УДК 517.537.32

О связи между нулями и тейлоровскими коэффициентами целой функции[1]

Г. Г. Брайчев (Москва, Россия)

braichev@mail.ru

В теории роста целых функций исторически сложились два направления. Первое связано с вычислением или оценками характеристик роста максимума модуля целой функции (порядок, тип и другие) через коэффициенты ее ряда Тейлора. В работах второго направления исследуется зависимость роста функции от распределения нулей. Цель сообщения — обсудить некоторые непосредственные, прямые связи между нулями и тейлоровскими коэффициентами целой функции, учитывая как классические, так и недавние достижения в рассматриваемой области.

Ключевые слова: нули целой функции, тейлоровские коэффициенты, спрямленные по Адамару коэффициенты.

On the connection between zeros and Taylor coefficients of entire function[1]

G. G. Braichev (Moscow, Russia)

braichev@mail.ru

Historically, two directions have developed in the growth theory of entire functions. The first one has to do with calculation or estimates for growth characteristics of the maximum modulus of an entire function (order, type, and others) in terms of the coefficients of its Taylor series. In works of the second direction, the dependence of the growth of a function on the distribution of zeros is investigated. The purpose of this note is to discuss direct connections between zeros and Taylor coefficients of an entire function, considering both classic and recent advances in the field under consideration.

Keywords: zeros of an entire function, Taylor coefficients, Hadamard regularized coefficients.

Будем рассматривать отличные от многочлена целые функции

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n\, z^n, \qquad z\in\mathbb{C}, \tag{1}$$

с бесконечным числом нулей, считая для простоты $f(0)=1$. Последовательность нулей такой функции запишем в порядке неубывания модулей и с учетом кратностей. Через $M_f(r)$ обозначим максимум модуля функции f в круге $|z|\leqslant r$.

Скорость стремления к бесконечности максимума модуля $M_f(r)$ связана с асимптотическим поведением последовательности тейлоровских коэффициентов $\Phi=\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ и последовательности нулей $\Lambda=\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

функции f. Одним из подходов к описанию «совместного изменения» числовых последовательностей Φ и Λ является привлечение известных формул для вычисления порядка, типа и некоторых других характеристик роста целой функции, определенных посредством величины $\ln M_f(r)$. Так, Э. Борель [1] на рубеже девятнадцатого и двадцатого веков ввел порядок и нижний порядок целой функции соответственно равенствами

$$\rho = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}, \qquad \lambda = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}.$$

Значения этих характеристик можно определить по тейлоровским коэффициентам:

$$\rho = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n\ln n}{\ln F_n^{-1}} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln R_n}, \qquad \lambda = \varliminf_{n\to\infty} \frac{n\ln n}{\ln F_n^{-1}} = \varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln R_n}. \tag{2}$$

Здесь F_n — «спрямленные по Адамару» коэффициенты степенного разложения (1) и $R_n = F_{n-1}/F_n$. Говоря чуть подробнее, $F_n = e^{-G(n)}$, где $y = G(x)$ — уравнение границы выпуклой оболочки множества точек $(n, -\ln|f_n|)$, $n \in \mathbb{N}_0$, представляющей собой так называемую ломаную Ньютона–Адамара. Последовательность $\left\{F_n^{-1}\right\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ логарифмически выпукла, что означает возрастание значений R_n. Если первоначальная последовательность $\{|f_n|\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ логарифмически выпукла, то $|f_n| = F_n$ при всех $n \in \mathbb{N}_0$. В общем же случае такое равенство имеет место в абсциссах вершин ломаной.

Напомним, что показатель сходимости последовательности Λ нулей f может быть найден по формуле

$$\rho_1 = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln|\lambda_n|}. \tag{3}$$

Если порядок ρ функции f не является целым числом, то показатель сходимости последовательности нулей f совпадает с ее порядком, т. е. $\rho_1 = \rho$. В таком случае, сопоставляя (2) и (3), находим

$$\rho = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln|\lambda_n|} \geqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln R_n} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln R_n}{\ln|\lambda_n|} = \lambda \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln R_n}{\ln|\lambda_n|}.$$

Таким образом, для функций f нецелого порядка ρ выполнено неравенство

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln R_n}{\ln|\lambda_n|} \leqslant \frac{\rho}{\lambda}.$$

Определим теперь тип и нижний тип целой функции относительно веса $h(r)$ соответственно формулами

$$T = T_h(f) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{h(r)}, \qquad t = t_h(f) = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{h(r)}. \tag{4}$$

Если вес h удовлетворяет условию

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{rh'(r)\ln r}{h(r)} = \rho, \tag{5}$$

как, например, модельный вес $h(r) = \ln^\rho r$, то формулы (4) задают тип и нижний тип целой функции относительно логарифмического уточненного порядка.

