УДК 517.51

Об оценках порядка наилучших M–членных приближений функций многих переменных в анизотропном пространстве Лоренца–Караматы[1]

Г. Акишев (Нур-Султан, Казахстан)

akishev_g@mail.ru

В статье рассматриваются анизотропное пространство Лоренца-Караматы периодических функций многих переменных и класс Никольского-Бесова в этом пространстве. Установлены точные по порядку оценки наилучших M–членных тригонометрических приближений функций из класса Никольского-Бесова по норме другого пространства Лоренца-Караматы.

Ключевые слова: пространство Лоренца-Караматы, класс Никольского-Бесова, M-членное приближение.

Благодарности: работа выполнена в рамках гранта Министерства образования и науки Республики Казахстан (Проект AP 08855579).

On estimates of the order of the best M - term approximations of functions of several variables in the anisotropic Lorentz - Karamata space[1]

G. Akishev (Nur-Sultan, Kazakhstan)

akishev_g@mail.ru

The article consider the anisotropic Lorentz-Karamata space of periodic functions of several variables and the Nikol'skii-Besov class in this space. The order-sharp estimates are established for the best M - term trigonometric approximations of functions from the Nikol'skii-Besov class in the norm of another Lorentz-Karamata space.

Keywords: Lorentz - Karamata space, Nikol'skii-Besov class, M-term approximation.

Acknowledgements: this work was supported by a grant Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Project AP 08855579).

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$–множества натуральных, целых чисел соответственно и $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}^m$—m-мерное евклидово пространство точек $\overline{x} = (x_1, \dots, x_m)$ с вещественными координатами; $\mathbb{T}^m = [0, 2\pi)^m$.

Определение ([1], с. 108). Положительная и измеримая по Лебегу функция $v(t)$ определенная на $[1, +\infty)$ называется слабо меняющейся на $[1, +\infty)$ в смысле Караматы, если для любого $\varepsilon > 0$ функция $t^{\varepsilon} v(t)$ почти возрастает на $[1, \infty)$ и функция $t^{-\varepsilon} v(t)$ почти убывает на $[1, \infty)$ (см. например [1]). Множество таких функций обозначается $SV[1, \infty)$. Для заданной слабо меняющейся функции v на $[1, \infty)$, положим $V(t) = v(1/t)$ для $t \in (0, 1]$.

Пусть $\overline{p} = (p_1, \dots p_m)$, $\overline{\tau} = (\tau_1, \dots \tau_m)$, $p_j, \tau_j \in (1, \infty)$ и функции $v_j \in SV[1, \infty)$, $j = 1, ..., m$. Через $L^*_{\overline{p}, \overline{V}, \overline{\tau}}(\mathbb{T}^m)$ обозначим анизотропное пространство Лоренца–Караматы — всех измеримых по Лебегу функций m переменных f имеющих период 2π по каждой переменной и для которых величина (см. [1])

$$\|f\|^*_{\overline{p}, \bar{V}, \overline{\tau}} :=$$

$$\Big[\int_0^1 \Big[\dots \Big[\int_0^1 \left(f^{*_1, \dots, *_m}(\overline{t})\right)^{\tau_1} \left(\prod_{j=1}^m V_j(t_j) t_j^{\frac{1}{p_j} - \frac{1}{\tau_j}}\right)^{\tau_1} dt_1\Big]^{\frac{\tau_2}{\tau_1}} \dots\Big]^{\frac{\tau_m}{\tau_{m-1}}} dt_m\Big]^{\frac{1}{\tau_m}}$$

конечна, где $f^{*_1, \dots, *_m}(\overline{t}) := f^{*_1, \dots, *_m}(t_1, ..., t_m)$ невозрастающая перестановка функции $|f(2\pi\overline{x})|$ по каждой переменной $x_j \in [0, 1)$ при фиксированных остальных переменных.

$l_{\overline{p}}$ — пространство последовательностей $\{a_{\overline{n}}\}_{\overline{n} \in \mathbb{Z}^m_+}$ действительных чисел с нормой

$$\left\|\left\{a_{\overline{n}}\right\}_{\overline{n} \in \mathbb{Z}^m_+}\right\|_{l_{\overline{p}}} = \Big\{\sum_{n_m=0}^{\infty} \Big[... \Big[\sum_{n_1=0}^{\infty} |a_{\overline{n}}|^{p_1}\Big]^{\frac{p_2}{p_1}} ... \Big]^{\frac{p_m}{p_{m-1}}}\Big\}^{\frac{1}{p_m}} < +\infty,$$

для $1 \le p_j < +\infty$, $j = 1, 2, ..., m$, $\overline{p} = (p_1, \dots, p_m)$ и $\left\|\{a_{\overline{n}}\}\right\|_{l_\infty} = \sup\limits_{\overline{n} \in \mathbb{Z}^m_+} |a_{\overline{n}}|$ для $p_j = \infty$, $j = 1, ..., m$.

