УДК 519.63

Об одном итерационном методе решения параболических уравнений[1]

И. В. Бойков, В. А. Рязанцев (Пенза, Россия)
i.v.boykov@gmail.com, ryazantsevv@mail.ru

В работе предложен эффективный численный метод решения прямых и обратных задач для параболических уравнений (линейных и нелинейных), основанный на непрерывном методе решения нелинейных операторных уравнений. Рассматриваются прямые задачи для нелинейных уравнений и обратные задачи для параболических уравнений в следующих постановках: коэффициентная задача, задача восстановления граничных условий, задача восстановления начальных условий.

Ключевые слова: обратные задачи, некорректные задачи, параболические уравнения, теория устойчивости, логарифмическая норма.

On an iterative method for solution of parabolic equations[1]

I. V. Boykov (Penza, Russia), V. A. Ryazantsev (Penza, Russia)
i.v.boykov@gmail.com, ryazantsevv@mail.ru

In this paper we propose an efficient numerical method for solution of direct and inverse problems for parabolic equations (both linear and nonlinear). The method is based on the continuous method for solution of operator equations. We consider direct problems for nonlinear equations and the following statements of inverse problems for parabolic equations: inverse coefficient problem, the problem of recovering boundary conditions and the problem of recovering initial conditions.

Keywords: inverse problems, ill-posed problems, parabolic equations, stability theory, logarithmic norm.

Приближенным методам решения прямых и обратных задач для параболических уравнений посвящена обширная литература [1], [2], [3], [4]. Тем не менее, разработка новых методов решения этих задач является актуальной задачей. Это обусловлено как появлением новых прикладных задач, моделируемых параболическими уравнениями и их системами, так и возрастающими требованиями к точности и устойчивости численных методов.

В течение нескольких последних лет авторы исследуют применимость непрерывного метода решения нелинейных операторных уравнений [5] к решению прямых и обратных задач для параболических и гиперболических уравнений. Выбор этого метода обусловлен двумя обстоятельствами: 1) В отличие от метода Ньютона - Канторовича метод не требует обратимости производной Фреше (или Гато) нелинейного оператора на каждом шаге итерационного процесса. Более того, он осуществим даже при вырождении производной на некотором многообразии; 2) метод основан на теории устойчивости Ляпунова и устойчив при возмущении элементов уравнений и начальных условий.

В работе дан обзор ряда результатов, полученных в этом направлении.

Дадим краткое описание непрерывного операторного метода. Пусть требуется найти решение нелинейного операторного уравнения

$$A(x) - f = 0, \tag{1}$$

где $A: \ X \to X$ — нелинейный оператор, отображащий банахово пространство X в себя. Уравнению (1) ставится в соответствие задача Коши

$$\frac{dx(s)}{ds} = A\left(x(s)\right) - f, \tag{2}$$

$$x(0) = x_0. \tag{3}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть задача* (2)-(3) *имеет решение* x^*, *и на всякой дифференцируемой кривой* $g(s)$, *расположенной в шаре* $\mathrm{B}\left(x^*, r\right)$, *справедливы следующие условия: 1) при любом* s ($s > 0$) *выполняется неравенство* $\int\limits_0^s \Lambda\left(A'\left(g(\tau)\right)\right) d\tau \leqslant 0$; *2) имеет место неравенство* $\lim\limits_{s\to\infty} \frac{1}{s} \int\limits_0^s \Lambda\left(A'\left(g(\tau)\right)\right) d\tau \leqslant -\alpha_g$, $\alpha_g > 0$. *Тогда решение задачи Коши* (2)-(3) *при* s, *стремящемся к бесконечности, сходится к решению* x^* *уравнения* (1).

Через $\Lambda\left(A'\right)$ обозначена логарифмическая норма оператора A', являющегося производной Фреше (производной Гато) оператора A. Логарифмическая норма $\Lambda(A)$ оператора $A: \ X \to X$ определяется [6] посредством формулы $\Lambda(A) = \lim\limits_{h\downarrow 0}\left(\frac{\|I+hA\|-1}{h}\right)$, где символ $\downarrow$ означает монотонное стремление к нулю.

В работе [7] построены численные методы решения обратных коэффициентных задач для одно- и двумерных уравнений теплопроводности в следующих постановках.

Дана задача Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{4}$$

$$u(0, x, y) = \varphi(x, y),$$

где $t \geqslant 0$, $-\infty < x, y < \infty$, и в точке (t^*, x^*, y^*) известно ее решение $u\left(t^*, x^*, y^*\right)$. Требуется найти коэффициент γ.

