ISSN 2658-4948 (Online)

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Саратовский национальный исследовательский государственный
университет имени Н. Г. Чернышевского
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Математический институт имени В. А. Стеклова РАН

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Материалы 21-й международной Саратовской зимней школы
(Саратов, 31 января – 4 февраля 2022 г.)

Выпуск 21

Саратов
2022

УДК 517:518:519:533
ББК 22.161.5
С56

Современные проблемы теории функций и их прило-
С56 **жения:** материалы 21-й международной Саратовской зимней школы. Вып. 21 / редакционная коллегия: А. П. Хромов (главный редактор) [и др.]. — Саратов : Саратовский университет [Издание], 2022. — 339 с. : ил. (1.91 Мб)

ISSN 2658-4948 (Online). — Текст : электронный. — Режим доступа: сововободный. Продолжающиеся издания СГУ на сайте www.sgu.ru.

Минимальные системные требования: операционная система Windows, поддерживаемая производителем; свободное место в оперативной памяти не менее 1.91 Мб; свободное место в памяти хранения (на жестком диске) не менее 1.91 Мб; интерфейс ввода инфор-мации; программа для чтения pdf-файлов (AdobeReader).

Представлены результаты исследований участников конференции по актуальным проблемам современной теории функций действительного и комлексного переменного, гармоническому анализу и преобразованиям Фурье, спектральной теории операторов, задачам оптимизации и негладкому анализу, а также их приложениям.

УДК 517:518:519:533
ББК 22.161.5

Работа издана в авторской редакции

ISSN 2658-4948 (Online)

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Оргкомитет школы:

Председатель:
Кашин Борис Сергеевич, академик Российской академии наук, доктор физико-математических наук, профессор, Москва

Заместители председателя:
Голубов Борис Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, Москва
Коссович Леонид Юрьевич, доктор физико-математических наук, профессор, президент СГУ, Саратов
Чумаченко Алексей Николаевич, доктор географических наук, ректор СГУ, Саратов
Хромов Август Петрович, доктор физико-математических наук, профессор, Саратов

Секретарь:
Крусс Юлия Сергеевна, кандидат-физико математических наук, доцент, Саратов

Члены организационного комитета:
Бердышев Виталий Иванович, академик Российской академии наук, доктор физико-математических наук, профессор, Екатеринбург
Конягин Сергей Владимирович, академик Российской академии наук, доктор физико-математических наук, профессор, Москва
Антонов Николай Юрьевич, профессор Российской академии наук, доктор физико-математических наук, Екатеринбург
Бородин Петр Анатольевич, профессор Российской академии наук, доктор физико-математических наук, Москва
Абанин Александр Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор, Ростов-на-Дону
Бурлуцкая Мария Шаукатовна, доктор физико-математических наук, доцент, Воронеж
Дудов Сергей Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, Саратов
Дьяченко Михаил Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, Москва
Кротов Вениамин Григорьевич, доктор физико-математических наук,

УДК 517.51

Об оценках порядка наилучших M–членных приближений функций многих переменных в анизотропном пространстве Лоренца–Караматы[1]

Г. Акишев (Нур-Султан, Казахстан)

$akishev\_g$@mail.ru

В статье рассматриваются анизотропное пространство Лоренца-Караматы периодических функций многих переменных и класс Никольского-Бесова в этом пространстве. Установлены точные по порядку оценки наилучших M–членных тригонометрических приближений функций из класса Никольского-Бесова по норме другого пространства Лоренца-Караматы.

Ключевые слова: пространство Лоренца-Караматы, класс Никольского-Бесова, M-членное приближение.

Благодарности: работа выполнена в рамках гранта Министерства образования и науки Республики Казахстан (Проект AP 08855579).

On estimates of the order of the best M - term approximations of functions of several variables in the anisotropic Lorentz - Karamata space[1]

G. Akishev (Nur-Sultan, Kazakhstan)

$akishev\_g$@mail.ru

The article consider the anisotropic Lorentz-Karamata space of periodic functions of several variables and the Nikol'skii-Besov class in this space. The order-sharp estimates are established for the best M - term trigonometric approximations of functions from the Nikol'skii-Besov class in the norm of another Lorentz-Karamata space.

Keywords: Lorentz - Karamata space, Nikol'skii-Besov class, M-term approximation.

Acknowledgements: this work was supported by a grant Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Project AP 08855579).

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$–множества натуральных, целых чисел соответственно и $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}^m$—m-мерное евклидово пространство точек $\overline{x} = (x_1, \dots, x_m)$ с вещественными координатами; $\mathbb{T}^m = [0, 2\pi)^m$.

Определение ([1], с. 108). Положительная и измеримая по Лебегу функция $v(t)$ определенная на $[1, +\infty)$ называется слабо меняющейся на $[1, +\infty)$ в смысле Караматы, если для любого $\varepsilon > 0$ функция $t^\varepsilon v(t)$ почти возрастает на $[1, \infty)$ и функция $t^{-\varepsilon} v(t)$ почти убывает на $[1, \infty)$ (см. например [1]). Множество таких функций обозначается $SV[1, \infty)$. Для заданной слабо меняющейся функции v на $[1, \infty)$, положим $V(t) = v(1/t)$ для $t \in (0, 1]$.

Пусть $\overline{p} = (p_1, \dots p_m)$, $\overline{\tau} = (\tau_1, \dots \tau_m)$, $p_j, \tau_j \in (1, \infty)$ и функции $v_j \in SV[1, \infty)$, $j = 1, ..., m$. Через $L^*_{\overline{p}, \overline{V}, \overline{\tau}}(\mathbb{T}^m)$ обозначим анизотропное пространство Лоренца–Караматы — всех измеримых по Лебегу функций m переменных f имеющих период 2π по каждой переменной и для которых величина (см. [1])

$$\|f\|^*_{\overline{p}, \bar{V}, \overline{\tau}} :=$$

$$\Big[\int_0^1 \Big[\dots \Big[\int_0^1 \left(f^{*_1, \dots, *_m}(\overline{t})\right)^{\tau_1} \left(\prod_{j=1}^m V_j(t_j) t_j^{\frac{1}{p_j} - \frac{1}{\tau_j}}\right)^{\tau_1} dt_1\Big]^{\frac{\tau_2}{\tau_1}} \dots\Big]^{\frac{\tau_m}{\tau_{m-1}}} dt_m\Big]^{\frac{1}{\tau_m}}$$

конечна, где $f^{*_1, \dots, *_m}(\overline{t}) := f^{*_1, \dots, *_m}(t_1, ..., t_m)$ невозрастающая перестановка функции $|f(2\pi \overline{x})|$ по каждой переменной $x_j \in [0, 1)$ при фиксированных остальных переменных.

$l_{\overline{p}}$ — пространство последовательностей $\{a_{\overline{n}}\}_{\overline{n} \in \mathbb{Z}^m_+}$ действительных чисел с нормой

$$\left\| \left\{ a_{\overline{n}} \right\}_{\overline{n} \in \mathbb{Z}^m_+} \right\|_{l_{\overline{p}}} = \Big\{ \sum_{n_m=0}^{\infty} \Big[\dots \Big[\sum_{n_1=0}^{\infty} |a_{\overline{n}}|^{p_1} \Big]^{\frac{p_2}{p_1}} \dots \Big]^{\frac{p_m}{p_{m-1}}} \Big\}^{\frac{1}{p_m}} < +\infty,$$

для $1 \le p_j < +\infty$, $j = 1, 2, ..., m$, $\overline{p} = (p_1, \dots, p_m)$ и $\left\| \{a_{\overline{n}}\} \right\|_{l_\infty} = \sup\limits_{\overline{n} \in \mathbb{Z}^m_+} |a_{\overline{n}}|$ для $p_j = \infty$, $j = 1, ..., m$.

Введем обозначения : $a_{\overline{n}}(f)$—коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{T}^m)$ по системе $\{e^{i\langle \overline{n}, \overline{x}\rangle}\}$ и $\langle \overline{y}, \overline{x} \rangle = \sum\limits_{j=1}^m y_j x_j$,

$$\delta_{\overline{s}}(f, \overline{x}) = \sum_{\overline{n} \in \rho(\overline{s})} a_{\overline{n}}(f) e^{i\langle \overline{n}, \overline{x} \rangle},$$

где $\rho(\bar{s}) = \left\{ \overline{k} = (k_1, ..., k_m) \in \mathbb{Z}^m : \quad [2^{s_j - 1}] \le |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, ..., m \right\}$, $[y]$–целая часть действительного числа y и $s_j \in \mathbb{Z}_+$.

Рассмотрим функциональный класс Никольского — Бесова

$$S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{V},\overline{\tau},\overline{\theta}}B = \Big\{ f \in L^{*}_{\overline{p},\overline{V},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m) : \quad \Big\| \Big\{ 2^{\langle \overline{s}, \overline{r} \rangle} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|^{*}_{\overline{p},\overline{V},\overline{\tau}} \Big\}_{\overline{s} \in \mathbb{Z}^m_+} \Big\|_{l_{\overline{\theta}}} \leq 1 \Big\},$$

где $\overline{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_m)$, $\overline{r} = (r_1, ..., r_m)$, $1 \leq \theta_j \leq +\infty$, $0 < r_j < +\infty$, $j = 1, ..., m$.

В случае $V_j(t) = 1$ и $\tau_j = p_j = p$, $j = 1, \ldots, m$ класс $S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{V},\overline{\tau}}B$, это известный класс Никольского — Бесова $S^{\overline{r}}_{p,\theta}B$ в пространстве Лебега $L_p(\mathbb{T}^m)$, $1 < p < \infty$ (см. [2], [3]).

Для функции $f \in L^{*}_{\overline{p},\overline{V},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m)$ рассматривается $e_M(f)_{\overline{p},\overline{V},\overline{\tau}}$ – наилучшее M-членное тригонометрическое приближение, $M \in \mathbb{N}$. Если F – некоторый функциональный класс в пространстве $L^{*}_{\overline{p},\overline{V},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m)$, то положим

$$e_M(F)_{\overline{p},\overline{V},\overline{\tau}} = \sup_{f \in F} e_M(f)_{\overline{p},\overline{V},\overline{\tau}}.$$

Точные по порядку оценки наилучших M–членных приближений функций из классов Соболева, Никольского-Бесова, Лизоркина Трибеля хорошо известны (см. например библиографию в [4]).

В докладе будут представлены оценки величины $e_M(S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{V}^{(1)},\overline{\tau}^{(1)},\overline{\theta}}B)_{\overline{q},\overline{V},\overline{\tau}}$. Для формулировки результатов рассмотрим следующие два класса.

Через $SVL[1, \infty)$ обозначим множество всех положительных, измеримых по Лебегу на $[1, \infty)$ функций $v(t)$ определенных на $[1, +\infty)$, для которых функция $t^{-\varepsilon}v(t)$ почти убывает и функция $(\log 2t)^{\varepsilon}v(t) \uparrow$ на $[1, \infty)$ для любого числа $\varepsilon > 0$.

Через $SVL_0[1, \infty)$ обозначим множество всех положительных, измеримых по Лебегу на $[1, \infty)$ почти возрастающих функций $v(t)$, для которых функция $t^{-\varepsilon}v(t)$ почти убывает на $[1, \infty)$ для любого числа $\varepsilon > 0$.

Справедлива

Теорема 1. *Пусть* $\overline{p} = (p_1, \ldots, p_m)$, $\overline{q} = (q_1, \ldots, q_m)$, $\overline{\tau}^{(1)} = (\tau^{(1)}_1, \ldots, \tau^{(1)}_m)$, $\overline{\tau}^{(2)} = (\tau^{(2)}_1, \ldots, \tau^{(2)}_m)$, $\overline{r} = (r_1, \ldots, r_m)$, $\overline{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$ *и* $1 \leqslant \theta_j \leq \infty$, $1 < \tau^{(1)}_j, \tau^{(2)}_j < +\infty$, $1 < p_j < q_j \leqslant 2$, $r_j > \frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}$, $j = 1, ..., m$ *и* $r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} = \min\{r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j} : j = 1, ..., m\}$, $A = \{j : r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j} = r_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}},\ j = 1, ..., m\}$, $j_1 = \min\{j \in A\}$ *и функции* $v^{(1)}_j, v^{(2)}_j \in SV[1, \infty)$, $V^{(i)}_j(t) = v^{(i)}_j(1/t)$, $t \in (0, 1]$, $j = 1, \ldots, m$, $\overline{V}^{(i)}(t) = (V^{(i)}_1(t), ..., V^{(i)}_m(t))$, $i = 1, 2$.

1. Если $1 < \tau^{(2)}_j < \theta_j \leq +\infty$ *и функции* $v^{(2)}_j / v^{(1)}_j \in SVL[1, \infty)$, $j = 1, ..., m$, *то*

$$e_M\big(S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{V}^{(1)},\overline{\tau}^{(1)},\overline{\theta}}B\big)_{\overline{q},\overline{V}^{(2)},\overline{\tau}^{(2)}}$$

$$\asymp M^{-(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}})}\prod_{j\in A}\frac{V_j^{(2)}(M^{-1})}{V_j^{(1)}(M^{-1})}$$

$$\times(\log M)^{(|A|-1)(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}})}(\log M)^{\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}(\frac{1}{\tau_j^{(2)}}-\frac{1}{\theta_j})},$$

2. Если $1\le\theta_j=\theta\leqslant\tau_j^{(2)}=\tau^{(2)}<+\infty$, $j=1,...,m$, *то*

$$e_M\big(S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{V}^{(1)},\overline{\tau}^{(1)},\overline{\theta}}B\big)_{\overline{q},\overline{V}^{(2)},\overline{\tau}^{(2)}}\asymp M^{-\left(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}}\right)}\prod_{j\in A}\frac{V_j^{(2)}(M^{-1})}{V_j^{(1)}(M^{-1})}$$

$$\times(\log M)^{(|A|-1)(r_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}}+\frac{1}{\tau^{(2)}}-\frac{1}{\theta})_+}$$

в случаях $\frac{v_j^{(2)}}{v_j^{(1)}}\in SV[1,\infty)$, $j=1,...,m$ *и* $A\setminus\{j_1\}=\emptyset$ *или* $\frac{v_j^{(2)}}{v_j^{(1)}}\in SVL_0[1,\infty)$, $j=1,...,m$ *и множество* $A\setminus\{j_1\}\neq\emptyset$, *для* $M\in\mathbb{N}$, *таких, что* $M>M_0$, *где* M_0 *некоторое положительное число большее* 1. *Здесь* $|A|$ *— количество элементов множества* A *и* $y_+=\max\{y,\ 0\}$.

Замечание. В случае $V_j^{(1)}(t)=V_j^{(2)}(t)=1$, $t\in(0,1]$ и $p_j=\tau_j^{(1)}=p$, $q_j=\tau_j^{(2)}=q$, $\theta_j=\theta$ для $j=1,...,m$ и $r_1=...=r_\nu<r_{\nu+1}\le...\le r_m$ из теоремы 1 следуют ранее известные результаты В. Н. Темлякова [5], теорема 2.2 и А.С. Романюка [6], теорема 3.1. Для $V_j^{(1)}(t)=V_j^{(2)}(t)=1$, $t\in(0,1]$, $j=1,...,m$ и $r_1=...=r_\nu<r_{\nu+1}\le...\le r_m$ из теоремы 1 следует теорема 3 в [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Edmunds D. E., Evans W. D.* Hardy operators, function spaces and embedding. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2004. 328 p.

[2] *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Труды МИАН СССР. 1989. Т. 187. С. 143–161.

[3] *Аманов Т. И.* Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной. Алма-Ата : Наука, 1976. 224 с.

[4] *Dinh Dũng, Temlyakov V. N., Ullrich T.* Hyperbolic cross approximation. Advanced Courses in Mathematics. CRM Barcelona. (Birkhüser/Springer, Basel/Berlin), 2018. 222 p.

[5] *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Труды МИ АН СССР. 1986. Т. 178. С. 1–112.

[6] *Романюк А. С.* Наилучшие $M-$ членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных // Изв. РАН, сер. мат. 2003. Т. 67, № 2. С. 61–100.

[7] *Акишев Г.* О порядках $M-$членного приближения классов периодических функций // Мат. жур. 2006. Т. 6, № 4. С. 5–14.

УДК 517.977

Монотонная связность строгих солнц[1]

А. Р. Алимов (Москва, Россия)
alexey.alimov-msul@yandex.ru

Дается характеризация трехмерных банаховых пространств, в которых любое строгое солнце (множество Колмогорова) монотонно линейно связно. А именно, в трехмерном нормированном пространстве X любое строгое солнце монотонно линейно связно, если и только если выполнено одно из следующих двух условий: пространство X гладко; $X = Y \oplus_\infty \mathbb{R}$ (т.е. единичная сфера пространства X – цилиндр).

Ключевые слова: наилучшее приближение, монотонно линейно связное множество, солнце, строгое солнце.

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621.

Monotone path-connectedness of strict suns[1]

A. R. Alimov (Moscow, Russia)
alexey.alimov-msul@yandex.ru

We characterize the three-dimensional Banach spaces in which any strict sub is monotone path-connected. Namely, we show that in a three-dimensional space X any strict sun is monotone path-connected if and only if one of the two conditions is satisfied: the space X is smooth or $X = Y \oplus_\infty \mathbb{R}$, i.e., the unit sphere of the space X is a cylinder.

Keywords: best approximation, monotone path-connected set, sun, strict sun.

Acknowledgements: the paper was published with the financial support of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation as part of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under the agreement no. 075-15-2019-1621.

Величиной наилучшего приближения, или расстоянием от заданного элемента x линейного нормированного пространства X до заданного непустого множества $M \subset X$, называется величина $\rho(x, M) := \inf_{y \in M} \|x - y\|$. Множество всех *ближайших точек* (элементов наилучшего приближения) из множества M для заданного $x \in X$ обозначается $P_M x$. Иными словами, $P_M x := \{y \in M \mid \rho(x, M) = \|x - y\|\}$.

Для непустого подмножества $M \subset X$ точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой солнечности*, если существует точка $y \in P_M x$ (называемая *точкой светимости*) такая, что $y \in P_M\big((1-\lambda)y+\lambda x\big)$ для всех $\lambda \geqslant 0$. Точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой строгой солнечности*, если $P_M x \neq \varnothing$ и условие $y \in P_M\big((1-\lambda)y + \lambda x\big)$ для всех $\lambda \geqslant 0$ выполнено для любой точки $y \in P_M x$. Множество $M \subset X$ называется *солнцем* (соответственно *строгим солнцем*), если каждая точка $x \in X \setminus M$ является точкой солнечности (соответственно строгой солнечности) для M.

