УДК 517.984

Неполные обратные задачи для дифференциальных операторов на графах[1]

Н. П. Бондаренко (Саратов, Россия)
bondarenkonp@info.sgu.ru

В статье приведен обзор результатов по неполным обратным задачам для дифференциальных операторов на графах. Такие задачи состоят в восстановлении коэффициентов дифференциальных выражений (например, потенциалов Штурма-Лиувилля) на некоторых ребрах графа по спектральным характеристикам при условии, что коэффициенты на остальных ребрах известны априори. Обычно в неполных обратных задачах требуется меньше спектральных данных, чем в полных. Рассмотрены дифференциальные операторы как с регулярными коэффициентами, так и с коэффициентами из класса функций-распределений.

Ключевые слова: обратные спектральные задачи, операторы Штурма-Лиувилля на графах, дифференциальные операторы с коэффициентами-распределениями.

Благодарности: работа выполнена в Саратовском государственном университете за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-10001, https://rscf.ru/project/21-71-10001/.

Partial inverse problems for differential operators on graphs[1]

N. P. Bondarenko (Saratov, Russia)
bondarenkonp@info.sgu.ru

The paper is an overview of the results on partial inverse problems for differential operators on graphs. Such problems consist in the recovery of differential expression coefficients (e.g., Sturm-Liouville potentials) on some edges of a graph from spectral characteristics under the assumption that the coefficients on the remaining edges are known a priori. Usually, partial inverse problems require less spectral data than complete inverse problems. We consider differential operators with regular coefficients and also with distribution coefficients.

Keywords: inverse spectral problems, Sturm-Liouville operators on graphs, differential operators with distribution coefficients.

Acknowledgements: this work was implemented in Saratov State University and supported by Grant of the Russian Science Foundation № 21-71-10001, https://rscf.ru/en/project/21-71-10001/.

Доклад посвящен неполным обратным задачам, состоящим в восстановлении дифференциальных операторов по их спектральным характеристикам при условии, что коэффициенты оператора частично известны априори. Классической неполной обратной задачей является задача Хохштадта-Либермана, которая состоит в следующем. Рассмотрим краевую задачу Штурма-Лиувилля:

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0, 1), \tag{1}$$

$$y(0) = y(1) = 0, \tag{2}$$

где $q \in L_2(0,1)$, λ — спектральный параметр. Х. Хохштадт и Б. Либерман [1] показали, что если потенциал $q(x)$ известнен априори на интервале $(0, 1/2)$, то $q(x)$ на $(1/2, 1)$ однозначно определяется по спектру задачи (1)-(2). Заметим, что согласно результату Г. Борга [2], для единственности восстановления потенциала $q(x)$ на всем интервале $(0,1)$ требуются два спектра краевых задач для уравнения (1) с различными наборами краевых условий.

Рассмотрим некоторые обобщения задачи Хохштадта-Либермана на дифференциальные операторы на геометрических графах. В качестве примера приведем постановки полной и неполной обратных задач для оператора Штурма-Лиувилля на графе-звезде. Пусть G — граф-звезда с $m \geq 3$ ребрами $\{e_j\}_{j=1}^m$ одинаковой длины π. Каждое ребро e_j соединяет внутреннюю вершину v_0 с граничной вершиной v_j. На каждом ребре e_j введем параметр $x_j \in [0, \pi]$. Значение $x_j = 0$ соответствует граничной вершине v_j, а $x_j = \pi$ соответствует внутренней вершине v_0. Рассмотрим на графе G уравнения Штурма-Лиувилля

$$-y_j''(x_j) + q_j(x_j) y_j(x_j) = \lambda y_j(x_j), \quad x_j \in (0, \pi), \quad j = \overline{1, m}, \tag{3}$$

с вещественными потенциалами $q_j \in L_2(0, \pi)$, $j = \overline{1, m}$, и стандартные условия склейки во внутренней вершине:

$$y_1(\pi) = y_j(\pi), \quad j = \overline{2, m}, \qquad \sum_{j=1}^m y_j'(\pi) = 0. \tag{4}$$