Для формулировки следующего результата потребуется определение h-плотности $\Delta_h(\Lambda)$ последовательности нулей $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ функции f:

$$\overline{\Delta}_h(\Lambda) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{n(r)}{rh'(r)}.$$

Здесь $n(r) = \max\{n \in \mathbb{N} : |\lambda_n| \leqslant r\}$ — считающая функция последовательности нулей.

В диссертации [2] для целых функций логарифмического порядка, большего единицы, доказано такое утверждение.

Теорема. *Пусть функция $h(r)$ удовлетворяет условию (5) с $\rho > 1$, и $k(\zeta)$ — обратная функция к $h(e^r)/r$. Пусть, далее, целая функция f такова, что $\overline{\Delta}_h(\Lambda) < +\infty$ и $T_h(f) = T$, $t_h(f) = t$. Тогда имеют место формулы*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{nk(n)}{\ln|\lambda_1\lambda_2 \cdot \ \ldots \ \cdot \lambda_n|} = \frac{\rho}{\rho-1}\,(T\rho)^{\frac{1}{\rho-1}}\,, \tag{6}$$

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{nk(n)}{\ln|\lambda_1\lambda_2 \cdot \ \ldots \ \cdot \lambda_n|} = \frac{\rho}{\rho-1}\,(t\rho)^{\frac{1}{\rho-1}}\,, \tag{7}$$

$$(T\rho)^{\frac{1}{\rho-1}} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{k(n)}{\ln|\lambda_n|} \leqslant (a_2T\rho)^{\frac{1}{\rho-1}}\,, \tag{8}$$

$$(a_1T\rho)^{\frac{1}{\rho-1}} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{k(n)}{\ln|\lambda_n|} \leqslant (t\rho)^{\frac{1}{\rho-1}}\,, \tag{9}$$

где a_1, a_2 ($a_1 \leqslant 1 \leqslant a_2$) являются корнями уравнения

$$\rho a + (1-\rho)a^{\rho/(\rho-1)} = t/T.$$

Сравнивая формулы (6)–(9) с соответствующими формулами для вычисления логарифмических типов целой функции по коэффициентам

Тейлора, замечаем «попарную идентичность» указанных соотношений с оговоркой о замене $|\lambda_n|$ на R_n. Выполнив такую замену, легко получим оценки

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln|\lambda_n|}{\ln R_n} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln|\lambda_n|}{\ln R_n} \leqslant \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{\rho-1}},$$

$$\left(\frac{t}{T}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln|\lambda_1\lambda_2\cdot\ \ldots\ \cdot\lambda_n|}{\ln F_n^{-1}} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln|\lambda_1\lambda_2\cdot\ \ldots\ \cdot\lambda_n|}{\ln F_n^{-1}} \leqslant \left(\frac{T}{t}\right)^{\frac{1}{\rho-1}},$$

связывающие нули целой функции с ее тейлоровскими коэффициентами (спрямленными по Адамару).

Результаты подобного рода допускают конкретизацию при дополнительных требованиях на тейлоровские коэффициенты. Например, еще Валирон (см. [3, с. 134]) доказал, что для целой функции (1) при условии

$$\frac{f_{n-1}f_{n+1}}{f_n^2} \to 0, \qquad n\to\infty, \tag{10}$$

верна (связывающая нули и коэффициенты Тейлора) асимптотическая формула

$$\lambda_n \sim -\frac{f_{n-1}}{f_n}, \qquad n\to\infty.$$

Отметим, что целые функции, коэффициенты которых подчинены требованию (10), имеют медленный рост, точнее, удовлетворяют условию

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{\ln^2 r} = 0.$$

В недавней работе автора [4] рассмотрен общий случай целой функции с бесконечным числом нулей, имеющей произвольный (нулевой, конечный или бесконечный) порядок, и доказаны неулучшаемые неравенства

$$\varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{F_n|\lambda_1\lambda_2\ \cdot\ \ldots\ \cdot\ \lambda_n|} \geqslant 1, \qquad \varlimsup_{n\to\infty} \frac{|\lambda_n|}{R_n} \geqslant 1.$$

В докладе планируется также представить результаты о влиянии поведения тейлоровских коэффициентов целой функции на расположение ее нулей в комплексной плоскости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Borel E.* Leçons sur les fonctions entières. Paris: Gauthier-Villars, 2e édition. 1921.

[2] *Брайчев Г. Г.* Экстремальные задачи в теории относительного роста выпуклых и целых функций // Дисс. ... д.ф.-м.н. М. : РУДН, 2018.

[3] *Valiron G.* Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance règulière // Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série. 1913. Vol. 5. P. 117–257.

[4] *Брайчев Г. Г.* Совместные оценки корней и тейлоровских коэффициентов целой функции // Уфимский математический журнал. 2021. Т. 13, № 1. С. 31–45.