«Солнца» являются наиболее естественными объектами, для которых выполнен обобщенный критерий Колмогорова элемента наилучшего приближения (см. [1]). Им присущи те или иные свойства отделимости: шар можно отделить от такого множества посредством большего шара или опорного конуса (см., например, [1]).

Непрерывная кривая $k(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, в линейном нормированном пространстве X называется *монотонной*, если скалярная функция $f(k(\tau))$ является монотонной по τ для любого функционала $f \in \operatorname{ext} S^*$ (здесь и ниже $\operatorname{ext} S^*$ – множество крайних (экстремальных) точек единичной сферы S^* сопряженного пространства). Замкнутое множество называется *монотонно линейно связным* (см. [1]), если любые две его точки можно соединить непрерывной монотонной кривой, лежащей в этом множестве. Монотонная линейная связность является более слабым свойством, чем выпуклость, и более сильным, чем линейная связность.

Целью работы является характеризация трехмерных пространств, в которых любое строгое солнце монотонно линейно связно (теорема 1). На плоскости, в пространствах ℓ_n^∞ и в пространствах вида $Y_1 \oplus_\infty \ldots \oplus_\infty Y_n$, где $\dim Y_i \leqslant 2$, любое солнце монотонно линейно связно. Трехмерные банаховы пространств, в которых любое чебышёвское множество монотонно линейно связно, охарактеризованы А. Р. Алимовым и Б. Б. Бедновым [2]. Трехмерные пространства, в которых любое замкнутое множество с непрерывной (полунепрерывной снизу) метрической проекцией монотонно линейно связно, охарактеризованы А. Р. Алимовым [4]. А. Р. Алимов и И. Г. Царьков [5] установили, что в пространстве $C(Q)$ ограниченно компактное множество является солнцем если и только если оно монотонно линейно связно. По поводу дальнейших результатов см. также [6].

Теорема 1. *В трехмерном нормированном пространстве X строгое солнце монотонно линейно связно, если и только если выполнено одно из следующих двух условий*:

1) *пространство X гладко (т. е. $\operatorname{sm} S = S$)*;

2) *пространство X имеет цилиндрическую норму, т. е. $X = Y \oplus_\infty \mathbb{R}$*, $\dim Y = 2$.

При доказательстве теоремы 1 важную роль играет новый аппарат выпуклости множеств по касательным направлениям единичной сферы [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Алимов А. Р., Царьков И. Г.* Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения // УМН. 2016. Т. 71, № 1. С. 3–84.

[2] *Алимов А. Р., Беднов Б. Б.* Монотонная линейная связность чебышёвских множеств в трехмерных пространствах // Матем. сб. 2021. Т. 212, № 5. С. 37–57.

[3] *Алимов А. Р., Щепин Е. В.* Выпуклость чебышёвских множеств по касательным направлениям // УМН. 2021. Т. 73, № 2. С. 366–368.

[4] *Алимов А. Р.* Выпуклость и монотонная линейная связность множеств с непрерывной метрической проекцией в трехмерных пространствах // Тр. ИММ УрО РАН. 2020. Т. 26, № 2. С. 28–46.

[5] *Царьков И. Г.* Свойства монотонно линейно связных множеств // Изв. РАН. Сер. матем. 2021. Т. 85, № 2. С. 142–171.

[6] *Tsar'kov I. G.* Properties of suns in the spaces L^1 and $C(Q)$ // Russ. J. Math. Phys. 2021. Vol. 28. P. 398–405.

УДК 517.9

О некоторых спектральных исследованиях, связанных с теорией обратных задач[1]

М. Алмохамед, И. В. Тихонов
(Москва, Россия)
mssrmtz@gmail.com, ivtikh@mail.ru

В теории обратных задач для эволюционных уравнений встречаются особые спектральные соотношения, представляющие определенный интерес. В настоящей заметке рассматривается одна характерная спектральная задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Дано описание ее спектра в зависимости от выбора параметров в основном краевом условии. Указаны приложения к теории обратных задач. Отдельно обсуждается вопрос о влиянии кратных точек спектра на элементарные решения исходной обратной задачи.

Ключевые слова: спектральная задача, характеристическая функция, распределение нулей, обратная задача, критерий единственности решения, элементарные решения, присоединенные элементарные решения.

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621.

On some spectral studies related to inverse problem theory[1]

M. Almohamed, I. V. Tikhonov
(Moscow, Russia)
mssrmtz@gmail.com, ivtikh@mail.ru

Some special spectral relations often arise in inverse problem theory for evolution differential equations. These relations may be quite interesting. In the note we consider one typical spectral problem for an ordinary differential equation of the second order. A description of its spectrum is given. It depends on a choice of parameters in a main boundary condition. Applications to the theory of inverse problems are pointed out. We discuss separately an influence of multiple points of the spectrum on elementary solutions of the original inverse problem.

Keywords: spectral problem, characteristic function, distribution of zeros, inverse problem, uniqueness criterion, elementary solutions, generalized elementary solutions.

Acknowledgements: the work was supported by Ministry of Education and Science of Russian Federation as part of a program of Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics by agreement No. 075-15-2019-1621.

В теории обратных задач для абстрактных дифференциальных уравнений второго порядка (см. [1]–[5]) встречается спектральная задача специального вида

$$y''(t) = \lambda\, y(t) + 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{1}$$

$$y(0) = y'(0) = 0, \tag{2}$$

$$\alpha y(1) + \beta y'(1) = 0 \tag{3}$$

с фиксированными значениями $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha| + |\beta| > 0$. Здесь λ — спектральный параметр. Требуется найти значения $\lambda \in \mathbb{C}$, при которых задача (1)–(3) имеет решение $y \in C^2[0,1]$.

Из соотношений $(1), (2)$ видно, что такое решение (при фиксированном λ) может быть только одно, причем $y \in C^\infty[0,1]$. Точнее, решение задачи Коши $(1), (2)$ имеет вид

$$y(t,\lambda) = \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}\, t - 1}{\lambda} = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \frac{t^{2j+2}}{(2j+2)!} \tag{4}$$

с производной

$$y_t'(t,\lambda) = \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\, t}{\sqrt{\lambda}} = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \frac{t^{2j+1}}{(2j+1)!}\,. \tag{5}$$

Указанные функции являются целыми как по переменной $t \in \mathbb{R}$, так и по параметру $\lambda \in \mathbb{C}$.

При подстановке $(4), (5)$ в соотношение (3) получаем уравнение

$$\alpha\, \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\lambda} - 1}{\lambda} + \beta\, \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} = 0 \tag{6}$$

относительно неизвестной переменной $\lambda \in \mathbb{C}$. Таким образом, множество спектральных значений задачи (1)–(3) совпадает с множеством корней уравнения (6) или, что эквивалентно, с множеством нулей

$$\Lambda = \Lambda(\alpha,\beta) \subset \mathbb{C} \tag{7}$$

специальной *характеристической функции*

$$L(\lambda) = L(\lambda;\alpha,\beta) \equiv \alpha\, \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\lambda} - 1}{\lambda} + \beta\, \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{8}$$

Отметим другую запись

$$L(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{sh}\frac{\sqrt{\lambda}}{2} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{sh}\frac{\sqrt{\lambda}}{2} + \beta \operatorname{ch}\frac{\sqrt{\lambda}}{2} \right), \tag{9}$$

существенно облегчающую изучение множества (7). Ясно, что результат будет зависеть от выбора параметров $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha| + |\beta| > 0$. Перечислим основные закономерности.

1) При любом выборе значений α, β в множество (7) попадает универсальная серия нулей

$$\lambda_k^{(1)} = -4k^2\pi^2, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

давая спектральные значения задачи (1)–(3) с соответствующими собственными функциями $y_k(t) = (1 - \cos 2k\pi t)/(4k^2\pi^2)$.

2) Случай $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ является особым. Здесь формула (10) дает все нули функции (8), и каждый из нулей имеет кратность два.

3) При $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ нули функции (8) выражаются в виде

$$\lambda_m = -m^2\pi^2, \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{11}$$

причем все они являются простыми. Формула (11) очевидно содержит универсальную серию (10) и дополнительную серию $\lambda_k^{(2)} = -(2k-1)^2\pi^2$ с нумерацией $k \in \mathbb{N}$. Наличие подобной дополнительной серии характерно и для следующего случая «общего положения».

4) При всех $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ характеристическая функция (8) помимо универсальной серии (10) имеет вторую серию нулей

$$\lambda_k^{(2)} = \lambda_k^{(2)}(p), \qquad k \in J = J(p) \subset \mathbb{Z}, \tag{12}$$

зависящую от параметра $p = 2\beta/\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Серию (12) образуют нули элементарной целой функции

$$H(\lambda) = H(\lambda; p) \equiv \frac{2}{\sqrt{\lambda}}\,\operatorname{sh}\frac{\sqrt{\lambda}}{2} + p\,\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\,, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{13}$$

очевидно связанной с последним сомножителем в разложении (9). Множества (10) и (12) не пересекаются. Особый интерес представляет вещественный случай — когда $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Здесь есть определенная разница между положительными и отрицательными значениями p.

5) При $p > 0$ все нули функции (13) являются вещественными, отрицательными и простыми, представимыми в виде

$$-\infty < \ldots < \lambda_{k+1}^{(2)} < \lambda_k^{(2)} < \ldots < \lambda_1^{(2)}. \tag{14}$$

При любом фиксированном $k \in \mathbb{N}$ нуль $\lambda_k^{(2)} = \lambda_k^{(2)}(p)$ строго возрастает с ростом $p \in (0, +\infty)$, непрерывно двигаясь от левой до правой границы в интервале $(-4k^2\pi^2,\, -(2k-1)^2\pi^2)$.

6) При $p < 0$ все нули функции (13) являются вещественными и простыми, представимыми в виде

$$-\infty < \ldots < \lambda_{k+1}^{(2)} < \lambda_k^{(2)} < \ldots < \lambda_1^{(2)} < \lambda_0^{(2)}. \tag{15}$$

При любом фиксированном $k \in \mathbb{N}$ нуль $\lambda_k^{(2)} = \lambda_k^{(2)}(p)$ строго возрастает с ростом $p \in (-\infty, 0)$, непрерывно двигаясь от левой до правой границы в интервале $(-(2k+1)^2\pi^2,\ -4k^2\pi^2)$. Кроме того, имеется специальный нуль $\lambda_0^{(2)} = \lambda_0^{(2)}(p)$, который строго возрастает в интервале $(-\pi^2, +\infty)$, непрерывно двигаясь от левой до правой границы так, что $\lambda_0^{(2)}(p) = 0$ при $p = -1$, $\lambda_0^{(2)}(p) > 0$ при $p \in (-1, 0)$ и $\lambda_0^{(2)}(p) \sim 4/p^2$ при $p \to 0-0$. Как следствие сказанного, получаем такой результат.

7) При любом выборе $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ все нули характеристической функции (8) являются вещественными и простыми. Они состоят из двух счетных серий (10) и (12), причем значения (12) находятся как нули целой функции (13) с параметром $p = 2\beta/\alpha$. В зависимости от того, будет ли $p > 0$ или $p < 0$, нули серии (12) допускают запись в виде (14) или (15) с соответствующими интервалами локализации из пунктов 5) или 6) выше. Справедливо также свойство перемежаемости: между двумя любыми последовательными нулями из серии (12) расположен ровно один нуль из серии (10).

Перечисленные утверждения 1)–7) дают базовое представление о распределении нулей характеристической функции (8), а, следовательно, и о распределении спектральных значений задачи (1)–(3).

Все это находит применение при изучении линейной обратной задачи

$$u''(t) = Au(t) + g, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{16}$$

$$u(0) = u'(0) = 0, \tag{17}$$

$$\alpha u(1) + \beta u'(1) = 0. \tag{18}$$

Соотношения (16)–(18) рассматриваем в комплексном банаховом пространстве E с линейным замкнутым оператором A, заданным на области определения $D(A)$. Функцию $u \in C^2([0,1], E)$ со значениями в $D(A)$ и элемент $g \in E$ считаем неизвестными. Задача (16)–(18) всегда имеет тривиальное решение $u(t) \equiv 0$, $g = 0$. Ставится вопрос о единственности такого решения. Справедлив следующий общий критерий (см. [2]–[5]).

Теорема 1. *Обратная задача* (16)–(18) *с линейным замкнутым оператором* A *имеет только тривиальное решение* $u(t) \equiv 0$, $g = 0$ *тогда и только тогда, когда ни один нуль характеристической функции* (8) *не является собственным значением оператора* A.

Полное доказательство теоремы получается средствами теории целых функций, но «необходимость» в критерии проверяется просто.

Действительно, пусть некоторый нуль $\lambda = a \in \mathbb{C}$ из множества (7) является собственным значением оператора A, т. е. $Af = af$ с собственным вектором $f \in D(A)$, $f \neq 0$. Тогда пара

$$u(t) = y(t,a)f, \qquad g = f \tag{19}$$

дает нетривиальное решение обратной задачи (16)–(18). Для проверки напомним, что функция $y(t,\lambda)$ из формулы (4) при $\lambda = a$ будет удовлетворять всем соотношениям (1)–(3), так как $\lambda = a$ есть нуль характеристической функции (8). Нетривиальные решения вида (19) называем *элементарными решениями* обратной задачи (16)–(18).

Вообще говоря, нельзя исключать, что $\lambda = a$ является кратным нулем характеристической функции (8). Нетрудно убедиться при этом, что кратности нулей не могут быть выше двух. Допустим, что выбран именно такой кратный нуль $\lambda = a$, и он же является кратным собственным значением оператора A в том смысле, что

$$Af = af, \quad Af^+ = af^+ + f \tag{20}$$

с собственным вектором $f \in D(A)$, $f \neq 0$, и присоединенным к нему вектором $f^+ \in D(A^2)$, $f^+ \neq 0$.

Исходя из формулы (4), определим функцию

$$z(t,\lambda) \equiv \frac{dy(t,\lambda)}{d\lambda} = \frac{\sqrt{\lambda}\,t\,\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\,t - 2\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}\,t + 2}{2\lambda^2} = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j\,\frac{(j+1)\,t^{2j+4}}{(2j+4)!},$$

зависящую от $t \in \mathbb{R}$ и $\lambda \in \mathbb{C}$. Это определение вместе с соотношениями

$$\begin{cases} y''_{tt}(t,\lambda) = \lambda y(t,\lambda) + 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ y(0,\lambda) = y'_t(0,\lambda) = 0, \quad \alpha y(1,\lambda) + \beta y'_t(1,\lambda) = L(\lambda) \end{cases} \tag{21}$$

показывает, что

$$\begin{cases} z''_{tt}(t,\lambda) = \lambda z(t,\lambda) + y(t,\lambda), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ z(0,\lambda) = z'_t(0,\lambda) = 0, \quad \alpha z(1,\lambda) + \beta z'_t(1,\lambda) = L'(\lambda) \end{cases} \tag{22}$$

при всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Используя (20)–(22), а также условие $L(a) = L'(a) = 0$, верное для кратного корня $\lambda = a$, нетрудно установить, что пара

$$u(t) = y(t,a)f^+ + z(t,a)f, \qquad g = f^+ \tag{23}$$

дает нетривиальное решение задачи (16)–(18). Решения такого вида будем называть *присоединенными элементарными решениями* обратной задачи. При помощи явных выражений для $y(t,\lambda)$ и $z(t,\lambda)$ функцию $u(t)$ в паре (23) можно записать в виде

$$u(t) = \frac{\operatorname{ch}\sqrt{a}\,t - 1}{a}\,f^{+} + \frac{\sqrt{a}\,t\,\operatorname{sh}\sqrt{a}\,t - 2\operatorname{ch}\sqrt{a}\,t + 2}{2a^2}\,f. \qquad (24)$$

Покажем, как это выглядит на практике.

Рассмотрим обратную задачу (16)–(18) со значениями $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$. Как было отмечено в пункте 2) выше, формула (10) содержит все нули характеристической функции $L(\lambda)$, и каждый из нулей $\lambda_k^{(1)} = -4k^2\pi^2$ имеет кратность два. Выделим один такой нуль с конкретным $k \in \mathbb{N}$ и обозначим его через a. Кроме того, предположим, что $a = -4k^2\pi^2$ есть кратное собственное значение оператора A в смысле (20) с собственным вектором $f = f_k \neq 0$ и присоединенным вектором $f^{+} = f_k^{+} \neq 0$. Тогда данному $a = -4k^2\pi^2$ отвечает элементарное решение вида (19) и присоединенное элементарное решение вида (23).

Укажем явные выражения для компонента $u(t)$ в таких комбинациях. При $a = -4k^2\pi^2$ элементарное решение (19) содержит функцию

$$u(t) = \frac{1}{4k^2\pi^2}\,(1 - \cos 2k\pi t)\,f_k$$

с собственным вектором $f_k \neq 0$. Более сложное присоединенное решение вида (23) содержит функцию

$$u(t) = \frac{1}{16k^4\pi^4}\,(1 - \cos 2k\pi t)\,(f_k + 4k^2\pi^2\,f_k^{+}) - \frac{t}{16k^3\pi^3}\,\sin 2k\pi t \cdot f_k$$

с собственным вектором $f_k \neq 0$ и присоединенным вектором $f_k^{+} \neq 0$. Вывод последней формулы для $u(t)$ получается простой обработкой (24) с учетом конкретного значения $a = -4k^2\pi^2$. Изложенные соображения актуальны на практике: известны примеры «физических» дифференциальных операторов A с бесконечным набором кратных собственных значений по типу (20) (см. [6]).

Возникает вопрос: возможны ли другие соотношения между параметрами $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha| + |\beta| > 0$, при которых характеристическая функция (8) имеем кратные нули? Как следует из пунктов 1)–7) выше, в вещественном случае все исчерпывается примером $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ (который мы уже рассмотрели). Специальное исследование, проведенное авторами совместно с В. Б. Шерстюковым, дополнило картину следующим образом: оказывается, если коэффициенты $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ связаны условием

$$\alpha + (1 + \operatorname{ch} z_0)\beta = 0$$

с некоторым комплексным корнем $z_0 \neq 0$ уравнения $\operatorname{sh} z = z$, то характеристическая функция (8), помимо бесконечного числа простых нулей, имеет ровно один нуль $\lambda = z_0^2$ кратности два. Других возможностей для кратных нулей нет. Подробнее про это — в заметке И. В. Тихонова, В. Б. Шерстюкова, М. Алмохамеда (см. настоящий сборник).