Обозначим через Λ и Λ_k, $k = \overline{1, m}$, спектры соответствующих краевых задач L и L_k, $k = \overline{1, m}$, для системы уравнений (3) с условиями склейки (4) и следующими условиями в граничных вершинах:

$$\begin{aligned} L: &\quad y_j(0) = 0, \quad j = \overline{1, m}, \\ L_k: &\quad y_k'(0) = 0, \quad y_j(0) = 0, \quad j = \overline{1, m} \setminus k. \end{aligned}$$

Спектры приведенных задач представляют собой счетные множества вещественных собственных значений.

Полная обратная задача для оператора Штурма-Лиувилля на графе-звезде формулируется следующим образом.

Обратная задача 1. *По спектрам Λ, Λ_k, $k = \overline{1, m-1}$, построить потенциалы $\{q_j\}_{j=1}^m$.*

Обратная задача 1 представляет собой частный случай обратной спектральной задачи для операторов Штурма-Лиувилля на графах-деревьях (т.е. графов без циклов), изученной в [3]. В работе [3] доказана единственность решения обратной задачи и разработан конструктивный алгоритм восстановления потенциалов, основанный на методе спектральных отображений (см. [4]). Заметим, что для восстановления потенциалов на всех ребрах графа используется достаточно большое количество данных — m спектров. Вопрос о минимальности этих данных, насколько известно автору, является открытым. В недавних работах [5, 6] получена характеризация спектральных данных операторов Штурма-Лиувилля на графах с регулярными и сингулярными потенциалами, однако используемые в них спектральные данные являются избыточными и содержат данные В. А. Юрко [3] в качестве подмножества.

В случае, если потенциалы известны априори на части ребер графа, количество данных обратной задачи может быть уменьшено. В. Н. Пивоварчик [7] заметил, что если потенциалы q_j заданы на всех ребрах, кроме одного, то потенциал на оставшемся ребре однозначно определяется по одному спектру. Ч.-Ф. Янг [8] показал, что в этом случае требуется не весь спектр, а достаточно $\frac{2}{m}$-й части спектра.

При каждом $j = \overline{1, m}$ обозначим через $S_j(x_j, \lambda)$ решение уравнения (3), удовлетворяющее начальным условиям $S_j(0, \lambda) = 0$, $S_j'(0, \lambda) = 1$. Собственные значения задачи L совпадают с нулями характеристической функции

$$\Delta(\lambda) := \sum_{j=1}^{m} S_j'(\pi, \lambda) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} S_k(\pi, \lambda) \tag{5}$$

и могут быть обозначены через $\{\lambda_{nk}\}_{n \geq 1,\, k=\overline{1,m}}$ с учетом кратностей в соответствии с асимптотическими формулами

$$\sqrt{\lambda_{n1}} = n - \frac{1}{2} + O\left(n^{-1}\right), \tag{6}$$

$$\sqrt{\lambda_{nk}} = n + O\left(n^{-1}\right), \quad k = \overline{2, m}. \tag{7}$$

Неполная обратная задача из [8] формулируется следующим образом.

Обратная задача 2. *Пусть потенциалы $\{q_j\}_{j=2}^m$ заданы априори. По собственным значениям $\{\lambda_{nk}\}_{n \geq 1,\, k=1,2}$ найти q_1.*

Последовательность $\{\lambda_{nk}\}_{n \geq 1, k=1,2}$ может содержать конечное число кратных значений и определяется асимптотиками (6)-(7) неоднозначно. Обратная задача 2 может быть решена по любому набору собственных значений, удовлетворяющих (6)-(7) и дополнительному условию:

(Разделенность): Ни для одной пары (n, k), $n \geq 1$, $k = 1, 2$, не существует индексов i и j, $2 \leq i, j \leq m$, $i \neq j$, при которых $S_i(\pi, \lambda_{nk}) = S_j(\pi, \lambda_{nk}) = 0$.

