УДК 517.95

Дискретная краевая задача с нелокальными граничными условиями[1]

А. В. Васильев (Москва, Россия), В. Б. Васильев (Белгород, Россия), А. А. Ходырева (Белгород, Россия)

alexvassel@gmail.com, vbv57@inbox.ru, anastasia.kho@yandex.ru

В работа рассматривается дискретное эллиптическое псевдодифференциальное уравнение в квадранте и связанная с ним дискретная краевая задача. Описаны условия разрешимости дискретной краевой задачи в дискретных аналогах пространств Соболева-Слободецкого. Дается сравнение дискретного решения с решением соответствующей континуальной краевой задачи в зависимости от параметра дискретизации.

Ключевые слова: дискретный псевдодифференциальный оператор, дискретная краевая задача, оценка погрешности.

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № FZWG-2020-0029).

Discrete boundary value problem with nonlocal boundary conditions[1]

A. V. Vasilyev (Moscow, Russia), V. B. Vasilyev (Belgorod, Russia), A. A. Khodyreva (Belgorod, Russia)

alexvassel@gmail.com, vbv57@inbox.ru, anastasia.kho@yandex.ru

The paper considers a discrete elliptic pseudodifferential equation in a quadrant and a discrete boundary value problem associated with it. The conditions of solvability of a discrete boundary value problem in discrete analogues of Sobolev-Slobodetsky spaces are described. The discrete solution is compared with the solution of the corresponding continuum boundary value problem depending on the discretization parameter.

Keywords: discrete pseudo-differential operator, discrete boundary value problem, error estimate.

Acknowledgements: this work was supported by the Ministry of Higher Education and Science of Russia, (project No. FZWG-2020-0029).

Введение

Авторы начали разработку дискретной теории псевдодифференциальных уравнений с сингулярных интегралов Кальдерона-Зигмунда [1, 3] как простейшего представления псевдодифференциальных операторов, постепенно переходя к модельным псевдодифференциальным операторам и уравнениям (пока в канонических областях) в дискретных пространствах $L_2(h\mathbb{Z}^m)$, $L_2(h\mathbb{Z}^m{}_+)$, $h > 0$, и сравнение дискретных и континуальных решений.

Оказалось, что картина разрешимости дискретных уравнений выглядит подобно континуальному случаю, и в случае стремления к нулю параметра дискретизации дискретные условия разрешимости переходят в свой континуальный аналог. Аналогичные исследования были проведены для более общих модельных псевдодифференциальных операторов в дискретных аналогах H^s-пространств [4, 5] со сравнением дискретных и непрерывных решений [6, 7].

В этой работе мы рассматриваем новую модельную область – квадрант в $\mathbb{R}^2$, выделяем дискретную краевую задачу и описываем ее условия разрешимости, а также даем сравнение дискретных и континуальных решений. Мы используем периодический аналог волновой факторизации [1] для описания разрешимости модельных псевдодифференциальных уравнений и постановки дискретных краевых задач. Всюду ниже предполагается, что такое специальное представление символа возможно.

Основные определения

Пусть $\mathbb{Z}^2$ – целочисленная решетка на плоскости. Обозначим $K = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), x_1 > 0, x_2 > 0\}$ первый квадрант на плоскости, $k_s = h\mathbb{Z}^2 \cap K, h > 0$. Введем пространство функций дискретного аргумента $u_d(\tilde{x}), \tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in h\mathbb{Z}^2$,, удовлетворяющих условию

Обозначим $\mathbb{T}^2$ квадрат $[-\pi, \pi]^2, h > 0, \hbar = h^{-1}$. Будем рассматривать функции, изначально заданные в квадрате, как периодические функции, определенные на всей плоскости $\mathbb{R}^m$ с основным квадратом периодов $\mathbb{T}^2$.

Для таких функций можно определить дискретное преобразование Фурье формулой

$$(F_d u_d)(\xi) \equiv \tilde{u}_d(\xi) = \sum_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^2} e^{-i\tilde{x}\cdot\xi} u_d(\tilde{x}) h^2, \quad \xi \in \hbar\mathbb{T}^2,$$

в случае сходимости такого ряда, и функция $\tilde{u}_d(\xi)$ будет периодической функций в $\mathbb{R}^2$ с основным квадратом периодов $\hbar\mathbb{T}^2$.

С помощью разделенных разностей и их дискретных преобразований Фурье мы определим дискретные пространства Соболева–Слободецкого для исследования разрешимости широкого класса дискретных уравнений. Вводится дискретный аналог пространства Шварца и обозначение

$$\zeta^2 = h^{-2}((e^{-ih\cdot\xi_1} - 1)^2 + (e^{-ih\cdot\xi_2} - 1)^2).$$

Определение 1. *Пространство $H^s(h\mathbb{Z}^2)$ состоит их дискретных (обобщенных) функций и является замыканием пространства $S(h\mathbb{Z}^2)$*

по норме

$$||u_d||_s = \left(\int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2} (1+|\zeta^2|)^s |\tilde{u}_d(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

Пространство $H^s(K_d)$ состоит их дискретных функций из пространства $H^s(h\mathbb{Z}^2)$, чьи носители содержатся в $\overline{K_d}$. Норма в пространстве $H^s(K_d)$ индуцируется нормой пространства $H^s(h\mathbb{Z}^2)$.

