УДК 519.668

Аналоги быстрого преобразования Хаара[1]

М. С. Беспалов (Владимир, Россия)

bespalov@vlsu.ru

Приведены новые матрично-алгоритмические формы записи быстрого преобразования Хаара, которые допускают p-ичное обобщение. Предложены действительные с прореживанием по частоте и по времени варианты этих обобщений.

Ключевые слова: дискретное преобразование Хаара, ортогональная система, быстрый алгоритм.

Analogues of the fast Haar transform[1]

M. S. Bespalov (Vladimir, Russia)

bespalov@vlsu.ru

New matrix-algorithmic notation forms for the fast Haar transform, which admit p-ary generalization, are presented. Real versions of these generalizations with decimation in frequency and in time are proposed.

Keywords: discrete Haar transform, orthogonal system, fast algorithm.

Среди быстрых алгоритмов цифровой обработки сигналов, к которым относятся алгоритм Кули - Тьюки для дискретного преобразования Фурье (ДПФ) и алгоритмы Гуда для дискретного преобразования Уолша (ДПУ), выделяется алгоритм реализации дискретного преобразования Хаара (ДПХ) в виде *быстрого преобразования Хаара* (БПХ). Если число операций для ДПФ или ДПУ порядка $N = 2^n$ оценивается: величиной N^2 в случае прямого вычисления, величиной $nN = N \log N$ в случае быстрого алгоритма, то для БПХ оно равно N. Причем для ДПФ это операции комплексного сложения плюс комплексного умножения. Различие на порядок в этих цифрах обусловлено особым видом ДПХ, минимизируещем число операций на классе ступенчатых функций.

В обзоре [1] по этой тематике сам алгоритм БПХ не приводится. В [2] отмечено, что кроме основного ДПХ, где прореживание элементов берется по частоте, существует вариант ДПХ с прореживанием по времени.

Алгоритм БПХ по частоте.

Для k *от 0 до* $n-1$ *выполняем*

(для j *от 0 до* $2^{n-k-1}-1$ *выполняем*

$a_{2^{n-k-1}+j} := x_{2j} - x_{2j+1}, \qquad x_j := x_{2j} + x_{2j+1}). \quad a_0 := x_0.$

Алгоритм БПХ по времени.

Для k от 0 до $n-1$ выполняем

(для j от 0 до $2^{n-k-1}-1$ выполняем

$$\left\{ \begin{array}{c} x_j := x_j + x_{2^{n-k-1}+j} \\ a_{2^{n-k-1}+j} := x_j - x_{2^{n-k-1}+j} \end{array} \right). \qquad a_0 := x_0.$$

В этих алгоритмах в качестве рабочего массива использовали исходный массив. Во втором алгоритме можно ограничиться всего одним массивом, заменив выходной массив $A = \{a_j\}_{j=0}^{N-1}$ на входной массив X, так как результаты операций помещаются в те же ячейки, откуда берутся.

В [1] алгоритм ДПХ (но не БПХ) приведен в унитарной форме матричного варианта. Сравнивать его с быстрыми алгоритмами для ДПФ и ДПУ затруднительно, так как для последних существует матричный вариант быстрого алгоритма в виде факторизации.

Предложим матрично-алгоритмическую конструкцию БПХ. Для этого входной одномерный массив x представим в виде матрицы X^0 нулевого шага (верхний индекс указывает шаг алгоритма) размера $2 \times 2^{n-1}$. Причем, для алгоритма по частоте располагаем x в матрице по столбцам (то есть по парам), для алгоритма по времени располагаем x в матрице по строкам (пол-массива вверху и пол-массива внизу). Сумма строк матрицы X^0 образует входной одномерный массив x^1 следующего шага, а разность этих же строк запоминается в выходном массиве m^1 как набор спектральных характеристик. И так далее.

Матрично-алгоритмический вид БПХ.

Для k от 1 до n выполняем

$$\begin{pmatrix} x^k \\ m^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X^{k-1}, \qquad (1)$$

где матрица X^k из двух строк есть представление одномерного массива x^k: по столбцам в случае алгоритма по частоте или по строкам в случае алгоритма по времени.

Выходной одномерный массив (строка) формируется из одномерных массивов разного объема в следующем порядке

$$A = (x^n\ m^n\ m^{n-1} \ldots m^1).$$

Предложенная (1) форма $(\cdot) = HX^{k-1}$ алгоритма БПХ допускает следующее p-ичное обобщение, которое строится заменой матрицы H на произвольную невырожденную матрицу Q порядка p с начальной строкой из единиц. Первоначально будем считать, что строки φ_j этой матрицы Q ортогональны. Новые варианты такой матрицы Q для входного одномерного массива $x \in \mathbb{R}^N$ при $N = p^n$ предложены в [3]. Если p само является степенью двойки, то в качестве Q подойдет матрица ДПУ. Если разрешить переход к комплексным числам, то в качестве Q подойдет матрица ДПФ.