Если условие (РАЗДЕЛЕННОСТЬ) нарушается, и для некоторого собственного значения λ_{nk} существуют индексы $i \neq j$, $i, j \geq 2$, такие, что $S_i(\pi, \lambda_{nk}) = S_j(\pi, \lambda_{nk}) = 0$, то согласно формуле (5) значение λ_{nk} не несет информации о потенциале q_1.

В работе [9] предложен конструктивный метод решения обратной задачи 2, основанный на ее сведении к классической задаче Штурма-Лиувилля не конечном интервале, соответствующем ребру с неизвестным потенциалом. Метод основан на использовании специального базиса Рисса в пространстве вектор-функций, построенного по исходным данным обратной задачи 2. При помощи этого метода в [9] доказаны локальная разрешимость и устойчивость обратной задачи, а также минимальность ее данных.

Впоследствии на основе идей работы [9] был разработан унифицированный подход (см. [10, 11]), применимый к широкому классу неполных обратных задач на интервалах и на графах. Он основан на сведении к задаче Штурма-Лиувилля с целыми аналитическими функциями $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ в одном из краевых условий:

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0, \pi), \tag{8}$$

$$y(0) = 0, \quad f_1(\lambda)y'(\pi) + f_2(\lambda)y(\pi) = 0. \tag{9}$$

Собственные значения краевой задачи (8)-(9) совпадают с нулями целой функции

$$\Delta(\lambda) = f_1(\lambda)S'(\pi, \lambda) + f_2(\lambda)S(\pi, \lambda), \tag{10}$$

где $S(x, \lambda)$ — решение уравнения (8), удовлетворяющее начальным условиям $S(0, \lambda) = 0$, $S'(0, \lambda) = 1$. Сравнивая (5) и (10), нетрудно видеть, что краевая задача L эквивалентна задаче (8)-(9) с $q = q_1$ и

$$f_1(\lambda) := \prod_{k=2}^{m} S_k(\pi, \lambda), \quad f_2(\lambda) := \sum_{j=2}^{m} S_j'(\pi, \lambda) \prod_{\substack{k=2 \\ k \neq j}}^{m} S_k(\pi, \lambda). \tag{11}$$

Поэтому обратная задача 2 сводится к следующей обратной задаче:

Обратная задача 3. *Предположим, что функции $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ известны априори. По подспектру $\{\lambda_n\}$ краевой задачи* (8)-(9) *и числу $\omega := \frac{1}{2}\int_0^\pi q(x)\,dx$ построить потенциал q.*

Функции $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ строятся по формулам (11) по известным потенциалам $\{q_j\}_{j=2}^m$. Число ω может быть найдено из асимптотики заданного подспектра.

В работах [10,11] построена полная теория обратной задачи 3: получены необходимые и достаточные условия единственности ее решения, при дополнительных условиях на подспектр $\{\lambda_n\}$ получены конструктивное решение, глобальная разрешимость, локальная разрешимость и устойчивость. В [12] данная теория перенесена на уравнение Штурма-Лиувилля (8) с сингулярным потенциалом q из класса функций-распределений $W_2^{-1}(0,\pi)$. Отметим, что несколько различных подходов к определению операторов Штурма-Лиувилля с потенциалами из этого класса были преложены в работе А. М. Савчука и А. А. Шкаликова [13]. В частности, уравнение (8) с потенциалом $q \in W_2^{-1}(0,\pi)$ может быть представлено в следующей эквивалентной форме:

$$-(y^{[1]})' - \sigma(x)y^{[1]} - \sigma^2(x)y = \lambda y, \quad x \in (0,\pi), \tag{12}$$

