УДК 517.95

Задача линейного сопряжения и интегральные преобразования[1]

А. В. Васильев (Москва, Россия), В. Б. Васильев (Белгород, Россия), Н. В. Эберлейн (Белгород, Россия)

alexvassel@gmail.com, vbv57@inbox.ru, eberlein92@mail.ru

В пространствах Соболева - Слободецкого изучается определенная задача сопряжения для эллиптического псевдодифференциального уравнения в плоском секторе. Используя волновую факторизацию для эллиптического символа с конкретным индексом, мы рассматриваем условия Дирихле и Неймана на сторонах сектора. Для частного случая мы сводим рассматриваемую краевую задачу к системе линейных алгебраических уравнений относительно 8 неизвестных функций.

Ключевые слова: эллиптический псевдодифференциальный оператор, задача сопряжения, условие разрешимости.

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № FZWG-2020-0029).

Linear conjugation problem and integral transforms[1]

A. V. Vasilyev (Moscow, Russia), V. B. Vasilyev (Belgorod, Russia), N. V. Eberlein (Belgorod, Russia)

alexvassel@gmail.com, vbv57@inbox.ru, eberlein92@mail.ru

A certain conjugation problem for an elliptic pseudo-differential equation in a plane sector is studied in Sobolev–Slobodetskii spaces. Using wave factorization for an elliptic symbol with concrete index we consider Dirichlet and Neumann conditions on sector sides. For a special case we reduce the considered boundary value problem to a system of linear algebraic equations with respect to 8 unknown functions.

Keywords: elliptic pseudo-differential operator, conjugation problem, solvability condition.

Acknowledgements: this work was supported by the Ministry of Higher Education and Science of Russia, (project No. FZWG-2020-0029).

Введение

В этой работе рассматривается одна задача сопряжения в плоском угле для простейших эллиптических псевдодифференциальных уравнений. В определенном смысле она является обобщением классической краевой задачи Римана для аналитических функций. Исследование опирается на метод волновой факторизации, развитый в [1], и приводит при некоторых дополнительных предположениях на символ оператора к критерию однозначной разрешимости поставленной задачи сопряжения. Используемый аппарат волновой факторизации с успехом применялся при постановке и исследовании других краевых задач для эллиптических псевдодифференциальных уравнений [2–5].

Постановка задачи

В пространстве Соболева–Слободецкого H^s рассматривается следующая задача: найти функцию

$$U(x) = \begin{cases} u_+(x), & x \in C_+^a \\ u_-(x), & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{C_+^a} \end{cases}$$

такую, что $u_+ \in H^s(C_+^a), v_- \in H^s(\mathbb{R}^2 \setminus C_+^a)$, удовлетворяющую уравнениям

$$\begin{cases} (Au_+)(x) = 0, & x \in C_+^a, \\ (Au_-)(x) = 0, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{C_+^a}, \end{cases} \tag{1}$$

где $C_+^a = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_2 > a|x_1|, \ a > 0\}, \Gamma = \partial C_+^a$, A – эллиптический псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$,

$$c_1 \leq |A(\xi)(1 + |\xi|)^{-\alpha}| \leq c_2.$$

К уравнениям (1) мы добавляем следующие граничные условия:

$$\theta \cdot u_{+}{}_{|\partial C_+^a} + \omega \cdot u_{-}{}_{|\partial C_+^a} = \mu, \quad \eta \cdot \left(\frac{\partial u_+}{\partial n}\right)_{|\partial C_+^a} + \gamma \cdot \left(\frac{\partial u_-}{\partial n}\right)_{|\partial C_+^a} = \nu, \tag{2}$$

где $\theta, \omega, \eta, \gamma$ – комплексные числа, принимающие различные значения на сторонах угла ∂C_+^a, $\mu \in H^{s-1/2}(\Gamma), \nu \in H^{s-3/2}(\Gamma)$– заданные на Γ функции..