Отметим в заключение, что присоединенные решения вида (23) вызывают интерес в связи с проблемой спектрального синтеза для однородной обратной задачи (16)–(18). Речь идет о представлении произвольного решения $(u(t), g)$ при помощи элементарных решений, соответствующих нулям характеристической функции $L(\lambda)$ и возможным собственным значениям оператора A. В таком случае, при наличии кратных нулей и равных им кратных собственных значений, потребуются не только обычные элементарные решения вида (19), но и присоединенные к ним элементарные решения вида (23).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. N.Y., Basel: Marcel Dekker, 2000. xiv+710 p.

[2] *Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С.* Обратная задача для дифференциального уравнения в банаховом пространстве и распределение нулей целой функции типа Миттаг–Леффлера // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 5. С. 637–644.

[3] *Алмохамед М.* Критерий единственности решения в линейной обратной задаче с финальным переопределением второго рода // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2019. № 3. С. 50–58.

[4] *Алмохамед М., Тихонов И. В.* Об обратной задаче для эволюционного уравнения второго порядка с финальным переопределением третьего рода // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Воронеж: Изд-во ВГУ, 2021. С. 35–37.

[5] *Алмохамед М., Тихонов И. В.* Единственность решения в модельной обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка // Дифференциальные уравнения, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы. Белгород: ИД «БелГУ» НИУ «БелГУ», 2021. С. 19–21.

[6] *Ильин В. А.* О существовании приведенной системы собственных и присоединенных функций у несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора // Труды МИАН СССР. 1976. Т. 142. С. 148–155.

УДК 517.518.4

О положительности средних сумм синус-рядов с монотонными коэффициентами[1]

Е. Д. Алферова, А. Ю. Попов (Москва, Россия)

elena.alferova@gmail.com

Известно, что суммы некоторых синус-рядов с монотонными коэффициентами принимают отрицательные значения на $(0, \pi)$. В работе доказано, что на «не слишком коротких» отрезках возможные отрицательные значения компенсируются положительными: средние значения суммы произвольного синус-ряда с монотонными коэффициентами положительны на всех отрезках $[\alpha, \beta] \subset (0, \pi)$, если $\beta/\alpha \geq 2$.

Ключевые слова: ряды по синусам, монотонные коэффициенты.

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00584).

On the positivity of the average sums of sine series with monotone coefficients[1]

E. D. Alferova, A. Yu. Popov (Moscow, Russia)

elena.alferova@gmail.com

It is known that sine series with monotone coefficients can have negative values on subsets of $(0, \pi)$. In this paper, we show that for sufficiently long segments possible negative values are always compensated by positive ones. Specifically, we show that a sum of such series has a positive mean over all segments $[a, b] \subset (0, \pi)$ with $b/a \geq 2$.

Keywords: sine series, monotone coefficients.

Acknowledgements: this work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 20-01-00584).

Рассматриваются ряды $g(b; x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$, последовательности коэффициентов которых $b = \{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ монотонно стремятся к нулю: $b_1 > 0$, $b_{k+1} \leq b_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{k \to \infty} b_k = 0$. Класс всех таких последовательностей обозначим $\mathfrak{M}$; суммы рядов с коэффициентами из $\mathfrak{M}$ непрерывны на $(0, 2\pi)$, а сами ряды равномерно сходятся на любом отрезке вида $[\delta, 2\pi - \delta]$ $(0 < \delta < \pi)$.

Суммы синус-рядов с коэффициентами из $\mathfrak{M}$ положительны в некоторой правой полуокрестности нуля [1], но размер максимальной такой окрестности существенно зависит от последовательности b [2]. Мы обнаружили следующее явление. При интегрировании суммы синус-ряда с монотонными коэффициентами по «не слишком короткому» отрезку, лежащему на $(0,\pi]$, положительные значения всегда компенсируют отрицательные.

Теорема 1. *При любых* y, $x \in (0,\pi)$, $y \le x/2$ *верно неравенство*

$$\int\limits_y^x g(b;t)\,dt > 0 \quad \forall b \in \mathfrak{M}. \tag{2}$$

Если $x = \pi$, $0 < y < \pi/2$, то неравенство (2) сохраняется. Неравенство $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} g(b;t)\,dt > 0$ верно для любой последовательности $b \in \mathfrak{M}$ за исключением $(b_1, b_1, 0, 0, 0, \ldots)$ — в этом случае интеграл равен нулю.

Теорема 1 оправдывает постановку следующей задачи.

Для любого $x \in (0,\pi]$ найти величину $Y(x)$, равную точной верхней грани значений y, для которых верно соотношение (2). Из теоремы 1 видно, что $Y(\pi) = \pi/2$. При x, отстоящих от точки π «не очень далеко», мы также нашли точное значение $Y(x)$.

Теорема 2. *При* $x \in (\arccos(-3/4), \pi]$ *справедливо равенство*

$$Y(x) = \arccos(-1 - \cos x), \quad Y\left(\arccos(-3/4)\right) = \pi/2.$$

Теорема 3. *При* $x \to 0+$ *справедливо порядковое соотношение*

$$x - Y(x) \asymp x^2.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Hartman P., Wintner A.* On sine series with monotone coefficients // J. London Math. Soc. 1953. Vol. 28. P. 102–104.

[2] *Попов А. Ю.* Оценки наименьшего положительного корня суммы ряда по синусам с монотонными коэффициентами // Матем. заметки. 2014. Т. 96, № 5. С. 747–761.

УДК 519.63

Оптимизация проекционного метода для областей между сферами[1]

Д. К. Андрейченко, К. П. Андрейченко, Д. В. Мельничук (Саратов, Россия)

andreichenkodk@gmail.com, kp_andreichenko@renet.ru, melnichukdv@sgu.ru

Для численного интегрирования уравнений математической физики в областях между концентричными сферами и диффеоморфных им областях предложен вариант проекционного метода Галеркина, позволяющий избежать возникновения особенностей в полюсах сферической системы координат.

Ключевые слова: уравнения математической физики, проекционный метод.

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-37-90017).

Optimization of the projection method for areas between spheres[1]

D. K. Andreichenko, K. P. Andreichenko, D. V. Melnichuk (Saratov, Russia)

andreichenkodk@gmail.com, kp_andreichenko@renet.ru, melnichukdv@sgu.ru

A variant of the Galerkin projection method is proposed for numerical integration of mathematical physics equations in the regions between concentric spheres and diffeomorphic regions, which avoids the occurrence of singularities in the poles of a spherical coordinate system.

Keywords: equations of mathematical physics, projection method.

Acknowledgements: this work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 19-37-90017).

Введение

Математические модели гидродинамических подвесов [1,2] представляют собой связанные посредством граничных условий и условий связи системы обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных при соответствующих начальных условиях (т.н. комбинированные динамические системы). В сферических гидродинамических подвесах [1,2] поддерживающий слой вязкой жидкости занимает область между подвижными сферами, диффеоморфно отображаемую на область между концентричными сферами. В данном случае применение конечно-разностных методов дискретизации уравнений математической физики осложняется особенностями в полюсах сферической системы координат, а применение метода конечных элементов – подвижной границей. Оптимизация проекционного метода Галеркина для областей подобного типа выполняется на основе инвариантности операций векторного анализа.

Основные утверждения

Пусть декартовы (x, y, z) и сферические координаты (r, ϑ, φ) связаны соотношениями $x = r \sin\vartheta \cos\varphi$, $y = r \sin\vartheta \sin\varphi$, $z = r\cos\vartheta$, и в проекциях на декартовы оси $\mathbf{e}_r = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)^T$, $\mathbf{e}_\vartheta = (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, -\sin\vartheta)^T$, $\mathbf{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)^T$. Для скалярного $f = f(r, \vartheta, \varphi)$ и векторного $\mathbf{F} = F_r(r, \vartheta, \varphi)\mathbf{e}_r + F_\vartheta(r, \vartheta, \varphi)\mathbf{e}_\vartheta + F_\varphi(r, \vartheta, \varphi)\mathbf{e}_\varphi$ полей особенности в полюсах $\vartheta = 0, \pi$ операций векторного анализа ∇f, $\nabla \cdot \mathbf{F}$, $\nabla \times \mathbf{F}$ в сферической системе координат исчерпываются особенностями их сферических составляющих $\nabla^{(s)} f = \frac{\partial f}{\partial\vartheta}\mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi$, $\nabla^{(s)} \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\sin\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}(F_\vartheta \sin\vartheta) + \frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}\right)$. Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть компоненты u_ϑ и u_φ векторного поля $\mathbf{u} = u_\vartheta(\vartheta, \varphi)\mathbf{e}_\vartheta + u_\varphi(\vartheta, \varphi)\mathbf{e}_\varphi$, $(\vartheta, \varphi) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}$, $\mathbf{u}|_{\varphi+2\pi} = \mathbf{u}|_\varphi$, $|\mathbf{u}| < \infty$ дважды дифференцируемы, за исключением, возможно, полюсов $\vartheta = 0, \pi$, и $\nabla^{(s)} \cdot \mathbf{u} = 0$, $\nabla^{(s)} \cdot (\mathbf{e}_r \times \mathbf{u}) = 0$. Тогда $\mathbf{u} \equiv 0$.*

Полная в пространстве непрерывных на поверхности единичной сферы функций система ортонормированных сферических гармоник имеет вид $Y_k^{(m)}(\vartheta, \varphi) = s_{km}^{-1/2} P_k^{(m)}(\cos\vartheta)\cos m\varphi$, $m = \overline{0, k}, k = 0, 1, 2, ...$; $Y_k^{(-m)}(\vartheta, \varphi) = s_{km}^{-1/2} P_k^{(m)}(\cos\vartheta)\sin m\varphi$, $m = \overline{1, k}$, $k = 1, 2, 3, ...$; $P_k^{(m)}(z) = \frac{(-1)^k}{2^k k!}(1 - z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{k+m}}{dz^{k+m}}(1 - z^2)^k$, $s_{km} = \frac{2\pi(1+\delta_m^0)}{2k+1}\frac{(k+m)!}{(k-m)!}$.

Пусть компонента u_r векторного поля $\mathbf{u} = u_r(\vartheta, \varphi)\mathbf{e}_r + u_\vartheta(\vartheta, \varphi)\mathbf{e}_\vartheta + u_\varphi(\vartheta, \varphi)\mathbf{e}_\varphi$, $(\vartheta, \varphi) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}$, $\mathbf{u}|_{\varphi+2\pi} = \mathbf{u}|_\varphi$, $|\mathbf{u}| < \infty$ по крайней мере непрерывна на поверхности единичной сферы, а компоненты u_ϑ и u_φ дважды дифференцируемы, за исключением, возможно, полюсов $\vartheta = 0, \pi$. В силу полноты сферических гармоник, из условий

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\vartheta d\vartheta u_r Y_k^{(m)} = 0,\ k = 0, 1, 2, ...;\ m = \overline{-k, k} \tag{1}$$

$$\begin{gathered}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\vartheta d\vartheta Y_k^{(m)} \nabla^{(s)} \cdot \mathbf{u} \equiv -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\vartheta d\vartheta \mathbf{u} \cdot \nabla^{(s)} Y_k^{(m)} = \\ = 0,\ \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\vartheta d\vartheta Y_k^{(m)} \nabla^{(s)} \cdot (\mathbf{e}_r \times \mathbf{u}) \equiv -\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \\ \cdot \int_0^\pi \sin\vartheta d\vartheta \mathbf{e}_r \times \mathbf{u} \cdot \nabla^{(s)} Y_k^{(m)} = 0,\ k = 1, 2, 3, ...,\ m = \overline{-k, k}\end{gathered} \tag{2}$$

(при $k = 0$ условия (2) выполнены тождественно) следует $\mathbf{u} \equiv 0$.

Моделирование сферического подвеса

Математическая модель сферического гидродинамического подвеса [1] после пренебрежения сжимаемостью жидкости и радиальными составляющими локальных ускорений принимает вид:

$$
\begin{aligned}
&\beta[\tfrac{\rho_2}{\rho}-1]\ddot{\mathbf{w}}=\gamma[\tfrac{\rho_2}{\rho}-1](\mathbf{g}-\mathbf{a}_0-\mu_1\mathbf{a}_1)+\tfrac{3}{4\pi}\mathbf{Q}-((k_{1a}\dot{\mathbf{w}}+k_{2a}\mathbf{w})\cdot\\
&\cdot\mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1))\mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1),\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)}=\omega_1^{(0)}\mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}),\boldsymbol{\Omega}_1^{(1)}=B_1(\boldsymbol{\alpha}_1)\dot{\boldsymbol{\alpha}}_1^{(1)}+\omega_1^{(1)}\mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1)+\\
&+\omega_1^{(0)}\mathbf{f}_a(\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)},\boldsymbol{\alpha}_1^{(1)}),\boldsymbol{\Omega}=(\omega_1^{(0)}+\mu_1\omega_1^{(1)})\mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_1)-A(\boldsymbol{\alpha}_1)[B_1(\boldsymbol{\alpha}_2)\dot{\boldsymbol{\alpha}}_2+\\
&+\omega_2\mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha}_2)],\ \boldsymbol{\Omega}_2=(\omega_2,0,0)^T+\boldsymbol{\omega}^{(r)},\ \boldsymbol{\omega}^{(r)}=B(\boldsymbol{\alpha}_2)\dot{\boldsymbol{\alpha}}_2+\\
&+\mu_1A^T(\boldsymbol{\alpha}_2)B(\boldsymbol{\alpha}_1)\dot{\boldsymbol{\alpha}}_1^{(1)},\tfrac{\rho_2}{\rho}(J\dot{\boldsymbol{\Omega}}_2+\boldsymbol{\omega}^{(r)}\times J\boldsymbol{\Omega}_2)=\tfrac{3\beta}{4\pi\sigma}A^T(\boldsymbol{\alpha}_2)A^T(\boldsymbol{\alpha}_1)\mathbf{M}\\
&\mathbf{w}=(w_x,w_y,w_z)^T,\ \boldsymbol{\alpha}_2=(0,\alpha_{2_2},\alpha_{2_3})^T,\ \boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1^{(0)}+\mu_1\boldsymbol{\alpha}_1^{(1)}\\
&J=\mathrm{diag}(J_1,J_2,J_2),\ J_1>J_2
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$$
\begin{aligned}
&h=\beta^{-1}\{[(1+\beta)^2+\beta^2((\mathbf{w}\cdot\mathbf{e}_r)^2-\mathbf{w}^2)]^{1/2}-1\}-\mathbf{w}\cdot\mathbf{e}_r\\
&\mathbf{v}=\beta v_r\mathbf{e}_r+v_\vartheta\mathbf{e}_\vartheta+v_\varphi\mathbf{e}_\varphi,\ v_r=-(1+\beta\xi)^{-2}\int_0^\xi(1+\beta\xi)\nabla^{(s)}\cdot\mathbf{v}d\xi\\
&p=p|_{\xi=0}+\beta\int_0^\xi[v_\vartheta^2+v_\varphi^2-2(\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)}+\mu_1\boldsymbol{\Omega}_1^{(1)})\times\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_r]d\xi
\end{aligned}
\tag{4}
$$

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{\partial v_\vartheta}{\partial t}=S_\vartheta,\ S_\vartheta=-\tfrac{1}{1+\beta\xi}\tfrac{\partial p}{\partial\vartheta}+\tfrac{1}{\sigma}(\tfrac{\partial^2 v_\vartheta}{\partial\xi^2}+2\beta\tfrac{\partial v_\vartheta}{\partial\xi})+\mathcal{F}_\vartheta[\mathbf{v}]\\
&\tfrac{\partial v_\varphi}{\partial t}=S_\varphi,\ S_\varphi=-\tfrac{1}{1+\beta\xi}\tfrac{1}{\sin\vartheta}\tfrac{\partial p}{\partial\varphi}+\tfrac{1}{\sigma}(\tfrac{\partial^2 v_\varphi}{\partial\xi^2}+2\beta\tfrac{\partial v_\varphi}{\partial\xi})+\mathcal{F}_\varphi[\mathbf{v}]\\
&\boldsymbol{\mathcal{F}}[\mathbf{v}]=-\mu_1(1+\beta\xi)\dot{\boldsymbol{\Omega}}_1^{(1)}\times\mathbf{e}_r-\nabla^{(s)}((\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)}+\mu_1\boldsymbol{\Omega}_1^{(1)})\times\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{v})-\\
&-v_r[\tfrac{\partial\mathbf{v}}{\partial\xi}+\beta\mathbf{v}]-2(\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)}+\mu_1\boldsymbol{\Omega}_1^{(1)})\times\mathbf{v}+(\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)}+\mu_1\boldsymbol{\Omega}_1^{(1)})\nabla^{(s)}\cdot(\mathbf{e}_r\times\\
&\times\mathbf{v})+(1-\beta\xi)[(\mathbf{e}_r\times\mathbf{v})\nabla^{(s)}\cdot(\mathbf{e}_r\times\mathbf{v})-\tfrac{1}{2}\nabla^{(s)}(v_\vartheta^2+v_\varphi^2)]+\\
&+\beta^2[\nabla^{(s)}(\nabla^{(s)}\cdot\mathbf{v})-\mathbf{e}_r\times\nabla^{(s)}(\nabla^{(s)}\cdot(\mathbf{e}_r\times\mathbf{v}))]/\sigma\\
&v_\vartheta|_{\xi=0}=-\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{e}_\varphi,\ v_\vartheta|_{\xi=h(\vartheta,\varphi,t)}=-\beta[\dot{\mathbf{w}}-(\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)}+\mu_1\boldsymbol{\Omega}_1^{(1)})\times\mathbf{w}]\cdot\mathbf{e}_\vartheta\\
&v_\varphi|_{\xi=0}=-\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{e}_\vartheta,\ v_\varphi|_{\xi=h(\vartheta,\varphi,t)}=-\beta[\dot{\mathbf{w}}-(\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)}+\mu_1\boldsymbol{\Omega}_1^{(1)})\times\mathbf{w}]\cdot\mathbf{e}_\varphi
\end{aligned}
\tag{5}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{Q}=\int_0^\pi\sin\vartheta d\vartheta\int_0^{2\pi}d\varphi[\tfrac{\beta}{\sigma}(\mathbf{e}_\vartheta\tfrac{\partial v_\vartheta}{\partial\xi}\Big|_{\xi=0}+\mathbf{e}_\varphi\tfrac{\partial v_\varphi}{\partial\xi}\Big|_{\xi=0})-p|_{\xi=0}\mathbf{e}_r]\\
&\mathbf{M}=\tfrac{8}{3}\pi\beta\boldsymbol{\Omega}+\int_0^\pi\sin\vartheta d\vartheta\int_0^{2\pi}d\varphi[\mathbf{e}_\varphi(\partial v_\vartheta/\partial\xi)|_{\xi=0}-\mathbf{e}_\vartheta(\partial v_\varphi/\partial\xi)|_{\xi=0}]
\end{aligned}
\tag{6}
$$

$$
\begin{aligned}
&\nabla^{(s)}\cdot\boldsymbol{\Phi}[\mathbf{v}]=0,\ \boldsymbol{\Phi}[\mathbf{v}]=\int_0^h(1+\beta\xi)(v_\vartheta\mathbf{e}_\vartheta+v_\varphi\mathbf{e}_\varphi)d\xi+\\
&+\tfrac{1}{2}(1+\beta h)^2[\dot{\mathbf{w}}-(\boldsymbol{\Omega}_1^{(0)}+\mu_1\boldsymbol{\Omega}_1^{(1)})\times\mathbf{w}]
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Здесь $(1+\beta\xi,\vartheta,\varphi)$ – сферическая система координат, безразмерные переменные, параметры и функции $\mathbf{e}_a(\boldsymbol{\alpha})$, $\mathbf{f}_a(\boldsymbol{\alpha}^{(0)},\boldsymbol{\alpha}^{(1)})$, $A(\boldsymbol{\alpha})$, $B(\boldsymbol{\alpha})$, $B_1(\boldsymbol{\alpha})$ совпадают с [1]. В качестве начальных условий для (3)-(7) задаются $\mathbf{w}|_{t=0}$, $\dot{\mathbf{w}}|_{t=0}$, $\omega_2|_{t=0}$, $\alpha_{2_2}|_{t=0}$, $\dot{\alpha}_{2_2}|_{t=0}$, $\alpha_{2_3}|_{t=0}$, $\dot{\alpha}_{2_3}|_{t=0}$, $v_\vartheta|_{t=0}$, $v_\varphi|_{t=0}$, $p|_{t=0}$. После перехода к новой независимой координате $x=\xi/h$, $x\in[0,1]$

