УДК 517.977

Монотонная связность строгих солнц[1]

А. Р. Алимов (Москва, Россия)
alexey.alimov-msul@yandex.ru

Дается характеризация трехмерных банаховых пространств, в которых любое строгое солнце (множество Колмогорова) монотонно линейно связно. А именно, в трехмерном нормированном пространстве X любое строгое солнце монотонно линейно связно, если и только если выполнено одно из следующих двух условий: пространство X гладко; $X = Y \oplus_\infty \mathbb{R}$ (т.е. единичная сфера пространства X – цилиндр).

Ключевые слова: наилучшее приближение, монотонно линейно связное множество, солнце, строгое солнце.

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621.

Monotone path-connectedness of strict suns[1]

A. R. Alimov (Moscow, Russia)
alexey.alimov-msul@yandex.ru

We characterize the three-dimensional Banach spaces in which any strict sub is monotone path-connected. Namely, we show that in a three-dimensional space X any strict sun is monotone path-connected if and only if one of the two conditions is satisfied: the space X is smooth or $X = Y \oplus_\infty \mathbb{R}$, i.e., the unit sphere of the space X is a cylinder.

Keywords: best approximation, monotone path-connected set, sun, strict sun.

Acknowledgements: the paper was published with the financial support of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation as part of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under the agreement no. 075-15-2019-1621.

Величиной наилучшего приближения, или расстоянием от заданного элемента x линейного нормированного пространства X до заданного непустого множества $M \subset X$, называется величина $\rho(x, M) := \inf_{y\in M} \|x - y\|$. Множество всех *ближайших точек* (элементов наилучшего приближения) из множества M для заданного $x \in X$ обозначается $P_M x$. Иными словами, $P_M x := \{y \in M \mid \rho(x, M) = \|x - y\|\}$.

Для непустого подмножества $M \subset X$ точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой солнечности*, если существует точка $y \in P_M x$ (называемая *точкой светимости*) такая, что $y \in P_M\big((1-\lambda)y+\lambda x\big)$ для всех $\lambda \geqslant 0$. Точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой строгой солнечности*, если $P_M x \neq \varnothing$ и условие $y \in P_M\big((1 - \lambda)y + \lambda x\big)$ для всех $\lambda \geqslant 0$ выполнено для любой точки $y \in P_M x$. Множество $M \subset X$ называется *солнцем* (соответственно *строгим солнцем*), если каждая точка $x \in X \setminus M$ является точкой солнечности (соответственно строгой солнечности) для M.

«Солнца» являются наиболее естественными объектами, для которых выполнен обобщенный критерий Колмогорова элемента наилучшего приближения (см. [1]). Им присущи те или иные свойства отделимости: шар можно отделить от такого множества посредством большего шара или опорного конуса (см., например, [1]).

Непрерывная кривая $k(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, в линейном нормированном пространстве X называется *монотонной*, если скалярная функция $f(k(\tau))$ является монотонной по τ для любого функционала $f \in \operatorname{ext} S^*$ (здесь и ниже $\operatorname{ext} S^*$ – множество крайних (экстремальных) точек единичной сферы S^* сопряженного пространства). Замкнутое множество называется *монотонно линейно связным* (см. [1]), если любые две его точки можно соединить непрерывной монотонной кривой, лежащей в этом множестве. Монотонная линейная связность является более слабым свойством, чем выпуклость, и более сильным, чем линейная связность.

Целью работы является характеризация трехмерных пространств, в которых любое строгое солнце монотонно линейно связно (теорема 1). На плоскости, в пространствах ℓ^∞_n и в пространствах вида $Y_1 \oplus_\infty \ldots \oplus_\infty Y_n$, где $\dim Y_i \leqslant 2$, любое солнце монотонно линейно связно. Трехмерные банаховы пространств, в которых любое чебышёвское множество монотонно линейно связно, охарактеризованы А. Р. Алимовым и Б. Б. Бедновым [2]. Трехмерные пространства, в которых любое замкнутое множество с непрерывной (полунепрерывной снизу) метрической проекцией монотонно линейно связно, охарактеризованы А. Р. Алимовым [4]. А. Р. Алимов и И. Г. Царьков [5] установили, что в пространстве $C(Q)$ ограниченно компактное множество является солнцем если и только если оно монотонно линейно связно. По поводу дальнейших результатов см. также [6].

Теорема 1. *В трехмерном нормированном пространстве X строгое солнце монотонно линейно связно, если и только если выполнено одно из следующих двух условий*:

1) *пространство X гладко (т. е. $\operatorname{sm} S = S$)*;

2) *пространство X имеет цилиндрическую норму, т. е. $X = Y \oplus_\infty \mathbb{R}$*, $\dim Y = 2$.

При доказательстве теоремы 1 важную роль играет новый аппарат выпуклости множеств по касательным направлениям единичной сферы [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Алимов А. Р., Царьков И. Г.* Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения // УМН. 2016. Т. 71, № 1. С. 3–84.

[2] *Алимов А. Р., Беднов Б. Б.* Монотонная линейная связность чебышёвских множеств в трехмерных пространствах // Матем. сб. 2021. Т. 212, № 5. С. 37–57.

[3] *Алимов А. Р., Щепин Е. В.* Выпуклость чебышёвских множеств по касательным направлениям // УМН. 2021. Т. 73, № 2. С. 366–368.

[4] *Алимов А. Р.* Выпуклость и монотонная линейная связность множеств с непрерывной метрической проекцией в трехмерных пространствах // Тр. ИММ УрО РАН. 2020. Т. 26, № 2. С. 28–46.

[5] *Царьков И. Г.* Свойства монотонно линейно связных множеств // Изв. РАН. Сер. матем. 2021. Т. 85, № 2. С. 142–171.

[6] *Tsar'kov I. G.* Properties of suns in the spaces L^1 and $C(Q)$ // Russ. J. Math. Phys. 2021. Vol. 28. P. 398–405.