Подобная задача рассматривалась в [2] при дополнительных предположениях относительно символа $A(\xi)$ и была сведена к некоторой системе одномерных интегральных уравнений, которую мы обозначим (X). Предполагалось, что символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию [1] относительно конуса C_+^a

$$A(\xi) = A_{\neq}(\xi) \cdot A_{=}(\xi)$$

с индексом æ таким, что æ $- s = 1 + \delta, |\delta| < 1/2$.

Мы приведем ниже описание терминов, использованных в постановке задачи.

Пространство Соболева–Слободецкого $H^s(\mathbb{R}^2)$ – это гильбертово пространство с нормой

$$||f||_s = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} |\tilde{f}(\xi)|^2 (1+|\xi|)^{2s} d\xi \right)^{1/2},$$

где $\tilde{f}$ обозначает преобразование Фурье

$$\tilde{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx.$$

Если $D \subset \mathbb{R}^2$ – область, то $H^s(D)$ – это подпространство $H^s(\mathbb{R}^2)$, состоящее из функций с носителями в $\overline{D}$.

Пусть $A(\xi)$ – измеримая функция, определенная на $\mathbb{R}^2$. Псевдодифференциальным операторои A в области D с символом $A(\xi)$ называется следующий оператор

$$(Au)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{ix\cdot\xi} A(\xi)\tilde{u}(\xi)d\xi, \quad x \in D.$$

Алгебраическое условие разрешимости

С помощью элементов волновой фвкторизации $A_{\neq}(\xi), A_{=}(\xi)$ строятся функции $b_j(t_{3-j}), B_j(t_{3-j}), j=1,2$. Использование преобразования Меллина позволяет получить следующую редукцию.

Теорема 1. *Пусть* $æ = \alpha/2$ *и сомножители* $A_{\neq}(\xi), A_{=}(\xi)$ *однородны степени* $\alpha/2$ *и дифференцируемы вне начала координат,* $b_j(t_{3-j}) \neq 0, B_j(t_{3-j}) \neq 0, j=1,2, \forall t_1, t_2 \neq 0$. *Тогда система линейных интегральных уравнений* (X) *эквивалентна системе линейных алгебраических уравнений* (3) *относительно неизвестных функций* $\hat{C}_k(\lambda), \hat{D}_k(\lambda), \hat{R}_k(\lambda), \hat{Q}_k(\lambda), k=1,2.$

Все коэффициенты системы (3) и правые части также вычисляются по элементам $A_{\neq}(\xi), A_{=}(\xi)$ и заданным граничным условиям. Если матрицу системы обозначить $\mathcal{A}(\lambda)$, то получается следующий критерий разрешимости задачи линейного сопряжения (1),(2).

Отметим, что априорные оценки решения могут быть получены по схеме, описанной в [1].