к преобразованным уравнениям (4)-(7) применялся основанный на (1), (2) вариант проекционного метода Галеркина с представлениями вида

$$\mathbf{v} = \beta v_r \mathbf{e}_r + \nabla^{(s)} U - \mathbf{e}_r \times \nabla^{(s)} V,\ \ p|_{x=0} = \sum_{k=1}^{N_2} \sum_{m=-k}^{k} p_{km}(t) Y_k^{(m)}(\vartheta, \varphi)$$
$$U(x, \vartheta, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{N_1+2} \sum_{k=1}^{N_2} \sum_{m=-k}^{k} U_{nkm}(t) T_n(2x-1) Y_k^{(m)}(\vartheta, \varphi)$$
$$V(x, \vartheta, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{N_1+2} \sum_{k=1}^{N_2} \sum_{m=-k}^{k} V_{nkm}(t) T_n(2x-1) Y_k^{(m)}(\vartheta, \varphi),$$
$$T_n(z) = \cos(n \arccos z),\ \ N_1 \geqslant \tfrac{7}{2}\sigma^{1/4},\ \ N_2 \geqslant \beta^{-2/3}(\tfrac{3}{4}\sigma)^{1/3}$$

Дискретные аналоги уравнений Навье-Стокса и граничных условий (5), уравнения баланса расхода жидкости (7) принимают вид

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int_0^{\pi} \sin\vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dx T_n(2x-1)(\partial \mathbf{v}/\partial t - \mathbf{\Psi}[\mathbf{v}, p]) \cdot \nabla^{(s)} Y_k^{(m)} = 0 \\
&\textstyle\int_0^{\pi} \sin\vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dx T_n(2x-1)\mathbf{e}_r \times (\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{\Psi}[\mathbf{v}, p]) \cdot \nabla^{(s)} Y_k^{(m)} = 0 \\
&\mathbf{\Psi}[\mathbf{v}, p] = S_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta + S_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \tfrac{\dot{h}}{h} x \tfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}, n = \overline{0, N_1}, k = \overline{1, N_2}, m = \overline{-k, k} \\
&\textstyle\sum_{n=0}^{N_1+2} (-1)^n U_{nkm} = 0, \sum_{n=0}^{N_1+2} U_{nkm} = \beta S_{km}^{(r)}, \sum_{n=0}^{N_1+2} (-1)^n V_{nkm} = \\
&= S_{km}^{(v)}, \textstyle\sum_{n=0}^{N_1+2} V_{nkm} = 0,\ k = \overline{1, N_2}, m = -\overline{k, k};\ S_{km}^{(v)} = -\delta_k^1 (\tfrac{4}{3}\pi)^{1/2} \cdot \\
&\cdot (\delta_m^1 \Omega_x + \delta_m^{-1} \Omega_y + \delta_m^0 \Omega_z), (S_{1,1}^{(r)}, S_{1,-1}^{(r)}, S_{1,0}^{(r)})^T = (\tfrac{4}{3}\pi)^{1/2} [(\Omega_1^{(0)} + \\
&+ \mu_1 \Omega_1^{(1)}) \times \mathbf{w} - \dot{\mathbf{w}}],\ S_{km}^{(r)} = 0,\ k = m = 0,\ k = \overline{2, N_2},\ m = \overline{-k, k} \\
&\textstyle\int_0^{\pi} \sin\vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \mathbf{\Phi}[\mathbf{v}] \cdot \nabla^{(s)} Y_k^{(m)} = 0,\ k = \overline{1, N_2},\ m = -\overline{k, k}
\end{aligned} \tag{8}$$

Уравнения (3), (4), (6), (8) представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}), \mathbf{Y} = (w_x, w_y, w_z, \dot{w}_x, \dot{w}_y, \dot{w}_z, \omega_2, \alpha_{2_2}, \alpha_{2_3}, \dot{\alpha}_{2_2}, \dot{\alpha}_{2_3}, U_{nkm},$$
$$n = \overline{1, N_1}, k = \overline{1, N_2}, m = -\overline{k, k}, V_{nkm}, n = \overline{0, N_1}, k = \overline{1, N_2}, m = -\overline{k, k})^T$$

которая интегрируется численно при начальных условиях $\mathbf{Y}|_{t=0} = \mathbf{Y}_0$, соответствующих равновесному состоянию, т.е. $\mathbf{F}(-0, \mathbf{Y}_0) = 0$. Показано, что подвес с легким внутренним телом быстро центрируется при возрастании колебательного числа Рейнольдса, и при внезапном возрастании внешней перегрузки быстро переходит из одного равновесного состояния в другое. Результаты численного моделирования хорошо согласуются с результатами асимптотического интегрирования из работы [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Мельничук Д. В., Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П.* Уточненная математическая модель сферического гидродинамического подвеса // Компьютерные науки и информационные технологии : материалы Междунар. науч. конф. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2018. С. 264–268.

[2] *Andreichenko D. K., Andreichenko K. P., Melnicnuk D. V.* Modeling the Effect Of Centering of a Spherical Hydrodynamic Suspension // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2020. № 52. С. 13–21.

УДК 517.518+517.983

Преддуальные пространства для пространства (p, q)-мультипликаторов и их применение в задаче Стечкина о приближении операторов дифференцирования[1]

В. В. Арестов (Екатеринбург, Россия)

vitalii.arestov@urfu.ru

Будет приведена конструкция преддуального пространства $F_{p,q}$ для пространства $M_{p,q}$ мультипликаторов пары (L_p, L_q) пространств Лебега на $\mathbb{R}^m$, описанная в других терминах в сравнении с преддуальным пространством $A_{p,q}$ A. Figà-Talamanca и G. I. Gaudry (1967). Будет обсуждаться применение пространств $F_{p,q}$ в задаче Стечкина о приближении операторов дифференцирования линейными ограниченными операторами в пространствах Лебега L_γ, $1 \le \gamma \le \infty$, на числовой оси.

Ключевые слова: пространства мультипликаторов, преддуальное пространство, оператор дифференцирования, задача Стечкина, неравенство Колмогорова.

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 22-21-00526).

Predual spaces for the space of (p, q)-multipliers and their application in Stechkin's problem on approximation of differentiation operators[1]

V. V. Arestov (Ekaterinburg, Russia)

vitalii.arestov@urfu.ru

A construction of the predual space $F_{p,q}$ will be given for the space $M_{p,q}$ of multipliers of the pair (L_p, L_q) of Lebesgue spaces on $\mathbb{R}^m$ described in other terms in comparison with the predual space $A_{p,q}$ of A.Figa-Talamanca and G.I.Gaudry (1967). We will discuss the application of the spaces $F_{p,q}$ in Stechkin's problem on the best approximation of differentiation operators by bounded linear operators in the Lebesgue spaces L_γ, $1 \le \gamma \le \infty$, on the real axis.

Keywords: spaces of multipliers, predual space, differentiation operator, Stechkin problem, Kolmogorov inequality.

Acknowledgements: this work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-21-00526).

Основные обозначения

Пусть $\mathbb{R}^m$, $m \ge 1$, есть m-мерное евклидово пространство со скалярным произведением $t\eta = \sum_{j=1}^{m} t_j \eta_j$ точек $t = (t_1, t_2, \ldots, t_m)$, $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$

$\in \mathbb{R}^m$ и нормой $|t| = \sqrt{tt}$. Ниже используются стандартные обозначения классических функциональных комплексных пространств: $L_\gamma = L_\gamma(\mathbb{R}^m)$, $1 \le \gamma < \infty$, — пространство Лебега измеримых на $\mathbb{R}^m$ функций x, у которых $|x|^\gamma$ суммируем на $\mathbb{R}^m$; $L_\infty = L_\infty(\mathbb{R}^m)$ — пространство измеримых существенно ограниченных функций на $\mathbb{R}^m$, $C = C(\mathbb{R}^m)$ — пространство непрерывных ограниченных функций на $\mathbb{R}^m$, и $C_0 = C_0(\mathbb{R}^m)$ — подпространство функций из C, имеющих нулевой предел на бесконечности.

Пусть далее $\mathcal{S}$ есть пространство быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^m$, а $\mathcal{S}'$ — соответствующее двойственное пространство обобщенных функций. Значение функционала $\theta \in \mathcal{S}'$ на элементе $x \in \mathcal{S}$ будем обозначать через $\langle \theta, x \rangle$. Пространство $\mathcal{S}'$ содержит множество $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ функций x, измеримых, локально суммируемых на $\mathbb{R}^m$ и удовлетворяющих условию $\int (1+|t|)^d |x(t)| dt < \infty$ с некоторым $d = d(x) \in \mathbb{R}$; здесь и ниже в интегралах по $\mathbb{R}^m$ множество интегрирования не указывается. Функции $x \in \mathcal{L}$ сопоставляется функционал $x \in \mathcal{S}'$ по формуле $\langle x, \phi \rangle = \int x(t)\phi(t) dt$, $\phi \in \mathcal{S}$.

Преобразование Фурье функций (по крайней мере, из пространства $L = L_1(\mathbb{R}^m)$) определим формулой $\widehat{x}(t) = \int e^{-2\pi t\eta i} x(\eta)\, d\eta$; обратное преобразование Фурье будем обозначать символом $\check{x}$. Преобразование Фурье $\widehat{\theta}$ функционала $\theta \in \mathcal{S}'$ есть функционал $\widehat{\theta} \in \mathcal{S}'$, действующий по формуле $\langle \widehat{\theta}, x \rangle = \langle \theta, \widehat{x} \rangle$, $x \in \mathcal{S}$.

Сопряженность пространства инвариантных операторов

Для $1 \le p, q \le \infty$ обозначим через $\mathcal{T}_{p,q} = \mathcal{T}_{p,q}(\mathbb{R}^m)$ множество линейных ограниченных операторов из $L_p = L_p(\mathbb{R}^m)$ в $L_q = L_q(\mathbb{R}^m)$, инвариантных относительно (любого) сдвига. Свойствам инвариантных ограниченных операторов посвящены обширные исследования (см. [1–3] и приведенную там библиографию). Так известно, что если $p > q$, то [1, теорема 1.1] при $p < \infty$ множество $\mathcal{T}_{p,q}$ состоит лишь из оператора $T \equiv 0$, а при $p = \infty$ сужение оператора $T \in \mathcal{T}_{\infty,q}$ на множество $(L_\infty)_0$ функций из L_∞, имеющих нулевой предел на бесконечности, есть нулевой оператор. В связи с этим ниже будет предполагаться, что $1 \le p \le q \le \infty$.

A. Figà-Talamanca и G. I. Gaudry (1967) в совместной работе [4] доказали, что при $1 \le p \le q < \infty$ пространство $\mathcal{T}_{p,q}(G)$ линейных ограниченных операторов из $L_p(G)$ в $L_q(G)$ на локально компактной абелевой группе G, инвариантных относительно сдвига (точнее, операции группы), является сопряженным пространством для конструктивно описанного ими функционального пространства $A_{p,q} = A_{p,q}(G)$. Точнее, в [5] и [4] были построены функциональные пространства $A_{p,q} = A_{p,q}(G)$ такие, что пространство $\mathcal{T}_{p,q}(G)$ инвариантных операторов изометрически изоморфно двойственному пространству $A^*_{p,q}$ для пространства $A_{p,q} = A_{p,q}(G)$ функций на G, являющихся суммами функциональных рядов

$$h = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu * g_\nu \colon \quad f_\nu \in C_{00}, \quad g_\nu \in C_{00}; \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \|f_\nu\|_{L_p} \|g_\nu\|_{L_{q'}} < \infty, \qquad (1)$$

где $C_{00} = C_{00}(G)$ есть пространство непрерывных функций с компактным носителем на G. Норма элемента (функции) $h \in A_{p,q}$ определяется формулой

$$\|h\|_{A_{p,q}} = \inf \Big\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \|f_\nu\|_{L_p} \|g_\nu\|_{L_{q'}},\ h = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu * g_\nu \Big\};$$

здесь нижняя грань берется по всем представлениям (1) функции h. Имеет место вложение $A_{p,q}(G) \subset L_r(G)$, $1/r = 1/p - 1/q$. Изоморфизм между пространствами $\mathcal{T}_{p,q}(G)$ и $A^*_{p,q}$ осуществляется по следующему правилу: элементу $T \in \mathcal{T}_{p,q}(G)$ сопоставляется функционал $\varphi_T(h) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (Tf_\nu * g_\nu)(0)$, $h \in A_{p,q}$. Двумя годами ранее (1965) А. Фига-Таламанка [5] получил подобный результат для случая $1 < q = p < \infty$.

Относительно пары линейных нормированных пространств X, Y со свойством, что Y является сопряженным для X, т. е. $X^* = Y$, говорят также, что пространство X является преддуальным для Y. В этой терминологии пространство $A_{p,q}(G)$ является преддуальным для пространства $\mathcal{T}_{p,q}(G)$.

Результаты работ [5] и [4] справедливы, в частности, для пространств $\mathcal{T}_{p,q}(\mathbb{R}^m)$ линейных ограниченных операторов из пространства $L_p(\mathbb{R}^m)$ в пространство $L_q(\mathbb{R}^m)$, инвариантных относительно группы сдвигов.

Пространство (p, q)-мультипликаторов и ему предуальное пространство $F_{p,q}$

Известно (см. [1, теорема 1.2] или [3, гл. I, теорема 3.16]), что если $q \ge p$, то на $\mathcal{S}$ оператор $T \in \mathcal{T}_{p,q}$ имеет вид свертки $Tx = \theta * x$, $x \in \mathcal{S}$, с элементом $\theta = \theta_T \in \mathcal{S}'$. Множество $M_{p,q} = \{\theta_T \colon T \in \mathcal{T}_{p,q}\} \subset \mathcal{S}'$ является банаховым пространством относительно нормы $\|\theta_T\|_{M_{p,q}} = \|T\|_{L_p \to L_q}$. Элементы $\theta \in M_{p,q}$, $1 \le p \le q \le \infty$, называют (p, q)-мультипликаторами.

Конструктивное описание мультипликаторов известно лишь в отдельных случаях. Известна структура пространств $M(2, 2)$ и $M(p, \infty) = M(1, p')$ (см., например, [1, § 1.2], [3, гл. 1, § 3]); а именно, справедливы равенства (вместе с равенством норм элементов)

$$M_{2,2} = \widehat{L}_\infty = \{\widehat{\theta}\colon \theta \in L_\infty\},$$

$$M_{p,\infty} = M_{1,p'} = L_{p'} \quad \text{при} \quad 1 \le p < \infty,$$
$$M_{\infty,\infty} = M_{1,1} = V;$$

здесь $V = V(\mathbb{R}^m)$ есть пространство (комплексных) ограниченных борелевских мер на $\mathbb{R}^m$.

При $1 \le p \le q \le \infty$ определим на множестве $\mathcal{S}$ функционал

$$\|\phi\|_{p,q} = \sup\{|\langle\theta,\phi\rangle|\colon \theta \in M_{p,q},\ \|\theta\|_{M_{p,q}} \le 1\}, \quad \phi \in \mathcal{S}. \tag{2}$$

При всех $1 \le p \le q \le \infty$ функционал (2) на множестве $\mathcal{S}$ конечен и является нормой.

При $1 \le p \le q \le \infty$ обозначим через $F_{p,q} = F_{p,q}(\mathbb{R}^m)$ пополнение пространства $\mathcal{S}$ относительно нормы (2). Приведем несколько свойств пространств $F_{p,q}$ для конкретных значений параметров.

Лемма 1. *Пространство $F_{p,q}$ обладает следующими свойствами.*

1. *При $q = \infty$ $(p = 1)$*

$$F(p,\infty) = F(1,p') = L_p, \quad 1 \le p < \infty,$$
$$F(\infty,\infty) = F(1,1) = C_0.$$

2. *При $q = p = 2$*

$$F_{2,2} = \check{L} = \{f \in C_0\colon \widehat{f} \in L\}, \quad \|f\|_{F_{2,2}} = \|\widehat{f}\,\|_L, \quad f \in F_{2,2}.$$

3. *Пусть $q = p$ и $\overline{p} = \max\{p,p'\}$. Пространство $F_{p,p}$ по $\overline{p}$ не убывает, а точнее, если $2 \le \overline{p}_1 \le \overline{p}_2 \le \infty$, то*

$$F_{p_1,p_1} \subset F_{p_2,p_2} \quad \text{и} \quad \|f\|_{F_{p_2,p_2}} \le \|f\|_{F_{p_1,p_1}}, \quad f \in F_{p_1,p_1},$$

в частности, при всех значениях p, $1 \le p \le \infty$,

$$F_{p,p} \subset C_0 \quad \text{и} \quad \|f\|_{F_{p,p}} \ge \|f\|_{C_0}, \quad f \in F_{p.p},$$
$$F_{2,2} \subset F_{p,p} \quad \text{и} \quad \|f\|_{F_{p,p}} \le \|f\|_{F_{2,2}} = \|\widehat{f}\,\|_L, \quad f \in F_{2.2}.$$

Основным в данной работе является следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любых $1 \le p \le q \le \infty$ пространство $M_{p,q}$ является сопряженным для пространства $F_{p,q}$:*

$$F^*_{p,q} = M_{p,q}.$$

Теорему 1 можно, в частности, воспринимать как еще одно доказательство сопряженности пространства $M_{p,q}$, $1 \le p \le q \le \infty$.

