_1,\delta_2)=\sup\{|\dot{\triangle}^{m,n}_{t,\tau}f(x,y)|:0\le t\le\delta_1,0\le\tau\le\delta_2\}\le C\omega(\delta_1,\delta_2),$$

где $x,y\in\mathbb{R}_+$. Рассмотрим также класс

$$h^{m,n}(\omega)=\{f\in H^{m,n}(\omega):\omega_{mn}(f,\delta_1,\delta_2)=o(\omega(\delta_1,\delta_2)),\delta_1,\delta_2\to0\}.$$

Основные результаты

Теорема 1. *а) Пусть $f:\mathbb{R}^2_+\to\mathbb{C}$ такова, что $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2_+)$. Если $m,n\in\mathbb{N}$, $\omega\in BB\cap\Delta_2$ и выполнено условие*

$$\int_0^t\int_0^s x^my^n|f(x,y)|\,dy\,dx=O(t^ms^n\omega(t^{-1},s^{-1})),\quad s,t\ge0,\tag{1}$$

то $\widehat{f}_{cc}\in H^{m,n}(\omega)$.

b) Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}_+$ такова, что $f \in L^1(\mathbb{R}^2_+)$. Если $\omega \in BB \cap \Delta_2$ и m, n являются четными, то из условия $\widehat{f}_{cc} \in H^{m,n}(\omega)$ вытекает, что (1) имеет место. Если же m или n нечетно и $\omega \in BB \cap B_m B_n$, то условие $\widehat{f}_{cc} \in H^{m,n}(\omega)$ также влечет (1).

Теорема 2. *a) Пусть $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{C}$ такова, что $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2_+)$. Если $m, n \in \mathbb{N}$, $\omega \in BB \cap \Delta_2$ и выполнено условие (1), то $\widehat{f}_{cs} \in H^{m,n}(\omega)$.*

b) Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}_+$ такова, что $f \in L^1(\mathbb{R}^2_+)$. Если $\omega \in BB \cap \Delta_2$ и m четно, а n нечетно, то из условия $\widehat{f}_{cs} \in H^{m,n}(\omega)$ вытекает, что (1) имеет место. Если же m нечетно или n четно и $\omega \in BB \cap B_m B_n$, то условие $\widehat{f}_{cs} \in H^{m,n}(\omega)$ также влечет (1).

Будем говорить, что $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}_+$ является слабо монотонно убывающей, если $Cf(x_1, y_1) \geq f(x, y)$ для всех $x_1 \in [x/2, x]$, $y_1 \in [y/2, y]$ (см. похожее одномерное определение в [2].

Теорема 3. *Пусть $f(x, y)$ является слабо монотонно убывающей функцией, $m, n \in \mathbb{N}$, $\omega \in BB \cap B_m B_n$, $f \in L^1(\mathbb{R}^2_+)$. Тогда условия*

a) $f(x, y) = O(x^{-1} y^{-1} \omega(x^{-1}, y^{-1}))$, $x, y > 0$;

b) $\widehat{f}_{cc} \in H^{m,n}(\omega)$;

c) $\widehat{f}_{cs} \in H^{m,n}(\omega)$;

являются эквивалентными.

Теорема 4. *a) Пусть $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{C}$ такова, что $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2_+)$. Если $m, n \in \mathbb{N}$, $\omega \in BB \cap \Delta_2$ и выполнено условия (1) и*

$$\int_0^t \int_0^s x^m y^n |f(x, y)| \, dy \, dx = o(t^m s^n \omega(t^{-1}, s^{-1})), \quad s, t \to \infty, \tag{2}$$

то $\widehat{f}_{cc} \in h^{m,n}(\omega)$.

b) Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}_+$ такова, что $f \in L^1(\mathbb{R}^2_+)$. Если $\omega \in BB \cap \Delta_2$ и m, n являются четными, то из условия $\widehat{f}_{cc} \in h^{m,n}(\omega)$ вытекает, что (2) имеет место. Если же m или n нечетно и $\omega \in BB \cap B_m B_n$, то условие $\widehat{f}_{cc} \in h^{m,n}(\omega)$ также влечет (2).

Аналог теоремы 4 верен для $\widehat{f}_{cs}$. Теорема 1 обобщает, а теорема 2 распространяет на случай $\widehat{f}_{cs}$ некоторые результаты В.Фюлоп и Ф.Морица [3], полученные для $\omega(\delta_1, \delta_2) = \delta_1^\alpha \delta_2^\beta$, $m = n = 1$ и $m = n = 2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М. : Гостехиздат, 1948. 420 с.

[2] *Lifltand E., Tikhonov S., Zeltser M.* Extending tests for convergence of number series // J. Math. Anal. Appl. 2011. Vol. 377, № 1. P. 194–206.

[3] *Fülöp V., Moricz F.* On double sine and cosine transforms, Lipschitz and Zygmund classes // Anal. Theory Appl. 2011. Vol. 27, № 4. P. 351–364.