УДК 517.53

Об одном свойстве корневых множеств функций классов $\mathbf{A}_\alpha^\infty$, где $\alpha > -1$, на односвязной области комплексной плоскости[1]

В. А. Беднаж, Д. С. Ермакова (Брянск, Россия)
vera.bednazh@mail.ru

В работе доказано, что нули аналитической функции $F \in A_\alpha^\infty(G), \alpha > -1$, можно выделить, не выходя из пространства $A_\alpha^\infty(G)$, где G – односвязная область на комплексной плоскости, граница которой содержит более одной точки.

Ключевые слова: единичный круг, аналитическая функция, нули аналитической функции, комплексная плоскость, бесконечное произведение.

On one property of the root sets of functions of classes $\mathbf{A}_\alpha^\infty$, $\alpha > -1$, on the simply connected domain of the complex plane[1]

V. A. Bednazh, D. S. Ermakova (Bryansk, Russia)
vera.bednazh@mail.ru

It is proved that the zeros of an analytic function $F \in A_\alpha^\infty(G)$, $\alpha > -1$, can be distinguished without leaving the space $A_\alpha^\infty(G)$, where G is a simply connected domain on the complex plane whose boundary contains more than one point.

Keywords: unit disk, analytic function, zeros of an analytic function, complex plane, infinite product.

Пусть $D = \{z : \ |z| < 1\}$ – единичный круг на комплексной плоскости, $H(D)$ – множество всех аналитических в D функций. В 1914 году Харди рассмотрел класс $H^p, \quad p > 0$, аналитических функций, удовлетворяющих условию

$$\sup_{0<r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^p d\theta < +\infty.$$

На сегодняшний день хорошо изучены корневые множества функций класса H^p. Известно, что если функция $f \in H^p(D), \quad 0 < p < +\infty$, то нули $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ функции подчиняются известному условию Бляшке

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|) < +\infty.$$

[1]Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

[1]This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введем в рассмотрение класс функций

$$A_\alpha^\infty(D) = \left\{ f \in H(D): \ |f(z)| \leq \frac{c_f}{(1-|z|)^\alpha} \right\},$$

где c_f – положительная постоянная, зависящая только от f, $\quad \alpha > -1$.

В работе Ф. А. Шамояна [1] установлено, что нули аналитической функции можно выделить, не выходя из пространства $A_\alpha^\infty(D)$.

Обобщим этот результат на случай произвольной односвязной области комплексной плоскости.

Обозначим

$$A_\alpha^\infty(G) = \left\{ f \in H(G): \ |F(w)| \leq \frac{c_F}{(dist(w, \partial G))^\alpha} \right\},$$

где $dist(w, \partial G)$ – расстояние от точки w до границы области ∂G,
c_F – положительная постоянная, зависящая только от F, $\quad \alpha > -1$.

Теорема 1. Если функция $f \in A_\alpha^\infty(D)$, $\alpha > -1$, и $f(z_k) = 0$, $k = 1, 2, ..., z_k \in D$, тогда функция $\frac{f}{\tilde{B}} \in A_\alpha^\infty(D)$, где $\tilde{B}\,(z, z_k)$ – бесконечное произведение вида

$$\tilde{B}\,(z, z_k) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(2 - b_k\,(z, z_k)\right) \cdot b_k\,(z, z_k)\,, \ z, \ z_k \in D.$$

Теорема 2. Пусть G – односвязная область на комплексной плоскости, граница которой содержит более одной точки. Если функция $F \in A_\alpha^\infty(G)$, $\quad \alpha > -1$, и $F(w_k) = 0$, $\quad k = 1, 2, ...$, $\quad w_k \in G$, тогда функция $\frac{F}{\tilde{B}} \in A_\alpha^\infty(G)$, где $\tilde{B}\,(w, w_k)$ – бесконечное произведение вида

$$\tilde{B}\,(w, w_k) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(2 - b_k\,(\psi(w), \psi(w_k))\right) \cdot b_k\,(\psi(w), \psi(w_k))\,, \ w, w_k \in G,$$

$\psi(w)$ – функция, конформно отображающая область G на единичный круг D.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Djrbashian A. E., Shamoyan F. A* Topics in the theory of A_α^p spaces. Leipzig: BSB Teubner, 1988. 199 p.

[2] *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М. : Наука, Гл. ред. физ.- мат. лит., 1958. 736 с.

[3] *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. 630 с.