Согласно результатам работы [4] и теореме 1 пространства $A_{p,q}(\mathbb{R}^m)$ и $F_{p,q}(\mathbb{R}^m)$, по крайней мере, при $1 \le p \le q < \infty$, имеют одно и то же сопряженное пространство $M_{p,q}$. В общем случае отсюда не следует, что эти два пространства совпадают. Тем не менее, в данной конкретной ситуации имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *При всех* $1 \le p \le q < \infty$ *пространства* $F_{p,q}(\mathbb{R}^m)$ *и* $A_{p,q}(\mathbb{R}^m)$ *совпадают*:

$$F_{p,q}(\mathbb{R}^m) = A_{p,q}(\mathbb{R}^m).$$

При $q = p$ конструкция пространства $F_p = F_{p,p}$ и доказательство теорем 1 и 2 были даны в работе автора [6]. Исследование общего случая $p \le q$ потребовало привлечения дополнительных соображений.

Применение в задаче Стечкина о наилучшем приближении операторов дифференцирования

Пусть p, q, r, s — параметры, удовлетворяющие ограничениям $1 \le p, q, r, s \le \infty$. Для целого $n \ge 1$ определим пространство $W^n_{r,p}$ функций $f \in L_r$, которые $n-1$ раз непрерывно дифференцируемы на оси, производная $f^{(n-1)}$ порядка $n-1$ локально абсолютно непрерывна, а $f^{(n)} \in L_p$. В пространстве $W^n_{r,p}$ выделим класс

$$Q^n_{r,p} = \{f \in W^n_{r,p} \colon \|f^{(n)}\|_{L_p} \le 1\}.$$

Обозначим через $\mathcal{B}(L_r, L_s)$ множество всех линейных ограниченных операторов из L_r в L_s, а через $\mathcal{B}(N; L_r, L_s)$ при $N > 0$ — множество операторов $T \in \mathcal{B}(L_r, L_s)$ с нормой $\|T\|_{L_r \to L_s} \le N$. Пусть $0 \le k < n$ — целые, причем $k > 0$, если $r = s$. Для оператора $T \in \mathcal{B}(L_r, L_s)$ положим

$$U(T) = \sup\{\|f^{(k)} - Tf\|_{L_q} \colon f \in Q^n_{r,p}\};$$

если разность $f^{(k)} - Tf$ не принадлежит пространству L_q, то считаем, что $\|f^{(k)} - Tf\|_{L_q} = \infty$. При $N > 0$ величина

$$E_{n,k}(N) = E_{n,k}(N; r, s; p, q) = \inf\{U(T) \colon T \in \mathcal{B}(N; L_r, L_s)\} \tag{3}$$

есть наилучшее приближение (в пространстве L_q) оператора дифференцирования D^k на классе $Q^n_{r,p}$ множеством линейных ограниченных операторов $\mathcal{B}(N; L_r, L_s)$. Задача Стечкина состоит в вычислении величины (3) и экстремального оператора, на котором в (3) достигается нижняя грань; см. [7] и обзор исследований в этой задаче в [8].

Пусть K есть наилучшая константа в неравенстве

$$\|x^{(k)}\|_C \le K\|x\|_{r,s}^{\alpha}\|x^{(n)}\|_{p,q}^{1-\alpha}, \tag{4}$$

$$\alpha = \frac{n-k+1/q-1/p}{n+1/q-1/p+1/r-1/s}, \quad \beta = 1-\alpha.$$

Теорема 3. *Если $s \ge r \ge 1$, $q \ge p > 1$, причем $s > r$ при $k = 0$, то для любого значения $N > 0$ имеет место равенство*

$$E_{n,k}(N) = \beta\alpha^{\alpha/\beta}K^{1/\beta}N^{-\alpha/\beta},$$

где K — наименьшая константа в (4).

Обсудим случай $p = q = \infty$, $1 \le s = r \le \infty$, исследованный в [9,10]. В этом случае неравенство (4) имеет вид

$$\|x^{(k)}\|_C \le K_{n,k}(r)\|x\|_{L(r,r)}^{\frac{n-k}{n}}\left(\|x^{(n)}\|_{L_\infty}\right)^{\frac{k}{n}}. \tag{5}$$

При $s = r = \infty$ это есть классический вариант неравенства между равномерными нормами производных, изученный А. Н. Колмогоровым. В случае $r = 2$ неравенство (5) принимает вид

$$\|x^{(k)}\|_C \le K_{n,k}(2)\|\widehat{x}\|_{L}^{\frac{n-k}{n}}\left(\|x^{(n)}\|_{L_\infty}\right)^{\frac{k}{n}}. \tag{6}$$

Для наилучших констант в (5) и, в частности, в (6) справедливо [9,10] неравенство $K_{n,k}(r) \le K_{n,k}(\infty)$, $1 \le r \le \infty$. Для нечетных $n \ge 3$ имеет место равенство $K_{n,k}(r) = K_{n,k}(\infty)$, $1 \le r \le \infty$. Для четных $n \ge 2$ это, вообще говоря, уже не так. По крайней мере, при $n = 2$ $(k = 1)$, $r = 2$ неравенство строгое [9]:

$$K_{2,1}(2) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{4}{\pi}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(2\ell+1)^3}\right)^{-1/2} < \ K_{2,1}(\infty) = \sqrt{2}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Хермандер Л.* Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига. М. : Изд-во иностр. лит., 1962. 71 с.

[2] *Larsen R.* An introduction to the theory of multipliers. Berlin etc. : Springer, 1971. 282 p.

[3] *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М. : Мир, 1974. 333 с.

[4] *Figà-Talamanca A., Gaudry G. I.* Density and representation theorems for multipliers of type (p,q) // J. Australian Math. Soc. 1967. Vol. 7, № 1. P. 1–6.

[5] *Figà-Talamanca A.* Translation invariant operators in L^p // Duke. Math. J. 1965. Vol. 32. P. 495–502.

[6] *Арестов В. В.* О сопряженности пространства мультипликаторов // Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. 2019. Т. 25, № 4. С. 3–15.

[7] *Стечкин С. Б.* Наилучшее приближение линейных операторов // Мат. заметки. 1967. Т. 1, вып. 2. С. 137–148.

[8] *Арестов В. В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, вып. 6. С. 89–124.

[9] *Арестов В. В.* Наилучшее равномерное приближение оператора дифференцирования ограниченными в пространстве L_2 операторами // Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. 2018. Т. 24, № 4. С. 34–56.

[10] *Arestov V.* Uniform approximation of differentiation operators by bounded linear operators in the space L_r // Anal. Math. 2020. Vol. 46, № 3. P. 425–445.

УДК 517.9

Некоторые оптимизационные задачи с множеством достижимости линейной управляемой системы[1]

М. В. Балашов (Москва, Россия)
balashov73@mail.ru

Для линейной управляемой системы $x' \in Ax + U$, $x(0) = 0$, где x есть n-мерный вектор, A матрица $n \times n$, U — компакт, определим $M(t)$ — множество достижимости этой системы в момент $t > 0$. Пусть M — выпуклый n-мерный компакт.

Рассматривается задача о том, верно ли равенство $M(t) \cap M = \emptyset$, включение $M(t) \subset M$ и т.п. При некоторых необременительных условиях показана возможность решения такой задачи с помощью метода проекции градиента.

Ключевые слова: сильная выпуклость, равномерная гладкость, условие Лежанского-Поляка-Лоясевича, метод проекции градиента.

Some optimization problems with a reachable set of a linear controled system[1]

M. V. Balashov (Moscow, Russia)
balashov73@mail.ru

For a linear controlled system $x' \in Ax + U$, $x(0) = 0$, where x is an n -dimensional vector, A is a $n \times n$ matrix, U is compact, we define $M(t)$ as the reachable set of this system at the time $t > 0$. Let M be a convex n-dimensional compact.

We consider the problem of whether it is true the equality $M(t) \cap M = \emptyset$, the inclusion $M(t) \subset M$, etc. Under some non-burdensome conditions, the possibility of solving such a problem using the gradient projection method is shown.

Keywords: strong convexity, uniform smoothness, the Lezanski-Polyak-Lojasiewicz condition, the gradient projection method.

Введение

Рассмотрим управляемую систему $x' \in Ax + U$, $x(0) = 0$. Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ — компактное подмножество, содержащее 0. Рассмотрим *множество достижимости* $M(t)$ этой системы в момент $t > 0$, т.е. $M(t) = \{x(t) : \exists u(s) \in U$ – измеримый селектор: $x'(s) = Ax + u(s)$ п.в. $s \in [0, t]\}$. Легко получить, что

$$M(t) = \int_0^t e^{As} U \, ds, \tag{1}$$

где многозначный интеграл понимается в смысле Аумана или Римана, см. детали в [1]. Из выпуклости и замкнутости многозначного интеграла следует, что $M(t)$ есть выпуклый компакт для любого $t > 0$. Отметим, что, в силу теоремы Ляпунова [2], компактное множество U в системе и интеграле можно заменить на его выпуклую оболочку. Поэтому далее будем считать U выпуклым компактом. Кроме того, в силу включения $0 \in U$, множество достижимости монотонно возрастает по включению: если $0 \le t_1 \le t_2$, то $M(t_1) \subset M(t_2)$.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт. Мы рассмотрим следующие задачи.

Задача 1. Для момента $t > 0$ выяснить, верно ли, что $M(t) \cap M = \emptyset$?

Задача 2. Для момента $t > 0$ выяснить, верно ли, что $M(t) \subset M$?

Возможны и другие постановки.

Пусть (x, y) — скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|^2 = (x, x)$, $B_r(0)$ — замкнутый шар радиуса r с центром в нуле. *Опорной функцией* компакта $M \subset \mathbb{R}^n$ называется $s(p, M) = \max_{x \in M}(p, x)$, $p \in \mathbb{R}^n$.

Для выпуклого компакта M и вектора $p \in \mathbb{R}^n$ определим $M(p) = \{x \in M : (p, x) = s(p, M)\}$. Множество $M(p)$ является *субградиентом* опорной функции $\partial s(p, M)$ и называется *опорным элементом* множества M для вектора p [3].

Для множества $M(t)$, зависящего от параметра t (например, множества достижимости), опорный элемент для вектора p будем обозначать $M(t)(p)$.

Напомним, что множество $M \subset \mathbb{R}^n$ *сильно выпукло с радиусом* $R > 0$, если M можно представить в виде пересечения замкнутых шаров радиуса R. Сильная выпуклость выпуклого компакта M с радиусом R эквивалентна условию Липшица градиента опорной функции $M(p)$ на единичной сфере: для всех $\|p\| = \|q\| = 1$ выполнено $\|M(p) - M(q)\| \le R\|p - q\|$ [3, теорема 4.3.2].

Будем говорить, что множество $M \subset \mathbb{R}^n$ *равномерно гладкое с константой* $r > 0$, если M можно представить в виде $M = M_0 + B_r(0)$, где M_0 — выпуклый компакт.

Пусть $\varepsilon > 0$, $S_0 \subset \mathbb{R}^n$ — гладкая поверхность без края, $\overline{x} \in S_0$. Для дифференцируемой функции $f : S_0 + \mathrm{int} B_\varepsilon(0) \to \mathbb{R}$ определим $S = \{x \in S_0 : f(x) \le f(\overline{x})\}$. Пусть S — гладкая поверхность с краем $\partial S = \{x \in S_0 : f(x) = f(\overline{x})\}$. Будем говорить, что на S выполняется *условие Лежанского-Поляка-Лоясевича* (LPL) [4, §3.2] с константой $\mu > 0$, если $\Omega = \mathrm{Arg}\min_{x \in S} f(x) \ne \emptyset$ и для всех $x \in S$ выполнено неравенство

$$\|P_{T_x} f'(x)\|^2 \ge \mu(f(x) - f(\Omega)). \tag{2}$$

Здесь T_x — касательное подпространство к S в точке $x \in S$, P_{T_x} — ортогональный проектор на T_x, $f'(x)$ — градиент функции f в точке $x \in S$.

Основной результат

Мы будем рассматривать ситуации, когда множество достижимости $M(t)$ (1) сильно выпукло с константой R для всех $t \in [0,T]$, $T > 0$. Последнее имеет место, когда множество $e^{As}U$ сильно выпукло с радиусом $R(s) > 0$. Тогда в силу [5] и линейности интеграла по отрезку интегрирования получаем, что $M(t)$ сильно выпукло с радиусом $R = \int\limits_0^T R(s)\,ds$ для всех $t \in [0,T]$.

Отметим, что даже для нестрого выпуклого множества U имеется ряд ситуаций, когда $M(t)$ сильно выпукло. Частично они описаны в работе [6].

Пусть $T > 0$ и для управляемой системы множество достижимости $M(t)$ сильно выпукло с радиусом $R_T > 0$ при всех $t \in [0,T]$. Пусть выпуклый компакт $M \subset \mathbb{R}^n$ равномерно гладкий с константой $r > 0$, т.е. $M = M_0 + B_r(0)$. Потребуем также, что множество M_0 сильно выпукло с радиусом $R_0 > 0$. Рассмотрим при $t \in [0,T]$ множество $Z(t) = M(t) + (-M_0)$. Множество $Z(t)$ сильно выпукло с радиусом $R = R_T + R_0$ как сумма сильно выпуклых множеств [3, пункт 3 предложения 4.3.1]. Очевидно, что равенство $M(t) \cap M = \emptyset$ можно переформулировать так: расстояние от нуля до $Z(t)$ более $r > 0$. Если это верно, то $0 \notin M(t) + (-M)$. На языке опорных функций последний вопрос сводится к решению задачи: для функции $f(p) = s(p, Z(t)) = s(p, M(t))) + s(p, -M_0)$ найти

$$\min_{\|p\|=1} f(p) = J. \tag{3}$$

Если $J < -r$, то расстояние от нуля до $Z(t)$ более r. Если $J \geq -r$, то то расстояние от нуля до $Z(t)$ не более $r > 0$ и значит $0 \in M(t) + (-M)$. Заметим, что $f'(p) = M(t)(p) + (-M_0)(p) = \int\limits_0^t (e^{As}U)(p)\,ds + (-M_0)(p)$, см. [1].

Положим $S_1 = \{p \in \mathbb{R}^n \ : \|p\| = 1\}$.

Теорема 1. *Пусть $\varepsilon \in (0,1)$ и в (3) $J < 0$. При приведенных выше условиях в задаче (3) функция f удовлетворяет условию (LPL) (2) на $S = \{p \in S_1 : f(p) \leq 0\}$ с константой $\mu = |J|$ и имеет в ε-окрестности сферы S_1 липшицев градиент с константой $L_1 = R/(1-\varepsilon)$.*

Доказательство. Пусть $p_0 \in S_1$ — решение (3). В силу необходимого условия экстремума $f(p_0) = (p_0, f'(p_0)) = -\|f'(p_0)\|$. Тогда $P_{T_p} = I - pp^T$

для любого $p \in S_1$ и $\|(I - pp^T)f'(p)\|^2 = \|f'(p)\|^2 - f^2(p)$. Отсюда для любого $p \in S$ имеем

$$\|f'(p)\|^2 - f^2(p) = (\|f'(p)\| - f(p))(\|f'(p)\| + f(p_0) + f(p) - f(p_0)).$$

Из неравенства $f(p) \le 0$ и того, что $f'(p_0)$ — это опорный элемент $Z(t)(p_0)$ с наименьшей нормой, вытекает, что $\|f'(p)\| - f(p) \ge \|f'(p)\| \ge \|f'(p_0)\| = |J|$. Осталось заметить, что $\|f'(p)\| + f(p_0) = \|f'(p)\| - \|f'(p_0)\| \ge 0$.

Для любых ненулевых векторов $p, q \in \mathbb{R}^n$ имеем $\left\|\frac{p}{\|p\|} - \frac{q}{\|q\|}\right\| \le \frac{\|p-q\|}{\sqrt{\|p\|\cdot\|q\|}}$, причем в ε-окрестности S_1 $\|p\| \ge 1 - \varepsilon$, $\|q\| \ge 1 - \varepsilon$. Липшицевость градиента $f'(p)$ в ε-окрестности S_1 следует из оценок

$$\|f'(p) - f'(q)\| \le R\left\|\frac{p}{\|p\|} - \frac{q}{\|q\|}\right\| \le \frac{R\|p-q\|}{\sqrt{\|p\|\cdot\|q\|}} \le \frac{R}{1-\varepsilon}\|p - q\|. \quad \square$$

Как показано в [4, Theorem 2], [7, Theorems 2, 3; Corollary 2], утверждения теоремы 1 достаточно, чтобы проекционный алгоритм $p_1 \in S$, $p_{k+1} = P_{S_1}(p_k - tf'(p_k))$ с достаточно малым шагом $t > 0$ сходился к решению p_0 (3) со скоростью геометрической прогрессии при произвольном выборе начальной точки $p_1 \in S$.

Аналогичный результат имеет место для задачи 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Половинкин Е. С.* Многозначный анализ и дифференциальные включения. М. : Физматлит, 2015. 524 с.

[2] *Ляпунов А. А.* О вполне аддитивных вектор-функциях // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1940. Т. 4, № 6. С. 465–478.

[3] *Половинкин Е. С., Балашов М. В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М. : Физматлит, 2007. 2е изд. 440 с.

[4] *Balashov M. V., Polyak B. T., Tremba A. A.* Gradient Projection and Conditional Gradient Methods for Constrained Nonconvex Minimization // Numerical Functional Analysis and Optimization. 2020. Vol. 41. № 7. P. 822–849.

[5] *Frankowska H., Olech Ch.* R-convexity of the integral of the set-valued function // Contributions to analysis and geometry, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD. 1981. P. 117–129.

[6] *Балашов М. В.* Сильная выпуклость множеств достижимости линейных систем // Матем. сборник. 2022. В печати.

[7] *Balashov M. V.* The Gradient Projection Algorithm for Smooth Sets and Functions in Nonconvex Case // Set-Valued and Variational Analysis. 2021. Vol. 29. P. 341–360.

