УДК 517.518.224

Поперечники по Колмогорову весовых классов Соболева с ограничениями на нулевую и старшую производные[1]

А. А. Васильева (Москва, Российская Федерация)
vasilyeva_nastya@inbox.ru

Получены порядковые оценки поперечников весового класса Соболева на области, удовлетворяющей условию Джона. Класс задается ограничениями на производные порядка r в весовом пространстве L_{p_1} и на функцию в весовом пространстве L_{p_0}.

Ключевые слова: колмогоровские поперечники, пересечения функциональных классов, весовые пространства функций.

Kolmogorov widths of weighted Sobolev classes with conditions on the highest and zero derivatives[1]

A. A. Vasil'eva (Moscow, Russian Federation)
vasilyeva_nastya@inbox.ru

Order estimates for widths of a weighted Sobolev class on a John domain is obtained. The class is defined by conditions on the derivatives of order r in a weighted space L_{p_1} and on a function in a weighted space L_{p_0}.

Keywords: Kolmogorov widths, intersections of function classes, weighted function spaces.

Пусть X — нормированное пространство, $C \subset X$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Колмогоровским поперечником множества C в пространстве X называется величина

$$d_n(C,\, X) = \inf_{L\in\mathcal{L}_n} \sup_{x\in C} \inf_{y\in L} \|x-y\|,$$

где $\mathcal{L}_n$ — совокупность линейных подпространств в X размерности не выше n.

Обозначим через $B_a(x)$ евклидов шар радиуса a с центром в точке x.

Определение 1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область, $a > 0$. Скажем, что $\Omega \in \mathbf{FC}(a)$, если существует точка $x_* \in \Omega$ такая, что для любого $x \in \Omega$ существует число $T(x) > 0$ и кривая $\gamma_x : [0,\, T(x)] \to \Omega$ со следующими свойствами:

1. γ_x имеет натуральную параметризацию относительно евклидовой нормы на $\mathbb{R}^d$,

2. $\gamma_x(0) = x$, $\gamma_x(T(x)) = x_*$,

3. $B_{at}(\gamma_x(t)) \subset \Omega$ для любого $t \in [0,\, T(x)]$.

Скажем, что Ω удовлетворяет условию Джона, если $\Omega \in \mathbf{FC}(a)$ для некоторого $a > 0$.

Определение 1. [2] Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ — непустой компакт, $h : (0,\, 1] \to (0,\, \infty)$ — неубывающая функция. Скажем, что Γ является h-множеством, если существует константа $c_* \ge 1$ и конечная счетно-аддитивная мера μ на $\mathbb{R}^d$ такая, что $\operatorname{supp} \mu = \Gamma$ и

$$c_*^{-1} h(t) \le \mu(B_t(x)) \le c_* h(t)$$

для любых $x \in \Gamma$ и $t \in (0,\, 1]$.

В [2] изучалась задача об оценках поперечников $d_n(M,\, L_{q,v}(\Omega))$, где

$$M = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R},\ \ \left\| \frac{\nabla^r f}{g} \right\|_{L_{p_1}(\Omega)} \le 1,\ \ \|wf\|_{L_{p_0}(\Omega)} \le 1 \right\},$$

$$L_{q,v}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R},\ \|f\|_{L_{q,v}(\Omega)} := \|vf\|_{L_q(\Omega)} < \infty\}.$$

В частности, был рассмотрен пример, когда Ω — область, удовлетворяющая условию Джона, а веса имеют вид

$$g(x) = \operatorname{dist}^{-\beta}(x,\, \Gamma),\ \ w(x) = \operatorname{dist}^{-\sigma}(x,\, \Gamma),\ \ v(x) = \operatorname{dist}^{-\lambda}(x,\, \Gamma), \qquad (1)$$

где $\Gamma \subset \partial\Omega$ — h-множество,

$$h(t) = t^\theta, \quad 0 \le \theta < d. \qquad (2)$$

Порядковые оценки колмогоровских поперечников $d_n(M,\, L_{q,v}(\Omega))$ с весами, заданными (1)–(2), были получены при дополнительных условиях на параметры:

$$r + \frac{d}{q} - \frac{d}{p_1} > 0,\ \ r + \frac{d}{p_0} - \frac{d}{p_1} > 0,$$

$$\beta + \sigma - r - \frac{d}{p_0} + \frac{d}{p_1} > 0,\ \ \beta + \sigma - r - \frac{d-\theta}{p_0} + \frac{d-\theta}{p_1} > 0.$$

Остался неразобранным случай, когда хотя бы одно из этих неравенств не выполнено.

Здесь будут получены порядковые оценки поперечников в случае, когда $p_1 < q < p_0$, $r + \frac{d}{p_0} - \frac{d}{p_1} < 0$, $\beta + \sigma - r - \frac{d-\theta}{p_0} + \frac{d-\theta}{p_1} \ge 0$.

Теорема 1. *Пусть* $r, d \in \mathbb{N}$, $1 < p_1 < q < p_0 \le \infty$, $\Omega \subset \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^d$ — *область, удовлетворяющая условию Джона,* $\Gamma \subset \partial\Omega$ — h*-множество, веса* g, v *и* w *заданы (1)–(2). Положим*

$$\gamma_* = \theta, \quad s_* = \frac{r}{d}, \quad \mu_* = \beta + \lambda - r - \frac{d}{q} + \frac{d}{p_1}, \quad \alpha_* = \sigma - \lambda + \frac{d}{q} - \frac{d}{p_0},$$

$$\tilde{\theta} = s_* \frac{\alpha_* + \gamma_*/p_0 - \gamma_*/q}{\mu_* + \alpha_* + \gamma_*(s_* + 1/p_0 - 1/p_1)},$$

$$\hat{\sigma} = s_* \cdot \frac{\frac{1}{q} - \frac{1}{p_0}}{-s_* - \frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} + \frac{2s_*}{q}}.$$

Пусть $s_* + \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1} < 0$, $\mu_* + \alpha_* + \gamma_*/p_0 - \gamma_*/p_1 \ge 0$.

Определим $j_0 \in \mathbb{N}$, $\theta_j \in \mathbb{R}$ $(1 \le j \le j_0)$ *следующим образом.*

- *Если* $q \le 2$, *то* $j_0 = 2$, $\theta_1 = s_* \frac{1/q - 1/p_0}{1/p_1 - 1/p_0}$, $\theta_2 = \tilde{\theta}$.
- *Если* $q > 2$, $p_1 \le 2$, *то* $j_0 = 2$, $\theta_1 = \hat{\sigma}$, $\theta_2 = \tilde{\theta}$.
- *Если* $q > 2$, $p_1 > 2$, *то* $j_0 = 3$, $\theta_1 = s_*$, $\theta_2 = \hat{\sigma}$, $\theta_3 = \tilde{\theta}$.

Пусть существует $j_* \in \{1, \dots, j_0\}$ *такое, что* $\theta_{j_*} < \min_{j \ne j_*} \theta_j$, *при этом* $\theta_{j_*} > 0$. *Тогда*

$$d_n(M, L_{q,v}(\Omega)) \asymp n^{-\theta_{j_*}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Bricchi M.* Existence and properties of h-sets // Georgian Mathematical Journal. 2002. Vol. 9, № 1. P. 13–32.

[2] *Vasil'eva A. A.* Kolmogorov widths of weighted Sobolev classes on a multi-dimensional domain with conditions on the derivatives of order r and zero // J. Appr. Theory. 2021. Vol. 269. Article 105602, 34 pp.