УДК 517.9

Некоторые оптимизационные задачи с множеством достижимости линейной управляемой системы[1]

М. В. Балашов (Москва, Россия)
balashov73@mail.ru

Для линейной управляемой системы $x' \in Ax + U$, $x(0) = 0$, где x есть n-мерный вектор, A матрица $n \times n$, U — компакт, определим $M(t)$ — множество достижимости этой системы в момент $t > 0$. Пусть M — выпуклый n-мерный компакт.

Рассматривается задача о том, верно ли равенство $M(t) \cap M = \emptyset$, включение $M(t) \subset M$ и т.п. При некоторых необременительных условиях показана возможность решения такой задачи с помощью метода проекции градиента.

Ключевые слова: сильная выпуклость, равномерная гладкость, условие Лежанского-Поляка-Лоясевича, метод проекции градиента.

Some optimization problems with a reachable set of a linear controled system[1]

M. V. Balashov (Moscow, Russia)
balashov73@mail.ru

For a linear controlled system $x' \in Ax + U$, $x(0) = 0$, where x is an n -dimensional vector, A is a $n \times n$ matrix, U is compact, we define $M(t)$ as the reachable set of this system at the time $t > 0$. Let M be a convex n-dimensional compact.

We consider the problem of whether it is true the equality $M(t) \cap M = \emptyset$, the inclusion $M(t) \subset M$, etc. Under some non-burdensome conditions, the possibility of solving such a problem using the gradient projection method is shown.

Keywords: strong convexity, uniform smoothness, the Lezanski-Polyak-Lojasiewicz condition, the gradient projection method.

Введение

Рассмотрим управляемую систему $x' \in Ax + U$, $x(0) = 0$. Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ — компактное подмножество, содержащее 0. Рассмотрим *множество достижимости* $M(t)$ этой системы в момент $t > 0$, т.е. $M(t) = \{x(t) : \exists u(s) \in U$ – измеримый селектор: $x'(s) = Ax + u(s)$ п.в. $s \in [0, t]\}$. Легко получить, что

$$M(t) = \int_0^t e^{As} U \, ds, \tag{1}$$

где многозначный интеграл понимается в смысле Аумана или Римана, см. детали в [1]. Из выпуклости и замкнутости многозначного интеграла следует, что $M(t)$ есть выпуклый компакт для любого $t > 0$. Отметим, что, в силу теоремы Ляпунова [2], компактное множество U в системе и интеграле можно заменить на его выпуклую оболочку. Поэтому далее будем считать U выпуклым компактом. Кроме того, в силу включения $0 \in U$, множество достижимости монотонно возрастает по включению: если $0 \le t_1 \le t_2$, то $M(t_1) \subset M(t_2)$.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт. Мы рассмотрим следующие задачи.

Задача 1. Для момента $t > 0$ выяснить, верно ли, что $M(t) \cap M = \emptyset$?

Задача 2. Для момента $t > 0$ выяснить, верно ли, что $M(t) \subset M$?

Возможны и другие постановки.

Пусть (x, y) — скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|^2 = (x, x)$, $B_r(0)$ — замкнутый шар радиуса r с центром в нуле. *Опорной функцией* компакта $M \subset \mathbb{R}^n$ называется $s(p, M) = \max_{x \in M}(p, x)$, $p \in \mathbb{R}^n$.

Для выпуклого компакта M и вектора $p \in \mathbb{R}^n$ определим $M(p) = \{x \in M : (p, x) = s(p, M)\}$. Множество $M(p)$ является *субградиентом* опорной функции $\partial s(p, M)$ и называется *опорным элементом* множества M для вектора p [3].

Для множества $M(t)$, зависящего от параметра t (например, множества достижимости), опорный элемент для вектора p будем обозначать $M(t)(p)$.