Введем обозначения : $a_{\overline{n}}(f)$—коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{T}^m)$ по системе $\{e^{i\langle\overline{n}, \overline{x}\rangle}\}$ и $\langle\overline{y}, \overline{x}\rangle = \sum\limits_{j=1}^m y_j x_j$,

$$\delta_{\overline{s}}(f, \overline{x}) = \sum_{\overline{n} \in \rho(\overline{s})} a_{\overline{n}}(f) e^{i\langle\overline{n}, \overline{x}\rangle},$$

где $\rho(\bar{s}) = \big\{\overline{k} = (k_1, ..., k_m) \in \mathbb{Z}^m : \quad [2^{s_j - 1}] \le |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, ..., m\big\}$, $[y]$–целая часть действительного числа y и $s_j \in \mathbb{Z}_+$.

Рассмотрим функциональный класс Никольского — Бесова

$$S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{V},\overline{\tau},\overline{\theta}}B = \Big\{ f \in L^{*}_{\overline{p},\overline{V},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m) : \quad \Big\| \Big\{ 2^{\langle \overline{s}, \overline{r} \rangle} \| \delta_{\overline{s}}(f) \|^{*}_{\overline{p},\overline{V},\overline{\tau}} \Big\}_{\overline{s} \in \mathbb{Z}^m_+} \Big\|_{l_{\overline{\theta}}} \leq 1 \Big\},$$

где $\overline{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_m)$, $\overline{r} = (r_1, ..., r_m)$, $1 \leq \theta_j \leq +\infty$, $0 < r_j < +\infty$, $j = 1, ..., m$.

В случае $V_j(t) = 1$ и $\tau_j = p_j = p$, $j = 1, \ldots, m$ класс $S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{V},\overline{\tau}}B$, это известный класс Никольского — Бесова $S^{\overline{r}}_{p,\theta}B$ в пространстве Лебега $L_p(\mathbb{T}^m)$, $1 < p < \infty$ (см. [2], [3]).

Для функции $f \in L^{*}_{\overline{p},\overline{V},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m)$ рассматривается $e_M(f)_{\overline{p},\overline{V},\overline{\tau}}$ – наилучшее M-членное тригонометрическое приближение, $M \in \mathbb{N}$. Если F – некоторый функциональный класс в пространстве $L^{*}_{\overline{p},\overline{V},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m)$, то положим

$$e_M(F)_{\overline{p},\overline{V},\overline{\tau}} = \sup_{f \in F} e_M(f)_{\overline{p},\overline{V},\overline{\tau}}.$$

Точные по порядку оценки наилучших M–членных приближений функций из классов Соболева, Никольского-Бесова, Лизоркина Трибеля хорошо известны (см. например библиографию в [4]).

В докладе будут представлены оценки величины $e_M(S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{V}^{(1)},\overline{\tau}^{(1)},\overline{\theta}}B)_{\overline{q},\overline{V},\overline{\tau}}$. Для формулировки результатов рассмотрим следующие два класса.

Через $SVL[1,\infty)$ обозначим множество всех положительных, измеримых по Лебегу на $[1,\infty)$ функций $v(t)$ определенных на $[1,+\infty)$, для которых функция $t^{-\varepsilon}v(t)$ почти убывает и функция $(\log 2t)^{\varepsilon}v(t) \uparrow$ на $[1,\infty)$ для любого числа $\varepsilon > 0$.

Через $SVL_0[1,\infty)$ обозначим множество всех положительных, измеримых по Лебегу на $[1,\infty)$ почти возрастающих функций $v(t)$, для которых функция $t^{-\varepsilon}v(t)$ почти убывает на $[1,\infty)$ для любого числа $\varepsilon > 0$.