УДК 517.53

Об одном свойстве корневых множеств функций классов $\mathbf{A}_{\alpha}^{\infty}$, где $\alpha > -1$, на односвязной области комплексной плоскости[1]

В. А. Беднаж, Д. С. Ермакова (Брянск, Россия)
vera.bednazh@mail.ru

В работе доказано, что нули аналитической функции $F \in A_{\alpha}^{\infty}(G), \alpha > -1$, можно выделить, не выходя из пространства $A_{\alpha}^{\infty}(G)$, где G – односвязная область на комплексной плоскости, граница которой содержит более одной точки.

Ключевые слова: единичный круг, аналитическая функция, нули аналитической функции, комплексная плоскость, бесконечное произведение.

On one property of the root sets of functions of classes $\mathbf{A}_{\alpha}^{\infty}$, $\alpha > -1$, on the simply connected domain of the complex plane[1]

V. A. Bednazh, D. S. Ermakova (Bryansk, Russia)
vera.bednazh@mail.ru

It is proved that the zeros of an analytic function $F \in A_{\alpha}^{\infty}(G), \quad \alpha > -1$, can be distinguished without leaving the space $A_{\alpha}^{\infty}(G)$, where G is a simply connected domain on the complex plane whose boundary contains more than one point.

Keywords: unit disk, analytic function, zeros of an analytic function, complex plane, infinite product.

Пусть $D = \{z : \ |z| < 1\}$ – единичный круг на комплексной плоскости, $H(D)$ – множество всех аналитических в D функций. В 1914 году Харди рассмотрел класс $H^p, \quad p > 0$, аналитических функций, удовлетворяющих условию

$$\sup_{0<r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right|^p d\theta < +\infty.$$

На сегодняшний день хорошо изучены корневые множества функций класса H^p. Известно, что если функция $f \in H^p(D), \quad 0 < p < +\infty$, то нули $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ функции подчиняются известному условию Бляшке

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|) < +\infty.$$

Введем в рассмотрение класс функций

$$A_\alpha^\infty(D) = \left\{ f \in H(D):\ |f(z)| \le \frac{c_f}{(1-|z|)^\alpha} \right\},$$

где c_f – положительная постоянная, зависящая только от f, $\quad \alpha > -1$.

В работе Ф. А. Шамояна [1] установлено, что нули аналитической функции можно выделить, не выходя из пространства $A_\alpha^\infty(D)$.

Обобщим этот результат на случай произвольной односвязной области комплексной плоскости.

Обозначим

$$A_\alpha^\infty(G) = \left\{ f \in H(G):\ |F(w)| \le \frac{c_F}{(dist(w, \partial G))^\alpha} \right\},$$

где $dist(w, \partial G)$ – расстояние от точки w до границы области ∂G,
c_F – положительная постоянная, зависящая только от F, $\quad \alpha > -1$.

Теорема 1. Если функция $f \in A_\alpha^\infty(D)$, $\alpha > -1$, и $f(z_k) = 0$, $k = 1, 2, ..., z_k \in D$, тогда функция $\frac{f}{\tilde{B}} \in A_\alpha^\infty(D)$, где $\tilde{B}\left(z, z_k\right)$ – бесконечное произведение вида

$$\tilde{B}\left(z, z_k\right) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(2 - b_k\left(z, z_k\right)\right) \cdot b_k\left(z, z_k\right),\ z,\ z_k \in D.$$

Теорема 2. Пусть G – односвязная область на комплексной плоскости, граница которой содержит более одной точки. Если функция $F \in A_\alpha^\infty(G)$, $\quad \alpha > -1$, и $F(w_k) = 0$, $\quad k = 1, 2, ...$, $\quad w_k \in G$, тогда функция $\frac{F}{\tilde{B}} \in A_\alpha^\infty(G)$, где $\tilde{B}\left(w, w_k\right)$ – бесконечное произведение вида

$$\tilde{B}\left(w, w_k\right) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(2 - b_k\left(\psi(w), \psi(w_k)\right)\right) \cdot b_k\left(\psi(w), \psi(w_k)\right),\ w, w_k \in G,$$

$\psi(w)$ – функция, конформно отображающая область G на единичный круг D.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Djrbashian A. E., Shamoyan F. A* Topics in the theory of A_α^p spaces. Leipzig: BSB Teubner, 1988. 199 p.

[2] *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М. : Наука, Гл. ред. физ.- мат. лит., 1958. 736 с.

[3] *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. 630 с.

УДК 519.668

Аналоги быстрого преобразования Хаара[1]

М. С. Беспалов (Владимир, Россия)

bespalov@vlsu.ru

Приведены новые матрично-алгоритмические формы записи быстрого преобразования Хаара, которые допускают p-ичное обобщение. Предложены действительные с прореживанием по частоте и по времени варианты этих обобщений.

Ключевые слова: дискретное преобразование Хаара, ортогональная система, быстрый алгоритм.

Analogues of the fast Haar transform[1]

M. S. Bespalov (Vladimir, Russia)

bespalov@vlsu.ru

New matrix-algorithmic notation forms for the fast Haar transform, which admit p-ary generalization, are presented. Real versions of these generalizations with decimation in frequency and in time are proposed.

Keywords: discrete Haar transform, orthogonal system, fast algorithm.

Среди быстрых алгоритмов цифровой обработки сигналов, к которым относятся алгоритм Кули - Тьюки для дискретного преобразования Фурье (ДПФ) и алгоритмы Гуда для дискретного преобразования Уолша (ДПУ), выделяется алгоритм реализации дискретного преобразования Хаара (ДПХ) в виде *быстрого преобразования Хаара* (БПХ). Если число операций для ДПФ или ДПУ порядка $N = 2^n$ оценивается: величиной N^2 в случае прямого вычисления, величиной $nN = N \log N$ в случае быстрого алгоритма, то для БПХ оно равно N. Причем для ДПФ это операции комплексного сложения плюс комплексного умножения. Различие на порядок в этих цифрах обусловлено особым видом ДПХ, минимизируещем число операций на классе ступенчатых функций.

В обзоре [1] по этой тематике сам алгоритм БПХ не приводится. В [2] отмечено, что кроме основного ДПХ, где прореживание элементов берется по частоте, существует вариант ДПХ с прореживанием по времени.

Алгоритм БПХ по частоте.

Для k от 0 до $n-1$ выполняем

(для j от 0 до $2^{n-k-1}-1$ выполняем

$a_{2^{n-k-1}+j} := x_{2j} - x_{2j+1}, \qquad x_j := x_{2j} + x_{2j+1}). \quad a_0 := x_0.$

Алгоритм БПХ по времени.
Для k от 0 до $n-1$ выполняем
(для j от 0 до $2^{n-k-1}-1$ выполняем

$$\left\{ \begin{array}{c} x_j := x_j + x_{2^{n-k-1}+j} \\ a_{2^{n-k-1}+j} := x_j - x_{2^{n-k-1}+j} \end{array} \right). \qquad a_0 := x_0.$$

В этих алгоритмах в качестве рабочего массива использовали исходный массив. Во втором алгоритме можно ограничиться всего одним массивом, заменив выходной массив $A = \{a_j\}_{j=0}^{N-1}$ на входной массив X, так как результаты операций помещаются в те же ячейки, откуда берутся.

В [1] алгоритм ДПХ (но не БПХ) приведен в унитарной форме матричного варианта. Сравнивать его с быстрыми алгоритмами для ДПФ и ДПУ затруднительно, так как для последних существует матричный вариант быстрого алгоритма в виде факторизации.

Предложим матрично-алгоритмическую конструкцию БПХ. Для этого входной одномерный массив x представим в виде матрицы X^0 нулевого шага (верхний индекс указывает шаг алгоритма) размера $2 \times 2^{n-1}$. Причем, для алгоритма по частоте располагаем x в матрице по столбцам (то есть по парам), для алгоритма по времени располагаем x в матрице по строкам (пол-массива вверху и пол-массива внизу). Сумма строк матрицы X^0 образует входной одномерный массив x^1 следующего шага, а разность этих же строк запоминается в выходном массиве m^1 как набор спектральных характеристик. И так далее.

Матрично-алгоритмический вид БПХ.
Для k от 1 до n выполняем

$$\begin{pmatrix} x^k \\ m^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X^{k-1}, \tag{1}$$

где матрица X^k из двух строк есть представление одномерного массива x^k: по столбцам в случае алгоритма по частоте или по строкам в случае алгоритма по времени.

Выходной одномерный массив (строка) формируется из одномерных массивов разного объема в следующем порядке

$$A = (x^n \; m^n \; m^{n-1} \dots m^1).$$

Предложенная (1) форма $(\cdot) = HX^{k-1}$ алгоритма БПХ допускает следующее p-ичное обобщение, которое строится заменой матрицы H на произвольную невырожденную матрицу Q порядка p с начальной строкой из единиц. Первоначально будем считать, что строки φ_j этой матрицы Q ортогональны. Новые варианты такой матрицы Q для входного одномерного массива $x \in \mathbb{R}^N$ при $N = p^n$ предложены в [3]. Если p само является степенью двойки, то в качестве Q подойдет матрица ДПУ. Если разрешить переход к комплексным числам, то в качестве Q подойдет матрица ДПФ.

Матрично-алгоритмический p-ичный аналог БПХ.

Для k от 1 до n выполняем

$$\begin{pmatrix} x^k \\ M^k \end{pmatrix} = Q \cdot X^{k-1},$$

где матрица X^k размера $p \times p^{n-k-1}$ есть представление одномерного массива x^k (строки): по столбцам в случае алгоритма по частоте или по строкам в случае алгоритма по времени.

Выходной массив $A = (x^n\ M^n\ M^{n-1} \ldots M^1)$.

Форму представления выходного массива A для разных случаев алгоритма следует продумать.

Матрично-алгоритмический обратный p-АБПХ.

Для k от n до 1 выполняем

$$X^{k-1} = Q^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x^k \\ M^k \end{pmatrix},$$

где x^k есть развертка (по столбцам в случае алгоритма по частоте или по строкам в случае алгоритма по времени) матрицы X^k в виде строки.

В случае ортогональности строк φ_j матрицы Q имеем $Q^{-1} = Q^* \cdot D$ с диагональной D, у которой на диагонали расположены числа $\frac{1}{\|\varphi_j\|^2}$. В частности, для алгоритма БПХ (1) с матрицей H имеем $H^{-1} = \frac{1}{2}H$, откуда вытекает, что при обратном БПХ вычисляем полусуммы и полуразности.

В качестве примера рассмотрим случай $p = 4$. В [3] в качестве матриц Q предложены матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \& \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Новый вариант с дискретными функциями Уолша в качестве базиса $\mathbb{R}^4$ с матрицей $Q = H^{\otimes 2}$ в виде кронекерова квадрата матрицы H. В этом случае для матрицы Q можно применить быстрый алгоритм Гуда в любом из двух вариантов. В [4] предложена запись основного алгоритма Гуда с использованием операции b-произведения матриц (символ операции $\oslash$): $H^{\otimes 2} = (H \oslash E)^2$, где E – единичная матрица второго порядка.

Предложенная форма записи предполагает использование параллельных алгоритмов, то есть вычисления в векторной форме. Обозначим (на каждом k-м шаге) строки обрабатываемой матрицы X^{k-1} символами X_0, X_1, X_2 и X_3. В случае матрицы Q вида (2) формулы, выписанные в [3] для элементов, предлагается использовать для строк. В случае $Q = H^{\otimes 2}$ это выглядит так: вычисляем новые строки в порядке $X_0 + X_2$, $X_0 - X_2$, $X_1 + X_3$, $X_1 - X_3$; переобозначаем их прежними символами X_0, X_1, X_2 и X_3; повторяем предыдущий шаг. Число операций над строками: в первом случае – 2 умножения и 7 сложений ($X_2 + X_3$ считаем один раз), во втором – 6 сложений (вычитаний), в третьем – 8 сложений. Простота вычисления во втором случае компенсируется более сложным, чем в первом и третьем случаях, видом обратной матрицы Q^{-1}.

Вариант алгоритма с прореживанием по времени допускает реализацию без формирования матрицы X^{k-1} с p строками на каждом шаге. Можно просто обрабатываемый одномерный массив разбить на p дизъюнктивных одинаковых по объему подмассивов – X_0, X_1, X_2 и X_3 в рассмотренном случае $p = 4$.

Всю конструкцию не сложно переформулировать в терминах ступенчатых функций на единичном отрезке. В этом случае конструкция представляет собой модельный случай p-ичной вейвлетной схемы на классе ступенчатых функций, где тождественная единица есть масштабирующая функция, остальные $p - 1$ функций базиса составляют набор материнских функций, а также выделяются p-ичные сжатия и сдвиги.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Залманзон Л. А.* Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их приложения в управлении, связи и других областях. М. : Наука. 1989. 496 с.

[2] *Машарский С. М., Малоземов В. Н.* Хааровские спектры дискретных сверток // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2000. Т. 40, № 6. С. 954–960.

[3] *Беспалов М. С.* Вейвлетные p-аналоги дискретного преобразования Хаара // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, № 4. С. 520–531.

[4] *Беспалов М. С.* Новые разложения кронекеровой степени по Гуду // Проблемы передачи информации. 2018. Т. 54, № 3. С. 62–66.

УДК 519.63

Об одном итерационном методе решения параболических уравнений[1]

И. В. Бойков, В. А. Рязанцев (Пенза, Россия)
i.v.boykov@gmail.com, ryazantsevv@mail.ru

В работе предложен эффективный численный метод решения прямых и обратных задач для параболических уравнений (линейных и нелинейных), основанный на непрерывном методе решения нелинейных операторных уравнений. Рассматриваются прямые задачи для нелинейных уравнений и обратные задачи для параболических уравнений в следующих постановках: коэффициентная задача, задача восстановления граничных условий, задача восстановления начальных условий.

Ключевые слова: обратные задачи, некорректные задачи, параболические уравнения, теория устойчивости, логарифмическая норма.

On an iterative method for solution of parabolic equations[1]

I. V. Boykov (Penza, Russia), V. A. Ryazantsev (Penza, Russia)
i.v.boykov@gmail.com, ryazantsevv@mail.ru

In this paper we propose an efficient numerical method for solution of direct and inverse problems for parabolic equations (both linear and nonlinear). The method is based on the continuous method for solution of operator equations. We consider direct problems for nonlinear equations and the following statements of inverse problems for parabolic equations: inverse coefficient problem, the problem of recovering boundary conditions and the problem of recovering initial conditions.

Keywords: inverse problems, ill-posed problems, parabolic equations, stability theory, logarithmic norm.

Приближенным методам решения прямых и обратных задач для параболических уравнений посвящена обширная литература [1], [2], [3], [4]. Тем не менее, разработка новых методов решения этих задач является актуальной задачей. Это обусловлено как появлением новых прикладных задач, моделируемых параболическими уравнениями и их системами, так и возрастающими требованиями к точности и устойчивости численных методов.

В течение нескольких последних лет авторы исследуют применимость непрерывного метода решения нелинейных операторных уравнений [5] к решению прямых и обратных задач для параболических и гиперболических уравнений. Выбор этого метода обусловлен двумя обстоятельствами: 1) В отличие от метода Ньютона - Канторовича метод не требует обратимости производной Фреше (или Гато) нелинейного оператора на каждом шаге итерационного процесса. Более того, он осуществим даже при вырождении производной на некотором многообразии; 2) метод основан на теории устойчивости Ляпунова и устойчив при возмущении элементов уравнений и начальных условий.

В работе дан обзор ряда результатов, полученных в этом направлении.

Дадим краткое описание непрерывного операторного метода. Пусть требуется найти решение нелинейного операторного уравнения

$$A(x) - f = 0, \tag{1}$$

где $A: X \to X$ — нелинейный оператор, отображающий банахово пространство X в себя. Уравнению (1) ставится в соответствие задача Коши

$$\frac{dx(s)}{ds} = A\left(x(s)\right) - f, \tag{2}$$

$$x(0) = x_0. \tag{3}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть задача* (2)-(3) *имеет решение* x^*, *и на всякой дифференцируемой кривой* $g(s)$, *расположенной в шаре* $\mathrm{B}\left(x^*, r\right)$, *справедливы следующие условия: 1) при любом* s $(s > 0)$ *выполняется неравенство* $\int\limits_0^s \Lambda\left(A'\left(g(\tau)\right)\right) d\tau \leqslant 0$; *2) имеет место неравенство* $\lim\limits_{s\to\infty} \frac{1}{s}\int\limits_0^s \Lambda\left(A'\left(g(\tau)\right)\right) d\tau \leqslant -\alpha_g$, $\alpha_g > 0$. *Тогда решение задачи Коши* (2)-(3) *при* s, *стремящемся к бесконечности, сходится к решению* x^* *уравнения* (1).

Через $\Lambda\left(A'\right)$ обозначена логарифмическая норма оператора A', являющегося производной Фреше (производной Гато) оператора A. Логарифмическая норма $\Lambda(A)$ оператора $A: X \to X$ определяется [6] посредством формулы $\Lambda(A) = \lim\limits_{h\downarrow 0}\left(\frac{\|I+hA\|-1}{h}\right)$, где символ $\downarrow$ означает монотонное стремление к нулю.

В работе [7] построены численные методы решения обратных коэффициентных задач для одно- и двумерных уравнений теплопроводности в следующих постановках.

Дана задача Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{4}$$

$$u(0, x, y) = \varphi(x, y),$$

где $t \geqslant 0$, $-\infty < x, y < \infty$, и в точке $\left(t^*, x^*, y^*\right)$ известно ее решение $u\left(t^*, x^*, y^*\right)$. Требуется найти коэффициент γ.

Дано уравнение (4) с начальным условием

$$u(0,x,y)=\varphi(x,y), \quad (x,y)\in[0;\ell]^2 \tag{5}$$

и граничными условиями

$$u(t,x,0)=q_1(t,x), \quad u(t,x,\ell)=q_2(t,x), \tag{6}$$

$$u(t,0,y)=q_3(t,y), u(t,\ell,y)=q_4(t,y). \tag{7}$$

Известно решение граничной задачи (4)-(7) в точке (t^*,x^*,y^*). Требуется определить коэффициент γ.

Показано [8], что метод применим для нахождения двух неизвестных постоянных коэффициентов в нелинейном уравнении

$$\frac{\partial u(t,x_1,x_2)}{\partial t}=a\left[\frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2)}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2)}{\partial x_2^2}\right]+bu(t,x_1,x_2),$$

$$u(0,x_1)=\varphi(x_1,x_2),$$

где $-\infty<x_1,x_2<\infty$, $0\leqslant t\leqslant T$, коэффициент a положительный. Предполагается, что дополнительно известны значения решения $u(t^{(1)},x_1^{(1)},x_2^{(1)})$ и $u(t^{(2)},x_1^{(2)},x_2^{(2)})$.