Дано уравнение (4) с начальным условием

$$u(0,x,y)=\varphi(x,y), \quad (x,y)\in[0;\ell]^2 \tag{5}$$

и граничными условиями

$$u(t,x,0)=q_1(t,x), \quad u(t,x,\ell)=q_2(t,x), \tag{6}$$

$$u(t,0,y)=q_3(t,y), u(t,\ell,y)=q_4(t,y). \tag{7}$$

Известно решение граничной задачи (4)-(7) в точке (t^*,x^*,y^*). Требуется определить коэффициент γ.

Показано [8], что метод применим для нахождения двух неизвестных постоянных коэффициентов в нелинейном уравнении

$$\frac{\partial u(t,x_1,x_2)}{\partial t}=a\left[\frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2)}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2)}{\partial x_2^2}\right]+bu(t,x_1,x_2),$$

$$u(0,x_1)=\varphi(x_1,x_2),$$

где $-\infty<x_1,x_2<\infty$, $0\leqslant t\leqslant T$, коэффициент a положительный. Предполагается, что дополнительно известны значения решения $u(t^{(1)},x_1^{(1)},x_2^{(1)})$ и $u(t^{(2)},x_1^{(2)},x_2^{(2)})$.

В работе [9] результаты работы [7] распространены на параболические уравнения с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени.

В работе [10] непрерывный операторный метод решения нелинейных операторных уравнений применяется для решения задачи Коши для нелинейного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\Phi\left(t,x,u(t,x)\right), \tag{8}$$

$$u(0,x)=\varphi(x). \tag{9}$$

Предварительно задача (8)-(9) сводится к нелинейному интегральному уравнению

$$u(t,x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi+\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(x,\xi,u(x,\xi)\right)G(x,\xi,t-s)\,d\xi\,ds,$$

где $G(x,\xi,t)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi at}}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right]$.

На основе непрерывного операторного метода авторами также успешно построены эффективные численные методы решения следующих задач для линейных параболических уравнений: 1) восстановления начальных условий в задаче Коши [11]; 2) восстановления граничного условия в первой и второй краевой задаче [12] и 3) восстановления коэффициентов граничных условий в третьей краевой задаче [13].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Кабанихин С. И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск : Сибирское научное изд-во, 2009. 457 с.

[2] *Бек Дж., Блэкуэлл Б., Сент-Клер Ч.* Некорректные обратные задачи теплопроводности. М. : Мир, 1989. 312 с.

[3] *Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В.* Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложения к обратным задачам теплообмена. М. : Наука, Физматлит, 1988. 288 с.

[4] *Hasanov Hasanoğlu A., Romanov V. G.* Introduction to Inverse Problems for Differential Equations. Cham : Springer International Publishing AG, 2017. 261 p.

[5] *Бойков И. В.* Об одном непрерывном методе решения нелинейных операторных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 9. С. 1308–1314.

[6] *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных урвнений в банаховом пространстве. М. : Физматгиз, 1970. 536 с.

[7] *Бойков И. В., Рязанцев В. А.* Об одном приближённом методе определения коэффициента теплопроводности // Журнал СВМО. 2019. Т. 21, № 2. С. 149–163.

[8] *Бойков И. В., Рязанцев В. А.* К приближённому решению обратных коэффициентных задач для уравнения теплопроводности // Материалы XIV Международной научной конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом иоделировании"(Саранск, 9-12 июля 2019 г.). Саранск : Издательство СВМО, 2019. С. 18–21.

[9] *Бойков И. В., Рязанцев В. А.* Об одном приближённом методе решения обратной коэффициентной задачи для уравнения теплопроводности // Сибирский журнал индустриальной математики. 2021. Т. 24, № 2. С. 5–22.

[10] *Бойков И. В., Рязанцев В. А.* О применении непрерывного операторного метода к решению прямой задачи для нелинейных параболических уравнений // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2020. № 1(53). С. 97–112.

[11] *Бойков И. В., Рязанцев В. А.* Численное восстановление начального условия в задачах Коши для линейных параболических и гиперболических уравнений // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2020. № 3(55). С. 68–84.

[12] *Бойков И. В., Рязанцев В. А.* Об одном методе восстановления граничного условия для линейных уравнений параболического типа // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2020. № 4(56). С. 42–56.

[13] *Boykov I. V., Ryazantsev V. A.* On the problem of recovering boundary conditions in the third boundary value problem for parabolic equation // University Proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences. 2021. № 2(58). P. 3–13.