Матрично-алгоритмический p-ичный аналог БПХ.

Для k от 1 до n выполняем

$$\begin{pmatrix} x^k \\ M^k \end{pmatrix} = Q \cdot X^{k-1},$$

где матрица X^k размера $p \times p^{n-k-1}$ есть представление одномерного массива x^k (строки): по столбцам в случае алгоритма по частоте или по строкам в случае алгоритма по времени.

Выходной массив $A = (x^n\ M^n\ M^{n-1} \dots M^1)$.

Форму представления выходного массива A для разных случаев алгоритма следует продумать.

Матрично-алгоритмический обратный p-АБПХ.

Для k от n до 1 выполняем

$$X^{k-1} = Q^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x^k \\ M^k \end{pmatrix},$$

где x^k есть развертка (по столбцам в случае алгоритма по частоте или по строкам в случае алгоритма по времени) матрицы X^k в виде строки.

В случае ортогональности строк φ_j матрицы Q имеем $Q^{-1} = Q^* \cdot D$ с диагональной D, у которой на диагонали расположены числа $\frac{1}{\|\varphi_j\|^2}$. В частности, для алгоритма БПХ (1) с матрицей H имеем $H^{-1} = \frac{1}{2}H$, откуда вытекает, что при обратном БПХ вычисляем полусуммы и полуразности.

В качестве примера рассмотрим случай $p = 4$. В [3] в качестве матриц Q предложены матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \& \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Новый вариант с дискретными функциями Уолша в качестве базиса $\mathbb{R}^4$ с матрицей $Q = H^{\otimes 2}$ в виде кронекерова квадрата матрицы H. В этом случае для матрицы Q можно применить быстрый алгоритм Гуда в любом из двух вариантов. В [4] предложена запись основного алгоритма Гуда с использованием операции b-произведения матриц (символ операции $\oslash$): $H^{\otimes 2} = (H \oslash E)^2$, где E – единичная матрица второго порядка.

Предложенная форма записи предполагает использование параллельных алгоритмов, то есть вычисления в векторной форме. Обозначим (на каждом k-м шаге) строки обрабатываемой матрицы X^{k-1} символами X_0, X_1, X_2 и X_3. В случае матрицы Q вида (2) формулы, выписанные в [3] для элементов, предлагается использовать для строк. В случае $Q = H^{\otimes 2}$ это выглядит так: вычисляем новые строки в порядке $X_0 + X_2$, $X_0 - X_2$, $X_1 + X_3$, $X_1 - X_3$; переобозначаем их прежними символами X_0, X_1, X_2 и X_3; повторяем предыдущий шаг. Число операций над строками: в первом случае – 2 умножения и 7 сложений ($X_2 + X_3$ считаем один раз), во втором – 6 сложений (вычитаний), в третьем – 8 сложений. Простота вычисления во втором случае компенсируется более сложным, чем в первом и третьем случаях, видом обратной матрицы Q^{-1}.

Вариант алгоритма с прореживанием по времени допускает реализацию без формирования матрицы X^{k-1} с p строками на каждом шаге. Можно просто обрабатываемый одномерный массив разбить на p дизъюнктивных одинаковых по объему подмассивов – X_0, X_1, X_2 и X_3 в рассмотренном случае $p = 4$.

Всю конструкцию не сложно переформулировать в терминах ступенчатых функций на единичном отрезке. В этом случае конструкция представляет собой модельный случай p-ичной вейвлетной схемы на классе ступенчатых функций, где тождественная единица есть масштабирующая функция, остальные $p - 1$ функций базиса составляют набор материнских функций, а также выделяются p-ичные сжатия и сдвиги.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Залманзон Л. А.* Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их приложения в управлении, связи и других областях. М. : Наука. 1989. 496 с.

[2] *Машарский С. М., Малоземов В. Н.* Хааровские спектры дискретных сверток // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2000. Т. 40, № 6. С. 954–960.

[3] *Беспалов М. С.* Вейвлетные p-аналоги дискретного преобразования Хаара // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, № 4. С. 520–531.

[4] *Беспалов М. С.* Новые разложения кронекеровой степени по Гуду // Проблемы передачи информации. 2018. Т. 54, № 3. С. 62–66.