В работе [9] результаты работы [7] распространены на параболические уравнения с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени.

В работе [10] непрерывный операторный метод решения нелинейных операторных уравнений применяется для решения задачи Коши для нелинейного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\Phi\left(t,x,u(t,x)\right), \tag{8}$$

$$u(0,x)=\varphi(x). \tag{9}$$

Предварительно задача (8)-(9) сводится к нелинейному интегральному уравнению

$$u(t,x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi+\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(x,\xi,u(x,\xi)\right)G(x,\xi,t-s)\,d\xi\,ds,$$

где $G(x,\xi,t)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi at}}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right]$.

На основе непрерывного операторного метода авторами также успешно построены эффективные численные методы решения следующих задач для линейных параболических уравнений: 1) восстановления начальных условий в задаче Коши [11]; 2) восстановления граничного условия в первой и второй краевой задаче [12] и 3) восстановления коэффициентов граничных условий в третьей краевой задаче [13].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Кабанихин С. И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск : Сибирское научное изд-во, 2009. 457 с.

[2] *Бек Дж., Блэкуэлл Б., Сент-Клер Ч.* Некорректные обратные задачи теплопроводности. М. : Мир, 1989. 312 с.

[3] *Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В.* Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложения к обратным задачам теплообмена. М. : Наука, Физматлит, 1988. 288 с.

[4] *Hasanov Hasanoğlu A., Romanov V. G.* Introduction to Inverse Problems for Differential Equations. Cham : Springer International Publishing AG, 2017. 261 p.

[5] *Бойков И. В.* Об одном непрерывном методе решения нелинейных операторных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 9. С. 1308–1314.

[6] *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных урвнений в банаховом пространстве. М. : Физматгиз, 1970. 536 с.

[7] *Бойков И. В., Рязанцев В. А.* Об одном приближённом методе определения коэффициента теплопроводности // Журнал СВМО. 2019. Т. 21, № 2. С. 149–163.

[8] *Бойков И. В., Рязанцев В. А.* К приближённому решению обратных коэффициентных задач для уравнения теплопроводности // Материалы XIV Международной научной конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом иоделировании"(Саранск, 9-12 июля 2019 г.). Саранск : Издательство СВМО, 2019. С. 18–21.

[9] *Бойков И. В., Рязанцев В. А.* Об одном приближённом методе решения обратной коэффициентной задачи для уравнения теплопроводности // Сибирский журнал индустриальной математики. 2021. Т. 24, № 2. С. 5–22.

[10] *Бойков И. В., Рязанцев В. А.* О применении непрерывного операторного метода к решению прямой задачи для нелинейных параболических уравнений // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2020. № 1(53). С. 97–112.

[11] *Бойков И. В., Рязанцев В. А.* Численное восстановление начального условия в задачах Коши для линейных параболических и гиперболических уравнений // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2020. № 3(55). С. 68–84.

[12] *Бойков И. В., Рязанцев В. А.* Об одном методе восстановления граничного условия для линейных уравнений параболического типа // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2020. № 4(56). С. 42–56.

[13] *Boykov I. V., Ryazantsev V. A.* On the problem of recovering boundary conditions in the third boundary value problem for parabolic equation // University Proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences. 2021. № 2(58). P. 3–13.

УДК 517.984

Неполные обратные задачи для дифференциальных операторов на графах[1]

Н. П. Бондаренко (Саратов, Россия)
bondarenkonp@info.sgu.ru

В статье приведен обзор результатов по неполным обратным задачам для дифференциальных операторов на графах. Такие задачи состоят в восстановлении коэффициентов дифференциальных выражений (например, потенциалов Штурма-Лиувилля) на некоторых ребрах графа по спектральным характеристикам при условии, что коэффициенты на остальных ребрах известны априори. Обычно в неполных обратных задачах требуется меньше спектральных данных, чем в полных. Рассмотрены дифференциальные операторы как с регулярными коэффициентами, так и с коэффициентами из класса функций-распределений.

Ключевые слова: обратные спектральные задачи, операторы Штурма-Лиувилля на графах, дифференциальные операторы с коэффициентами-распределениями.

Благодарности: работа выполнена в Саратовском государственном университете за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-10001, https://rscf.ru/project/21-71-10001/.

Partial inverse problems for differential operators on graphs[1]

N. P. Bondarenko (Saratov, Russia)
bondarenkonp@info.sgu.ru

The paper is an overview of the results on partial inverse problems for differential operators on graphs. Such problems consist in the recovery of differential expression coefficients (e.g., Sturm-Liouville potentials) on some edges of a graph from spectral characteristics under the assumption that the coefficients on the remaining edges are known a priori. Usually, partial inverse problems require less spectral data than complete inverse problems. We consider differential operators with regular coefficients and also with distribution coefficients.

Keywords: inverse spectral problems, Sturm-Liouville operators on graphs, differential operators with distribution coefficients.

Acknowledgements: this work was implemented in Saratov State University and supported by Grant of the Russian Science Foundation № 21-71-10001, https://rscf.ru/en/project/21-71-10001/.

Доклад посвящен неполным обратным задачам, состоящим в восстановлении дифференциальных операторов по их спектральным характеристикам при условии, что коэффициенты оператора частично известны априори. Классической неполной обратной задачей является задача Хохштадта-Либермана, которая состоит в следующем. Рассмотрим краевую задачу Штурма-Лиувилля:

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0, 1), \tag{1}$$

$$y(0) = y(1) = 0, \tag{2}$$

где $q \in L_2(0,1)$, λ — спектральный параметр. Х. Хохштадт и Б. Либерман [1] показали, что если потенциал $q(x)$ известнен априори на интервале $(0,1/2)$, то $q(x)$ на $(1/2,1)$ однозначно определяется по спектру задачи (1)-(2). Заметим, что согласно результату Г. Борга [2], для единственности восстановления потенциала $q(x)$ на всем интервале $(0,1)$ требуются два спектра краевых задач для уравнения (1) с различными наборами краевых условий.

Рассмотрим некоторые обобщения задачи Хохштадта-Либермана на дифференциальные операторы на геометрических графах. В качестве примера приведем постановки полной и неполной обратных задач для оператора Штурма-Лиувилля на графе-звезде. Пусть G — граф-звезда с $m \geq 3$ ребрами $\{e_j\}_{j=1}^m$ одинаковой длины π. Каждое ребро e_j соединяет внутреннюю вершину v_0 с граничной вершиной v_j. На каждом ребре e_j введем параметр $x_j \in [0,\pi]$. Значение $x_j = 0$ соответствует граничной вершине v_j, а $x_j = \pi$ соответствует внутренней вершине v_0. Рассмотрим на графе G уравнения Штурма-Лиувилля

$$-y_j''(x_j) + q_j(x_j)y_j(x_j) = \lambda y_j(x_j), \quad x_j \in (0,\pi), \quad j = \overline{1,m}, \tag{3}$$

с вещественными потенциалами $q_j \in L_2(0,\pi)$, $j = \overline{1,m}$, и стандартные условия склейки во внутренней вершине:

$$y_1(\pi) = y_j(\pi), \quad j = \overline{2,m}, \qquad \sum_{j=1}^{m} y_j'(\pi) = 0. \tag{4}$$

Обозначим через Λ и Λ_k, $k = \overline{1,m}$, спектры соответствующих краевых задач L и L_k, $k = \overline{1,m}$, для системы уравнений (3) с условиями склейки (4) и следующими условиями в граничных вершинах:

$$\begin{aligned} L: &\quad y_j(0) = 0, \quad j = \overline{1,m}, \\ L_k: &\quad y_k'(0) = 0, \quad y_j(0) = 0, \quad j = \overline{1,m} \setminus k. \end{aligned}$$

Спектры приведенных задач представляют собой счетные множества вещественных собственных значений.

Полная обратная задача для оператора Штурма-Лиувилля на графе-звезде формулируется следующим образом.

Обратная задача 1. *По спектрам Λ, Λ_k, $k = \overline{1,m-1}$, построить потенциалы $\{q_j\}_{j=1}^m$.*

Обратная задача 1 представляет собой частный случай обратной спектральной задачи для операторов Штурма-Лиувилля на графах-деревьях (т.е. графов без циклов), изученной в [3]. В работе [3] доказана единственность решения обратной задачи и разработан конструктивный алгоритм восстановления потенциалов, основанный на методе спектральных отображений (см. [4]). Заметим, что для восстановления потенциалов на всех ребрах графа используется достаточно большое количество данных — m спектров. Вопрос о минимальности этих данных, насколько известно автору, является открытым. В недавних работах [5, 6] получена характеризация спектральных данных операторов Штурма-Лиувилля на графах с регулярными и сингулярными потенциалами, однако используемые в них спектральные данные являются избыточными и содержат данные В. А. Юрко [3] в качестве подмножества.

В случае, если потенциалы известны априори на части ребер графа, количество данных обратной задачи может быть уменьшено. В. Н. Пивоварчик [7] заметил, что если потенциалы q_j заданы на всех ребрах, кроме одного, то потенциал на оставшемся ребре однозначно определяется по одному спектру. Ч.-Ф. Янг [8] показал, что в этом случае требуется не весь спектр, а достаточно $\frac{2}{m}$-й части спектра.

При каждом $j = \overline{1,m}$ обозначим через $S_j(x_j, \lambda)$ решение уравнения (3), удовлетворяющее начальным условиям $S_j(0, \lambda) = 0$, $S'_j(0, \lambda) = 1$. Собственные значения задачи L совпадают с нулями характеристической функции

$$\Delta(\lambda) := \sum_{j=1}^{m} S'_j(\pi, \lambda) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} S_k(\pi, \lambda) \tag{5}$$

и могут быть обозначены через $\{\lambda_{nk}\}_{n \geq 1,\, k=\overline{1,m}}$ с учетом кратностей в соответствии с асимптотическими формулами

$$\sqrt{\lambda_{n1}} = n - \frac{1}{2} + O\left(n^{-1}\right), \tag{6}$$

$$\sqrt{\lambda_{nk}} = n + O\left(n^{-1}\right), \quad k = \overline{2,m}. \tag{7}$$

Неполная обратная задача из [8] формулируется следующим образом.

Обратная задача 2. *Пусть потенциалы $\{q_j\}_{j=2}^m$ заданы априори. По собственным значениям $\{\lambda_{nk}\}_{n \geq 1,\, k=1,2}$ найти q_1.*

Последовательность $\{\lambda_{nk}\}_{n\geq 1, k=1,2}$ может содержать конечное число кратных значений и определяется асимптотиками (6)-(7) неоднозначно. Обратная задача 2 может быть решена по любому набору собственных значений, удовлетворяющих (6)-(7) и дополнительному условию:

(Разделенность): Ни для одной пары (n, k), $n \geq 1$, $k = 1, 2$, не существует индексов i и j, $2 \leq i, j \leq m$, $i \neq j$, при которых $S_i(\pi, \lambda_{nk}) = S_j(\pi, \lambda_{nk}) = 0$.

Если условие (Разделенность) нарушается, и для некоторого собственного значения λ_{nk} существуют индексы $i \neq j$, $i, j \geq 2$, такие, что $S_i(\pi, \lambda_{nk}) = S_j(\pi, \lambda_{nk}) = 0$, то согласно формуле (5) значение λ_{nk} не несет информации о потенциале q_1.

В работе [9] предложен конструктивный метод решения обратной задачи 2, основанный на ее сведении к классической задаче Штурма-Лиувилля не конечном интервале, соответствующем ребру с неизвестным потенциалом. Метод основан на использовании специального базиса Рисса в пространстве вектор-функций, построенного по исходным данным обратной задачи 2. При помощи этого метода в [9] доказаны локальная разрешимость и устойчивость обратной задачи, а также минимальность ее данных.

Впоследствии на основе идей работы [9] был разработан унифицированный подход (см. [10, 11]), применимый к широкому классу неполных обратных задач на интервалах и на графах. Он основан на сведении к задаче Штурма-Лиувилля с целыми аналитическими функциями $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ в одном из краевых условий:

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0, \pi), \tag{8}$$

$$y(0) = 0, \quad f_1(\lambda)y'(\pi) + f_2(\lambda)y(\pi) = 0. \tag{9}$$

Собственные значения краевой задачи (8)-(9) совпадают с нулями целой функции

$$\Delta(\lambda) = f_1(\lambda)S'(\pi, \lambda) + f_2(\lambda)S(\pi, \lambda), \tag{10}$$

где $S(x, \lambda)$ — решение уравнения (8), удовлетворяющее начальным условиям $S(0, \lambda) = 0$, $S'(0, \lambda) = 1$. Сравнивая (5) и (10), нетрудно видеть, что краевая задача L эквивалентна задаче (8)-(9) с $q = q_1$ и

$$f_1(\lambda) := \prod_{k=2}^{m} S_k(\pi, \lambda), \quad f_2(\lambda) := \sum_{j=2}^{m} S_j'(\pi, \lambda) \prod_{\substack{k=2 \\ k \neq j}}^{m} S_k(\pi, \lambda). \tag{11}$$

Поэтому обратная задача 2 сводится к следующей обратной задаче:

Обратная задача 3. *Предположим, что функции $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ известны априори. По подспектру $\{\lambda_n\}$ краевой задачи* (8)-(9) *и числу $\omega := \frac{1}{2}\int_0^\pi q(x)\,dx$ построить потенциал q.*

Функции $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ строятся по формулам (11) по известным потенциалам $\{q_j\}_{j=2}^m$. Число ω может быть найдено из асимптотики заданного подспектра.

В работах [10,11] построена полная теория обратной задачи 3: получены необходимые и достаточные условия единственности ее решения, при дополнительных условиях на подспектр $\{\lambda_n\}$ получены конструктивное решение, глобальная разрешимость, локальная разрешимость и устойчивость. В [12] данная теория перенесена на уравнение Штурма-Лиувилля (8) с сингулярным потенциалом q из класса функций-распределений $W_2^{-1}(0,\pi)$. Отметим, что несколько различных подходов к определению операторов Штурма-Лиувилля с потенциалами из этого класса были преложены в работе А. М. Савчука и А. А. Шкаликова [13]. В частности, уравнение (8) с потенциалом $q \in W_2^{-1}(0,\pi)$ может быть представлено в следующей эквивалентной форме:

$$-(y^{[1]})' - \sigma(x)y^{[1]} - \sigma^2(x)y = \lambda y, \quad x \in (0,\pi), \tag{12}$$

где $q = \sigma'$, $\sigma \in L_2(0,\pi)$, $y^{[1]} = y' - \sigma y$ — квазипроизводная. Аналогично обратной задаче 3, в [12] исследована обратная задача для уравнения (12) с краевыми условиями

$$y(0) = 0, \quad f_1(\lambda)y^{[1]}(\pi) + f_2(\lambda)y(\pi) = 0. \tag{13}$$

Обратная задача 4. *Предположим, что функции* $f_1(\lambda)$ *и* $f_2(\lambda)$ *известны априори. По подспектру* $\{\lambda_n\}$ *краевой задачи* (12)-(13) *построить функцию* σ.

На основе решения обратной задачи 4 в [12] исследована неполная обратная задача для оператора Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами на графе произвольной геометрической структуры, состоящая в восстановлении потенциала на одном граничном ребре по части спектра. Потенциалы на остальных ребрах графа считаются известными.

Изучались другие типы неполных обратных задач для дифференциальных операторов на графах. Например, в [14] построено конструктивное решение обратной задачи для оператора Штурма-Лиувилля на графе-дереве с известным потенциалом на одном внутреннем ребре. Требуется на один спектр меньше, чем при решении полной обратной задачи в [3]. В [15] также рассмотрен оператор Штурма-Лиувилля на графе-дереве и исследована задача восстановления потенциалов на некотором поддереве по частям нескольких спектров при предположении, что потенциалы на оставшемся поддереве заданы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Hochstadt H., Lieberman B.* An inverse Sturm-Liouville problem with mixed given data // SIAM J. Appl. Math. 1978. Vol. 34, № 4. P. 676–680.

[2] *Borg G.* Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe: Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte // Acta Math. 1946. Vol. 78. P. 1–96.

[3] *Юрко В. А.* О восстановлении операторов Штурма–Лиувилля на графах // Матем. заметки. 2006. Т. 79, № 4. С. 619–630.

[4] *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. 384 с.

[5] *Bondarenko N. P.* Spectral data characterization for the Sturm-Liouville operator on the star-shaped graph // Anal. Math. Phys. 2020. Vol. 10. Article number: 83.

[6] *Bondarenko N. P.* Inverse problem solution and spectral data characterization for the matrix Sturm-Liouville operator with singular potential // Anal. Math. Phys. 2021. Vol. 11. Article number: 145.

[7] *Pivovarchik V. N.* Inverse problem for the Sturm-Liouville equation on a simple graph // SIAM J. Math. Anal. 2000. Vol. 32, № 4. P. 801–819.

[8] *Yang C.-F.* Inverse spectral problems for the Sturm-Liouville operator on a d-star graph // J. Math. Anal. Appl. 2010. Vol. 365. P. 742–749.

[9] *Bondarenko N. P.* A partial inverse problem for the Sturm-Liouville operator on a star-shaped graph // Anal. Math. Phys. 2018. Vol. 8, № 1. P. 155–168.

[10] *Bondarenko N. P.* Inverse Sturm-Liouville problem with analytical functions in the boundary condition // Open Math. 2020. Vol. 18, № 1. P. 512–528.

[11] *Bondarenko N. P.* Solvability and stability of the inverse Sturm-Liouville problem with analytical functions in the boundary condition // Math. Meth. Appl. Sci. 2020. Vol. 43, № 11. P. 7009–7021.

[12] *Bondarenko N. P.* A partial inverse Sturm-Liouville problem on an arbitrary graph // Math. Meth. Appl. Sci. 2021. Vol. 44, № 8. P. 6896–6910.

[13] *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Операторы Штурма-Лиувилля с потенциалами-распределениями // Тр. ММО. 2003. Т. 64. С. 159–212.

[14] *Bondarenko N. P., Shieh C.-T.* Partial inverse problems for Sturm-Liouville operators on trees // Proc. Royal Soc. Edinburgh, Sect. A: Math. 2017. Vol. 147, № 5. P. 917–933.

[15] *Bondarenko N. P.* An inverse problem for Sturm-Liouville operators on trees with partial information given on the potentials // Math. Meth. Appl. Sci. 2019. Vol. 42, № 5. P. 1512–1528.