Напомним, что множество $M \subset \mathbb{R}^n$ *сильно выпукло с радиусом* $R > 0$, если M можно представить в виде пересечения замкнутых шаров радиуса R. Сильная выпуклость выпуклого компакта M с радиусом R эквивалентна условию Липшица градиента опорной функции $M(p)$ на единичной сфере: для всех $\|p\| = \|q\| = 1$ выполнено $\|M(p) - M(q)\| \le R\|p - q\|$ [3, теорема 4.3.2].

Будем говорить, что множество $M \subset \mathbb{R}^n$ *равномерно гладкое с константой* $r > 0$, если M можно представить в виде $M = M_0 + B_r(0)$, где M_0 — выпуклый компакт.

Пусть $\varepsilon > 0$, $S_0 \subset \mathbb{R}^n$ — гладкая поверхность без края, $\overline{x} \in S_0$. Для дифференцируемой функции $f : S_0 + \mathrm{int} B_\varepsilon(0) \to \mathbb{R}$ определим $S = \{x \in S_0 : f(x) \le f(\overline{x})\}$. Пусть S — гладкая поверхность с краем $\partial S = \{x \in S_0 : f(x) = f(\overline{x})\}$. Будем говорить, что на S выполняется *условие Лежанского-Поляка-Лоясевича* (LPL) [4, §3.2] с константой $\mu > 0$, если $\Omega = \mathrm{Arg}\min_{x \in S} f(x) \neq \emptyset$ и для всех $x \in S$ выполнено неравенство

$$\|P_{T_x} f'(x)\|^2 \ge \mu(f(x) - f(\Omega)). \tag{2}$$

Здесь T_x — касательное подпространство к S в точке $x \in S$, P_{T_x} — ортогональный проектор на T_x, $f'(x)$ — градиент функции f в точке $x \in S$.

Основной результат

Мы будем рассматривать ситуации, когда множество достижимости $M(t)$ (1) сильно выпукло с константой R для всех $t \in [0, T]$, $T > 0$. Последнее имеет место, когда множество $e^{As}U$ сильно выпукло с радиусом $R(s) > 0$. Тогда в силу [5] и линейности интеграла по отрезку интегрирования получаем, что $M(t)$ сильно выпукло с радиусом $R = \int\limits_0^T R(s)\, ds$ для всех $t \in [0, T]$.

Отметим, что даже для нестрого выпуклого множества U имеется ряд ситуаций, когда $M(t)$ сильно выпукло. Частично они описаны в работе [6].

Пусть $T > 0$ и для управляемой системы множество достижимости $M(t)$ сильно выпукло с радиусом $R_T > 0$ при всех $t \in [0, T]$. Пусть выпуклый компакт $M \subset \mathbb{R}^n$ равномерно гладкий с константой $r > 0$, т.е. $M = M_0 + B_r(0)$. Потребуем также, что множество M_0 сильно выпукло с радиусом $R_0 > 0$. Рассмотрим при $t \in [0, T]$ множество $Z(t) = M(t) + (-M_0)$. Множество $Z(t)$ сильно выпукло с радиусом $R = R_T + R_0$ как сумма сильно выпуклых множеств [3, пункт 3 предложения 4.3.1]. Очевидно, что равенство $M(t) \cap M = \emptyset$ можно переформулировать так: расстояние от нуля до $Z(t)$ более $r > 0$. Если это верно, то $0 \notin M(t) + (-M)$. На языке опорных функций последний вопрос сводится к решению задачи: для функции $f(p) = s(p, Z(t)) = s(p, M(t))) + s(p, -M_0)$ найти

$$\min_{\|p\|=1} f(p) = J. \tag{3}$$

Если $J < -r$, то расстояние от нуля до $Z(t)$ более r. Если $J \geq -r$, то то расстояние от нуля до $Z(t)$ не более $r > 0$ и значит $0 \in M(t) + (-M)$. Заметим, что $f'(p) = M(t)(p) + (-M_0)(p) = \int\limits_0^t (e^{As}U)(p)\, ds + (-M_0)(p)$, см. [1].

Положим $S_1 = \{p \in \mathbb{R}^n \ : \|p\| = 1\}$.