Если $\widetilde{A}_d(\xi)$ – измеримая периодическая функция в $\mathbb{R}^2$ с основным кубом периодов $\hbar\mathbb{T}^2$, мы называем ее символом.

Определение 2. *Дискретным псевдодифференциальным оператором A_d с символом $\widetilde{A}_d(\xi)$ в дискретном квадранте K_d называется оператор следующего вида*

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y}\in h\mathbb{Z}^2} h^2 \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2} \widetilde{A}_d(\xi) e^{i(\tilde{x}-\tilde{y})\cdot\xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x}\in K_d,$$

Говорят, что оператор A_d – эллиптический, если

$$ess \inf_{\xi\in\hbar\mathbb{T}^2} |\widetilde{A}_d(\xi)| > 0.$$

Мы будем рассматривать класс символов, удовлетворяющих условию

$$c_1(1+|\zeta^2|)^{\alpha/2} \leq |A_d(\xi)| \leq c_2(1+|\zeta^2|)^{\alpha/2}$$

с постоянными c_1, c_2, не зависящими от h.

Дискретные и непрерывные решения

Мы исследуем разрешимость дискретного уравнения

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = 0, \quad \tilde{x}\in K_d, \tag{1}$$

в пространстве $H^s(K_d)$ с граничными условиями

$$\sum_{\tilde{x}_1\in h\mathbb{Z}_+} u_d(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)h = f_d(\tilde{x}_2), \quad \sum_{\tilde{x}_2\in h\mathbb{Z}_+} u_d(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)h = g_d(\tilde{x}_1),$$
$$\sum_{\tilde{x}\in h\mathbb{Z}_{++}} u_d(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)h^2 = 0. \tag{2}$$

При наличии специальной периодической волновой факторизации символа $\widetilde{A}_d(\xi)$ с индексом æ, таким, что æ $- s = 1+\delta, |\delta| < 1/2$ можно отметить следующий факт.

Теорема 1. *Пусть* $f_d, g_d \in H^{s+1/2}(h\mathbb{Z})$. *Тогда дискретная краевая задача* (1),(2) *имеет единственное решение с априорной оценкой*

$$||u_d||_s \leq const(||f_d||_{s+1/2} + ||g_d||_{s+1/2})$$

с постоянной, не зависящей от h.

Континуальный аналог – это следующая краевая задача

$$(Au)(x) = 0, \quad x \in K, \tag{3}$$

$$\int\limits_0^{+\infty} u(x_1, x_2)dx_1 = f(x_2), \quad \int\limits_0^{+\infty} u(x_1, x_2)dx_2 = g(x_1), \quad \int\limits_K u(x)dx = 0. \tag{4}$$

где A – псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi), \xi = (\xi_1, \xi_2)$, удовлетворяющим условию

$$c_1(1 + |\xi|)^\alpha \leq |A(\xi)| \leq c_2(1 + |\xi|)^\alpha.$$

и допускающим волновую факторизацию относительно K с индексом æ, таким, что $æ - s = 1 + \delta, |\delta| < 1/2$. Специальный подбор дискретных функций f_d, g_d и элементов периодической волновой факторизации приводит к следующему результату.

Теорема 2. *Пусть* $f, g \in S(\mathbb{R}), æ > 1$. *Тогда справедлива следующая оценка для решений* u *и* u_d *континуальной задачи* (3),(4) *и ее дискретного аналога* (1),(2)

$$|u(\tilde{x}) - u_d(\tilde{x})| \leq C(f, g)h^\beta,$$

где постоянная $C(f, g)$ *зависит от функций* f, g, $\beta > 0$ *может быть произвольным.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Васильев А. В., Васильев В. Б.* Периодическая задача Римана и дискретные уравнения в свертках // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 5. С. 642–649.

[2] *Васильев В. Б.* Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. М. : КомКнига, 2010. 136 с.

[3] *Vasilyev A. V., Vasilyev V. B.* Discrete singular operators and equations in a half-space // Azerb. J. Math. 2013. Vol. 3, № 1. P. 81–93.

[4] *Vasilyev A. V., Vasilyev V. B.* Pseudo-differential operators and equations in a discrete half-space // Math. Model. Anal. 2018. Vol. 23, № 3. P. 492–506.

[5] *Vasilyev A. V., Vasilyev V. B.* On some discrete potential like operators // Tatra Mt. Math. Publ. 2018. Vol. 71. P. 195–212.

[6] *Васильев В. Б., Тарасова О. А.* О дискретных краевых задачах и их аппроксимационных свойствах. Итоги науки и техники. Современные математика и ее приложения // Тематические обзоры. 2020. Т. 174. С. 12–19.

[7] *Tarasova O. A., Vasilyev V. B.* To the theory of discrete boundary value problems // 4Open, 2019. 7pp.