$$
\begin{cases}
\theta_1\hat{k}_{11}(\lambda)\hat{C}_1(\lambda)+\theta_1\hat{k}_{21}(\lambda)\hat{C}_2(\lambda)+\theta_1 l_{11}\hat{D}_1(\lambda)+\\
+\omega_1\hat{m}_{11}(\lambda)\hat{R}_1(\lambda)+\omega_1\hat{m}_{21}(\lambda)\hat{R}_2(\lambda)+\omega_1\hat{Q}_1(\lambda)=\hat{\mu}_{11}(\lambda)\\
\theta_1\hat{k}_{12}(\lambda)\hat{C}_1(\lambda)+\theta_1\hat{k}_{22}(\lambda)\hat{C}_2(\lambda)+\theta_1 l_{12}\hat{D}_2(\lambda)+\\
+\omega_1\hat{m}_{12}(\lambda)\hat{R}_1(\lambda)+\omega_1\hat{m}_{22}(\lambda)\hat{R}_2(\lambda)+\omega_1\hat{Q}_2(\lambda)=\hat{\mu}_{12}(\lambda)\\
\theta_2 l_{21}\hat{C}_1(\lambda)+\theta_2\hat{n}_{11}(\lambda)\hat{D}_1(\lambda)+\theta_2\hat{n}_{21}(\lambda)\hat{D}_2(\lambda)+\\
+\omega_2\hat{R}_1(\lambda)+\omega_2\hat{p}_{11}(\lambda)\hat{Q}_1(\lambda)+\omega_2\hat{p}_{21}(\lambda)\hat{Q}_2(\lambda)=\hat{\mu}_{21}(\lambda)\\
\theta_2 l_{22}\hat{C}_2(\lambda)+\theta_2\hat{n}_{12}(\lambda)\hat{D}_1(\lambda)+\theta_2\hat{n}_{22}(\lambda)\hat{D}_2(\lambda)+\\
+\omega_2\hat{R}_2(\lambda)+\omega_2\hat{p}_{12}(\lambda)\hat{Q}_1(\lambda)+\omega_2\hat{p}_{22}(\lambda)\hat{Q}_2(\lambda)=\hat{\mu}_{22}(\lambda)\\
\eta_1\hat{K}_{11}(\lambda)\hat{C}_1(\lambda)+\eta_1\hat{K}_{21}(\lambda)\hat{C}_2(\lambda)+\eta_1 L_{11}\hat{D}_1(\lambda)+\\
+\gamma_1\hat{M}_{11}(\lambda)\hat{R}_1(\lambda)+\gamma_1\hat{M}_{21}(\lambda)\hat{R}_2(\lambda)+\gamma_1\hat{Q}_1(\lambda)=\hat{\nu}_{11}(\lambda)\\
\eta_1\hat{K}_{12}(\lambda)\hat{C}_1(\lambda)+\eta_1\hat{K}_{22}(\lambda)\hat{C}_2(\lambda)+\eta_1 L_{12}\hat{D}_2(\lambda)+\\
+\gamma_1\hat{M}_{12}(\lambda)\hat{R}_1(\lambda)+\gamma_1\hat{M}_{22}(\lambda)\hat{R}_2(\lambda)+\gamma_1\hat{Q}_2(\lambda)=\hat{\nu}_{12}(\lambda)\\
\eta_2 L_{21}\hat{C}_1(\lambda)+\eta_2\hat{N}_{11}(\lambda)\hat{D}_1(\lambda)+\eta_2\hat{N}_{21}(\lambda)\hat{D}_2(\lambda)+\\
+\gamma_2\hat{R}_1(\lambda)+\gamma_2\hat{P}_{11}(\lambda)\hat{Q}_1(\lambda)+\gamma_2\hat{P}_{21}(\lambda)\hat{Q}_2(\lambda)=\hat{\nu}_{21}(\lambda)\\
\eta_2 L_{22}\hat{C}_2(\lambda)+\eta_2\hat{N}_{12}(\lambda)\hat{D}_1(\lambda)+\eta_2\hat{N}_{22}(\lambda)\hat{D}_2(\lambda)+\\
+\gamma_2\hat{R}_2(\lambda)+\gamma_2\hat{P}_{12}(\lambda)\hat{Q}_1(\lambda)+\gamma_2\hat{P}_{22}(\lambda)\hat{Q}_2(\lambda)=\hat{\nu}_{22}(\lambda)
\end{cases}
\tag{3}
$$

Теорема 2. *В предположениях Теоремы 1 условие*

$$inf|\det\mathcal{A}(\lambda)|>0, \quad \operatorname{Re}\lambda=1/2$$

является необходимым и достаточным для существования единственного решения задачи (1), (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Васильев В. Б.* Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. М. : КомКнига, 2010. 136 с.

[2] *Vasilyev V. B.* On some transmission problems in a plane corner // Tatra Mt. Math. Publ. 2015. Vol. 63. P. 291–301.

[3] *Vasilyev V. B.* Pseudo-differential equations, wave factorization, and related problems // Math. Meth. Appl. Sci. 2018. Vol. 41, № 18. P. 9252–9263.

[4] *Васильев В. Б.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений в многомерном конусе // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56, № 10. С. 1356–1365.

[5] *Vasilyev V. B.* On certain 3D limit boundary value problem // Lobachevskii J. Math. 2020, Vol. 41, № 5. P. 913–921.