Теорема 1. *Пусть $\varepsilon \in (0, 1)$ и в (3) $J < 0$. При приведенных выше условиях в задаче (3) функция f удовлетворяет условию (LPL) (2) на $S = \{p \in S_1 : f(p) \leq 0\}$ с константой $\mu = |J|$ и имеет в ε-окрестности сферы S_1 липшицев градиент с константой $L_1 = R/(1 - \varepsilon)$.*

Доказательство. Пусть $p_0 \in S_1$ — решение (3). В силу необходимого условия экстремума $f(p_0) = (p_0, f'(p_0)) = -\|f'(p_0)\|$. Тогда $P_{T_p} = I - pp^T$

для любого $p \in S_1$ и $\|(I - pp^T)f'(p)\|^2 = \|f'(p)\|^2 - f^2(p)$. Отсюда для любого $p \in S$ имеем

$$\|f'(p)\|^2 - f^2(p) = (\|f'(p)\| - f(p))(\|f'(p)\| + f(p_0) + f(p) - f(p_0)).$$

Из неравенства $f(p) \leq 0$ и того, что $f'(p_0)$ — это опорный элемент $Z(t)(p_0)$ с наименьшей нормой, вытекает, что $\|f'(p)\| - f(p) \geq \|f'(p)\| \geq \|f'(p_0)\| = |J|$. Осталось заметить, что $\|f'(p)\| + f(p_0) = \|f'(p)\| - \|f'(p_0)\| \geq 0$.

Для любых ненулевых векторов $p, q \in \mathbb{R}^n$ имеем $\left\| \frac{p}{\|p\|} - \frac{q}{\|q\|} \right\| \leq \frac{\|p-q\|}{\sqrt{\|p\| \cdot \|q\|}}$, причем в ε-окрестности S_1 $\|p\| \geq 1 - \varepsilon$, $\|q\| \geq 1 - \varepsilon$. Липшицевость градиента $f'(p)$ в ε-окрестности S_1 следует из оценок

$$\|f'(p) - f'(q)\| \leq R \left\| \frac{p}{\|p\|} - \frac{q}{\|q\|} \right\| \leq \frac{R\|p-q\|}{\sqrt{\|p\| \cdot \|q\|}} \leq \frac{R}{1-\varepsilon}\|p - q\|. \quad \square$$

Как показано в [4, Theorem 2], [7, Theorems 2, 3; Corollary 2], утверждения теоремы 1 достаточно, чтобы проекционный алгоритм $p_1 \in S$, $p_{k+1} = P_{S_1}(p_k - tf'(p_k))$ с достаточно малым шагом $t > 0$ сходился к решению p_0 (3) со скоростью геометрической прогрессии при произвольном выборе начальной точки $p_1 \in S$.

Аналогичный результат имеет место для задачи 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Половинкин Е. С.* Многозначный анализ и дифференциальные включения. М. : Физматлит, 2015. 524 с.

[2] *Ляпунов А. А.* О вполне аддитивных вектор-функциях // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1940. Т. 4, № 6. С. 465–478.

[3] *Половинкин Е. С., Балашов М. В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М. : Физматлит, 2007. 2е изд. 440 с.

[4] *Balashov M. V., Polyak B. T., Tremba A. A.* Gradient Projection and Conditional Gradient Methods for Constrained Nonconvex Minimization // Numerical Functional Analysis and Optimization. 2020. Vol. 41. № 7. P. 822–849.

[5] *Frankowska H., Olech Ch.* R-convexity of the integral of the set-valued function // Contributions to analysis and geometry, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD. 1981. P. 117–129.

[6] *Балашов М. В.* Сильная выпуклость множеств достижимости линейных систем // Матем. сборник. 2022. В печати.

[7] *Balashov M. V.* The Gradient Projection Algorithm for Smooth Sets and Functions in Nonconvex Case // Set-Valued and Variational Analysis. 2021. Vol. 29. P. 341–360.