Справедлива

Теорема 1. *Пусть* $\overline{p} = (p_1, \ldots, p_m)$, $\overline{q} = (q_1, \ldots, q_m)$, $\overline{\tau}^{(1)} = (\tau^{(1)}_1, \ldots, \tau^{(1)}_m)$, $\overline{\tau}^{(2)} = (\tau^{(2)}_1, \ldots, \tau^{(2)}_m)$, $\overline{r} = (r_1, \ldots, r_m)$, $\overline{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$ *и* $1 \leqslant \theta_j \leq \infty$, $1 < \tau^{(1)}_j, \tau^{(2)}_j < +\infty$, $1 < p_j < q_j \leqslant 2$, $r_j > \frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}$, $j = 1, ..., m$ *и* $r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} = \min\{r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j} : j = 1, ..., m\}$, $A = \{j : r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j} = r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}},\ j = 1, ..., m\}$, $j_1 = \min\{j \in A\}$ *и функции* $v^{(1)}_j, v^{(2)}_j \in SV[1,\infty)$, $V^{(i)}_j(t) = v^{(i)}_j(1/t)$, $t \in (0,1]$, $j = 1, \ldots, m$, $\overline{V}^{(i)}(t) = (V^{(i)}_1(t), ..., V^{(i)}_m(t))$, $i = 1, 2$.

1. Если $1 < \tau^{(2)}_j < \theta_j \leq +\infty$ *и функции* $v^{(2)}_j / v^{(1)}_j \in SVL[1,\infty)$, $j = 1, ..., m$, *то*

$$e_M\big(S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{V}^{(1)},\overline{\tau}^{(1)},\overline{\theta}}B\big)_{\overline{q},\overline{V}^{(2)},\overline{\tau}^{(2)}}$$

$$\asymp M^{-(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}})}\prod_{j\in A}\frac{V_j^{(2)}(M^{-1})}{V_j^{(1)}(M^{-1})}$$

$$\times(\log M)^{(|A|-1)(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}})}(\log M)^{\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}(\frac{1}{\tau_j^{(2)}}-\frac{1}{\theta_j})},$$

2. Если $1\leq\theta_j=\theta\leqslant\tau_j^{(2)}=\tau^{(2)}<+\infty$*,* $j=1,...,m$*, то*

$$e_M\big(S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{V}^{(1)},\overline{\tau}^{(1)},\overline{\theta}}B\big)_{\overline{q},\overline{V}^{(2)},\overline{\tau}^{(2)}}\asymp M^{-\left(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}}\right)}\prod_{j\in A}\frac{V_j^{(2)}(M^{-1})}{V_j^{(1)}(M^{-1})}$$

$$\times(\log M)^{(|A|-1)(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}}+\frac{1}{\tau^{(2)}}-\frac{1}{\theta})_+}$$

в случаях $\frac{v_j^{(2)}}{v_j^{(1)}}\in SV[1,\infty)$*,* $j=1,...,m$ *и* $A\setminus\{j_1\}=\emptyset$ *или* $\frac{v_j^{(2)}}{v_j^{(1)}}\in SVL_0[1,\infty)$*,* $j=1,...,m$ *и множество* $A\setminus\{j_1\}\neq\emptyset$*, для* $M\in\mathbb{N}$*, таких, что* $M>M_0$*, где* M_0 *некоторое положительное число большее* 1*. Здесь* $|A|$ *— количество элементов множества* A *и* $y_+=\max\{y,\ 0\}$*.*

Замечание. В случае $V_j^{(1)}(t)=V_j^{(2)}(t)=1$, $t\in(0,1]$ и $p_j=\tau_j^{(1)}=p$, $q_j=\tau_j^{(2)}=q$, $\theta_j=\theta$ для $j=1,...,m$ и $r_1=...=r_\nu<r_{\nu+1}\leq...\leq r_m$ из теоремы 1 следуют ранее известные результаты В. Н. Темлякова [5], теорема 2.2 и А.С. Романюка [6], теорема 3.1. Для $V_j^{(1)}(t)=V_j^{(2)}(t)=1$, $t\in(0,1]$, $j=1,...,m$ и $r_1=...=r_\nu<r_{\nu+1}\leq...\leq r_m$ из теоремы 1 следует теорема 3 в [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Edmunds D. E., Evans W. D.* Hardy operators, function spaces and embedding. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2004. 328 p.

[2] *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Труды МИАН СССР. 1989. Т. 187. С. 143–161.

[3] *Аманов Т. И.* Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной. Алма-Ата : Наука, 1976. 224 с.

[4] *Dinh Dũng, Temlyakov V. N., Ullrich T.* Hyperbolic cross approximation. Advanced Courses in Mathematics. CRM Barcelona. (Birkhüser/Springer, Basel/Berlin), 2018. 222 p.

[5] *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Труды МИ АН СССР. 1986. Т. 178. С. 1–112.

[6] *Романюк А. С.* Наилучшие $M-$ членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных // Изв. РАН, сер. мат. 2003. Т. 67, № 2. С. 61–100.

[7] *Акишев Г.* О порядках $M-$членного приближения классов периодических функций // Мат. жур. 2006. Т. 6, № 4. С. 5–14.