где $q = \sigma'$, $\sigma \in L_2(0,\pi)$, $y^{[1]} = y' - \sigma y$ — квазипроизводная. Аналогично обратной задаче 3, в [12] исследована обратная задача для уравнения (12) с краевыми условиями

$$y(0) = 0, \quad f_1(\lambda)y^{[1]}(\pi) + f_2(\lambda)y(\pi) = 0. \tag{13}$$

Обратная задача 4. *Предположим, что функции $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ известны априори. По подспектру $\{\lambda_n\}$ краевой задачи* (12)-(13) *построить функцию σ.*

На основе решения обратной задачи 4 в [12] исследована неполная обратная задача для оператора Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами на графе произвольной геометрической структуры, состоящая в восстановлении потенциала на одном граничном ребре по части спектра. Потенциалы на остальных ребрах графа считаются известными.

Изучались другие типы неполных обратных задач для дифференциальных операторов на графах. Например, в [14] построено конструктивное решение обратной задачи для оператора Штурма-Лиувилля на графе-дереве с известным потенциалом на одном внутреннем ребре. Требуется на один спектр меньше, чем при решении полной обратной задачи в [3]. В [15] также рассмотрен оператор Штурма-Лиувилля на графедереве и исследована задача восстановления потенциалов на некотором поддереве по частям нескольких спектров при предположении, что потенциалы на оставшемся поддереве заданы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Hochstadt H., Lieberman B.* An inverse Sturm-Liouville problem with mixed given data // SIAM J. Appl. Math. 1978. Vol. 34, № 4. P. 676–680.

[2] *Borg G.* Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe: Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte // Acta Math. 1946. Vol. 78. P. 1–96.

[3] *Юрко В. А.* О восстановлении операторов Штурма–Лиувилля на графах // Матем. заметки. 2006. Т. 79, № 4. С. 619–630.

[4] *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. 384 с.

[5] *Bondarenko N. P.* Spectral data characterization for the Sturm-Liouville operator on the star-shaped graph // Anal. Math. Phys. 2020. Vol. 10. Article number: 83.

[6] *Bondarenko N. P.* Inverse problem solution and spectral data characterization for the matrix Sturm-Liouville operator with singular potential // Anal. Math. Phys. 2021. Vol. 11. Article number: 145.

[7] *Pivovarchik V. N.* Inverse problem for the Sturm-Liouville equation on a simple graph // SIAM J. Math. Anal. 2000. Vol. 32, № 4. P. 801–819.

[8] *Yang C.-F.* Inverse spectral problems for the Sturm-Liouville operator on a d-star graph // J. Math. Anal. Appl. 2010. Vol. 365. P. 742–749.

[9] *Bondarenko N. P.* A partial inverse problem for the Sturm-Liouville operator on a star-shaped graph // Anal. Math. Phys. 2018. Vol. 8, № 1. P. 155–168.

[10] *Bondarenko N. P.* Inverse Sturm-Liouville problem with analytical functions in the boundary condition // Open Math. 2020. Vol. 18, № 1. P. 512–528.

[11] *Bondarenko N. P.* Solvability and stability of the inverse Sturm-Liouville problem with analytical functions in the boundary condition // Math. Meth. Appl. Sci. 2020. Vol. 43, № 11. P. 7009–7021.

[12] *Bondarenko N. P.* A partial inverse Sturm-Liouville problem on an arbitrary graph // Math. Meth. Appl. Sci. 2021. Vol. 44, № 8. P. 6896–6910.

[13] *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Операторы Штурма-Лиувилля с потенциалами-распределениями // Тр. ММО. 2003. Т. 64. С. 159–212.

[14] *Bondarenko N. P., Shieh C.-T.* Partial inverse problems for Sturm-Liouville operators on trees // Proc. Royal Soc. Edinburgh, Sect. A: Math. 2017. Vol. 147, № 5. P. 917–933.

[15] *Bondarenko N. P.* An inverse problem for Sturm-Liouville operators on trees with partial information given on the potentials // Math. Meth. Appl. Sci. 2019. Vol. 42, № 5. P. 1512–1528.