УДК 517.537.32

О связи между нулями и тейлоровскими коэффициентами целой функции[1]

Г. Г. Брайчев (Москва, Россия)

braichev@mail.ru

В теории роста целых функций исторически сложились два направления. Первое связано с вычислением или оценками характеристик роста максимума модуля целой функции (порядок, тип и другие) через коэффициенты ее ряда Тейлора. В работах второго направления исследуется зависимость роста функции от распределения нулей. Цель сообщения — обсудить некоторые непосредственные, прямые связи между нулями и тейлоровскими коэффициентами целой функции, учитывая как классические, так и недавние достижения в рассматриваемой области.

Ключевые слова: нули целой функции, тейлоровские коэффициенты, спрямленные по Адамару коэффициенты.

On the connection between zeros and Taylor coefficients of entire function[1]

G. G. Braichev (Moscow, Russia)

braichev@mail.ru

Historically, two directions have developed in the growth theory of entire functions. The first one has to do with calculation or estimates for growth characteristics of the maximum modulus of an entire function (order, type, and others) in terms of the coefficients of its Taylor series. In works of the second direction, the dependence of the growth of a function on the distribution of zeros is investigated. The purpose of this note is to discuss direct connections between zeros and Taylor coefficients of an entire function, considering both classic and recent advances in the field under consideration.

Keywords: zeros of an entire function, Taylor coefficients, Hadamard regularized coefficients.

Будем рассматривать отличные от многочлена целые функции

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, z^n, \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

с бесконечным числом нулей, считая для простоты $f(0) = 1$. Последовательность нулей такой функции запишем в порядке неубывания модулей и с учетом кратностей. Через $M_f(r)$ обозначим максимум модуля функции f в круге $|z| \leqslant r$.

Скорость стремления к бесконечности максимума модуля $M_f(r)$ связана с асимптотическим поведением последовательности тейлоровских коэффициентов $\Phi = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ и последовательности нулей $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

функции f. Одним из подходов к описанию «совместного изменения» числовых последовательностей Φ и Λ является привлечение известных формул для вычисления порядка, типа и некоторых других характеристик роста целой функции, определенных посредством величины $\ln M_f(r)$. Так, Э. Борель [1] на рубеже девятнадцатого и двадцатого веков ввел порядок и нижний порядок целой функции соответственно равенствами

$$\rho = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}, \qquad \lambda = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}.$$

Значения этих характеристик можно определить по тейлоровским коэффициентам:

$$\rho = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n\ln n}{\ln F_n^{-1}} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln R_n}, \qquad \lambda = \varliminf_{n\to\infty} \frac{n\ln n}{\ln F_n^{-1}} = \varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln R_n}. \qquad (2)$$

Здесь F_n — «спрямленные по Адамару» коэффициенты степенного разложения (1) и $R_n = F_{n-1}/F_n$. Говоря чуть подробнее, $F_n = e^{-G(n)}$, где $y = G(x)$ — уравнение границы выпуклой оболочки множества точек $(n, -\ln|f_n|)$, $n \in \mathbb{N}_0$, представляющей собой так называемую ломаную Ньютона–Адамара. Последовательность $\left\{F_n^{-1}\right\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ логарифмически выпукла, что означает возрастание значений R_n. Если первоначальная последовательность $\{|f_n|\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ логарифмически выпукла, то $|f_n| = F_n$ при всех $n \in \mathbb{N}_0$. В общем же случае такое равенство имеет место в абсциссах вершин ломаной.

Напомним, что показатель сходимости последовательности Λ нулей f может быть найден по формуле

$$\rho_1 = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln|\lambda_n|}. \qquad (3)$$

Если порядок ρ функции f не является целым числом, то показатель сходимости последовательности нулей f совпадает с ее порядком, т. е. $\rho_1 = \rho$. В таком случае, сопоставляя (2) и (3), находим

$$\rho = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln|\lambda_n|} \geqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln R_n} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln R_n}{\ln|\lambda_n|} = \lambda \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln R_n}{\ln|\lambda_n|}.$$

Таким образом, для функций f нецелого порядка ρ выполнено неравенство

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln R_n}{\ln|\lambda_n|} \leqslant \frac{\rho}{\lambda}.$$

Определим теперь тип и нижний тип целой функции относительно веса $h(r)$ соответственно формулами

$$T = T_h(f) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{h(r)}, \qquad t = t_h(f) = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{h(r)}. \tag{4}$$

Если вес h удовлетворяет условию

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{rh'(r)\ln r}{h(r)} = \rho, \tag{5}$$

как, например, модельный вес $h(r) = \ln^\rho r$, то формулы (4) задают тип и нижний тип целой функции относительно логарифмического уточненного порядка.

Для формулировки следующего результата потребуется определение h-плотности $\Delta_h(\Lambda)$ последовательности нулей $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ функции f:

$$\overline{\Delta}_h(\Lambda) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{n(r)}{rh'(r)}.$$

Здесь $n(r) = \max\{n \in \mathbb{N} : |\lambda_n| \leqslant r\}$ — считающая функция последовательности нулей.

В диссертации [2] для целых функций логарифмического порядка, большего единицы, доказано такое утверждение.

Теорема. *Пусть функция $h(r)$ удовлетворяет условию (5) с $\rho > 1$, и $k(\zeta)$ — обратная функция к $h(e^r)/r$. Пусть, далее, целая функция f такова, что $\overline{\Delta}_h(\Lambda) < +\infty$ и $T_h(f) = T$, $t_h(f) = t$. Тогда имеют место формулы*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{nk(n)}{\ln|\lambda_1\lambda_2\cdot\ \ldots\ \cdot\lambda_n|} = \frac{\rho}{\rho-1}\,(T\rho)^{\frac{1}{\rho-1}}, \tag{6}$$

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{nk(n)}{\ln|\lambda_1\lambda_2\cdot\ \ldots\ \cdot\lambda_n|} = \frac{\rho}{\rho-1}\,(t\rho)^{\frac{1}{\rho-1}}, \tag{7}$$

$$(T\rho)^{\frac{1}{\rho-1}} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{k(n)}{\ln|\lambda_n|} \leqslant (a_2T\rho)^{\frac{1}{\rho-1}}, \tag{8}$$

$$(a_1T\rho)^{\frac{1}{\rho-1}} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{k(n)}{\ln|\lambda_n|} \leqslant (t\rho)^{\frac{1}{\rho-1}}, \tag{9}$$

где a_1, a_2 ($a_1 \leqslant 1 \leqslant a_2$) являются корнями уравнения

$$\rho a + (1-\rho)a^{\rho/(\rho-1)} = t/T.$$

Сравнивая формулы (6)–(9) с соответствующими формулами для вычисления логарифмических типов целой функции по коэффициентам

Тейлора, замечаем «попарную идентичность» указанных соотношений с оговоркой о замене $|\lambda_n|$ на R_n. Выполнив такую замену, легко получим оценки

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln|\lambda_n|}{\ln R_n} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln|\lambda_n|}{\ln R_n} \leqslant \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{\rho-1}},$$

$$\left(\frac{t}{T}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln|\lambda_1\lambda_2\cdot\ \ldots\ \cdot\lambda_n|}{\ln F_n^{-1}} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln|\lambda_1\lambda_2\cdot\ \ldots\ \cdot\lambda_n|}{\ln F_n^{-1}} \leqslant \left(\frac{T}{t}\right)^{\frac{1}{\rho-1}},$$

связывающие нули целой функции с ее тейлоровскими коэффициентами (спрямленными по Адамару).

Результаты подобного рода допускают конкретизацию при дополнительных требованиях на тейлоровские коэффициенты. Например, еще Валирон (см. [3, с. 134]) доказал, что для целой функции (1) при условии

$$\frac{f_{n-1}f_{n+1}}{f_n^2} \to 0, \qquad n\to\infty, \tag{10}$$

верна (связывающая нули и коэффициенты Тейлора) асимптотическая формула

$$\lambda_n \sim -\frac{f_{n-1}}{f_n}, \qquad n\to\infty.$$

Отметим, что целые функции, коэффициенты которых подчинены требованию (10), имеют медленный рост, точнее, удовлетворяют условию

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{\ln^2 r} = 0.$$

В недавней работе автора [4] рассмотрен общий случай целой функции с бесконечным числом нулей, имеющей произвольный (нулевой, конечный или бесконечный) порядок, и доказаны неулучшаемые неравенства

$$\varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{F_n|\lambda_1\lambda_2\ \cdot\ \ldots\ \cdot\ \lambda_n|} \geqslant 1, \qquad \varlimsup_{n\to\infty} \frac{|\lambda_n|}{R_n} \geqslant 1.$$

В докладе планируется также представить результаты о влиянии поведения тейлоровских коэффициентов целой функции на расположение ее нулей в комплексной плоскости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Borel E.* Leçons sur les fonctions entières. Paris: Gauthier-Villars, 2e édition. 1921.

[2] *Брайчев Г. Г.* Экстремальные задачи в теории относительного роста выпуклых и целых функций // Дисс. ... д.ф.-м.н. М. : РУДН, 2018.

[3] *Valiron G.* Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance règulière // Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série. 1913. Vol. 5. P. 117–257.

[4] *Брайчев Г. Г.* Совместные оценки корней и тейлоровских коэффициентов целой функции // Уфимский математический журнал. 2021. Т. 13, № 1. С. 31–45.

УДК 517.95

Дискретная краевая задача с нелокальными граничными условиями[1]

А. В. Васильев (Москва, Россия), В. Б. Васильев (Белгород, Россия), А. А. Ходырева (Белгород, Россия)

alexvassel@gmail.com, vbv57@inbox.ru, anastasia.kho@yandex.ru

В работа рассматривается дискретное эллиптическое псевдодифференциальное уравнение в квадранте и связанная с ним дискретная краевая задача. Описаны условия разрешимости дискретной краевой задачи в дискретных аналогах пространств Соболева-Слободецкого. Дается сравнение дискретного решения с решением соответствующей континуальной краевой задачи в зависимости от параметра дискретизации.

Ключевые слова: дискретный псевдодифференциальный оператор, дискретная краевая задача, оценка погрешности.

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № FZWG-2020-0029).

Discrete boundary value problem with nonlocal boundary conditions[1]

A. V. Vasilyev (Moscow, Russia), V. B. Vasilyev (Belgorod, Russia), A. A. Khodyreva (Belgorod, Russia)

alexvassel@gmail.com, vbv57@inbox.ru, anastasia.kho@yandex.ru

The paper considers a discrete elliptic pseudodifferential equation in a quadrant and a discrete boundary value problem associated with it. The conditions of solvability of a discrete boundary value problem in discrete analogues of Sobolev-Slobodetsky spaces are described. The discrete solution is compared with the solution of the corresponding continuum boundary value problem depending on the discretization parameter.

Keywords: discrete pseudo-differential operator, discrete boundary value problem, error estimate.

Acknowledgements: this work was supported by the Ministry of Higher Education and Science of Russia, (project No. FZWG-2020-0029).

Введение

Авторы начали разработку дискретной теории псевдодифференциальных уравнений с сингулярных интегралов Кальдерона-Зигмунда [1, 3] как простейшего представления псевдодифференциальных операторов, постепенно переходя к модельным псевдодифференциальным операторам и уравнениям (пока в канонических областях) в дискретных пространствах $L_2(h\mathbb{Z}^m)$, $L_2(h\mathbb{Z}^m{}_+)$, $h > 0$, и сравнение дискретных и континуальных решений.

Оказалось, что картина разрешимости дискретных уравнений выглядит подобно континуальному случаю, и в случае стремления к нулю параметра дискретизации дискретные условия разрешимости переходят в свой континуальный аналог. Аналогичные исследования были проведены для более общих модельных псевдодифференциальных операторов в дискретных аналогах H^s-пространств [4, 5] со сравнением дискретных и непрерывных решений [6, 7].

В этой работе мы рассматриваем новую модельную область – квадрант в $\mathbb{R}^2$, выделяем дискретную краевую задачу и описываем ее условия разрешимости, а также даем сравнение дискретных и континуальных решений. Мы используем периодический аналог волновой факторизации [1] для описания разрешимости модельных псевдодифференциальных уравнений и постановки дискретных краевых задач. Всюду ниже предполагается, что такое специальное представление символа возможно.

Основные определения

Пусть $\mathbb{Z}^2$ – целочисленная решетка на плоскости. Обозначим $K = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), x_1 > 0, x_2 > 0\}$ первый квадрант на плоскости, $k_s = h\mathbb{Z}^2 \cap K, h > 0$. Введем пространство функций дискретного аргумента $u_d(\tilde{x}), \tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in h\mathbb{Z}^2$,, удовлетворяющих условию

Обозначим $\mathbb{T}^2$ квадрат $[-\pi, \pi]^2, h > 0, \hbar = h^{-1}$. Будем рассматривать функции, изначально заданные в квадрате, как периодические функции, определенные на всей плоскости $\mathbb{R}^m$ с основным квадратом периодов $\mathbb{T}^2$.

Для таких функций можно определить дискретное преобразование Фурье формулой

$$(F_d u_d)(\xi) \equiv \tilde{u}_d(\xi) = \sum_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^2} e^{-i\tilde{x}\cdot\xi} u_d(\tilde{x}) h^2, \quad \xi \in \hbar\mathbb{T}^2,$$

в случае сходимости такого ряда, и функция $\tilde{u}_d(\xi)$ будет периодической функций в $\mathbb{R}^2$ с основным квадратом периодов $\hbar\mathbb{T}^2$.

С помощью разделенных разностей и их дискретных преобразований Фурье мы определим дискретные пространства Соболева–Слободецкого для исследования разрешимости широкого класса дискретных уравнений. Вводится дискретный аналог пространства Шварца и обозначение

$$\zeta^2 = h^{-2}((e^{-ih\cdot\xi_1} - 1)^2 + (e^{-ih\cdot\xi_2} - 1)^2).$$

Определение 1. *Пространство $H^s(h\mathbb{Z}^2)$ состоит их дискретных (обобщенных) функций и является замыканием пространства $S(h\mathbb{Z}^2)$*

по норме

$$||u_d||_s = \left(\int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2} (1+|\zeta^2|)^s |\tilde{u}_d(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}.$$

Пространство $H^s(K_d)$ состоит их дискретных функций из пространства $H^s(h\mathbb{Z}^2)$, чьи носители содержатся в $\overline{K_d}$. Норма в пространстве $H^s(K_d)$ индуцируется нормой пространства $H^s(h\mathbb{Z}^2)$.

Если $\widetilde{A}_d(\xi)$ – измеримая периодическая функция в $\mathbb{R}^2$ с основным кубом периодов $\hbar\mathbb{T}^2$, мы называем ее символом.

Определение 2. *Дискретным псевдодифференциальным оператором A_d с символом $\widetilde{A}_d(\xi)$ в дискретном квадранте K_d называется оператор следующего вида*

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y}\in h\mathbb{Z}^2} h^2 \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2} \widetilde{A}_d(\xi) e^{i(\tilde{x}-\tilde{y})\cdot\xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x}\in K_d,$$

Говорят, что оператор A_d – эллиптический, если

$$ess \inf_{\xi\in\hbar\mathbb{T}^2} |\widetilde{A}_d(\xi)| > 0.$$

Мы будем рассматривать класс символов, удовлетворяющих условию

$$c_1(1+|\zeta^2|)^{\alpha/2} \le |A_d(\xi)| \le c_2(1+|\zeta^2|)^{\alpha/2}$$

с постоянными c_1, c_2, не зависящими от h.

Дискретные и непрерывные решения

Мы исследуем разрешимость дискретного уравнения

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = 0, \quad \tilde{x}\in K_d, \tag{1}$$

в пространстве $H^s(K_d)$ с граничными условиями

$$\begin{gathered}\sum_{\tilde{x}_1\in h\mathbb{Z}_+} u_d(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)h = f_d(\tilde{x}_2), \quad \sum_{\tilde{x}_2\in h\mathbb{Z}_+} u_d(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)h = g_d(\tilde{x}_1), \\ \sum_{\tilde{x}\in h\mathbb{Z}_{++}} u_d(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)h^2 = 0.\end{gathered} \tag{2}$$

При наличии специальной периодической волновой факторизации символа $\widetilde{A}_d(\xi)$ с индексом æ, таким, что æ $- s = 1+\delta, |\delta| < 1/2$ можно отметить следующий факт.

Теорема 1. *Пусть* $f_d, g_d \in H^{s+1/2}(h\mathbb{Z})$. *Тогда дискретная краевая задача* (1),(2) *имеет единственное решение с априорной оценкой*

$$||u_d||_s \leq const(||f_d||_{s+1/2} + ||g_d||_{s+1/2})$$

с постоянной, не зависящей от h.

Континуальный аналог – это следующая краевая задача

$$(Au)(x) = 0, \quad x \in K, \tag{3}$$

$$\int\limits_0^{+\infty} u(x_1, x_2)dx_1 = f(x_2), \quad \int\limits_0^{+\infty} u(x_1, x_2)dx_2 = g(x_1), \quad \int\limits_K u(x)dx = 0. \tag{4}$$

где A – псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi), \xi = (\xi_1, \xi_2)$, удовлетворяющим условию

$$c_1(1 + |\xi|)^\alpha \leq |A(\xi)| \leq c_2(1 + |\xi|)^\alpha.$$

и допускающим волновую факторизацию относительно K с индексом æ, таким, что $æ - s = 1 + \delta, |\delta| < 1/2$. Специальный подбор дискретных функций f_d, g_d и элементов периодической волновой факторизации приводит к следующему результату.

Теорема 2. *Пусть* $f, g \in S(\mathbb{R}), æ > 1$. *Тогда справедлива следующая оценка для решений* u *и* u_d *континуальной задачи* (3),(4) *и ее дискретного аналога* (1),(2)

$$|u(\tilde{x}) - u_d(\tilde{x})| \leq C(f, g)h^\beta,$$

где постоянная $C(f, g)$ *зависит от функций* f, g, $\beta > 0$ *может быть произвольным.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Васильев А. В., Васильев В. Б.* Периодическая задача Римана и дискретные уравнения в свертках // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 5. С. 642–649.

[2] *Васильев В. Б.* Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. М. : КомКнига, 2010. 136 с.

[3] *Vasilyev A. V., Vasilyev V. B.* Discrete singular operators and equations in a half-space // Azerb. J. Math. 2013. Vol. 3, № 1. P. 81–93.

[4] *Vasilyev A. V., Vasilyev V. B.* Pseudo-differential operators and equations in a discrete half-space // Math. Model. Anal. 2018. Vol. 23, № 3. P. 492–506.

[5] *Vasilyev A. V., Vasilyev V. B.* On some discrete potential like operators // Tatra Mt. Math. Publ. 2018. Vol. 71. P. 195–212.

[6] *Васильев В. Б., Тарасова О. А.* О дискретных краевых задачах и их аппроксимационных свойствах. Итоги науки и техники. Современные математика и ее приложения // Тематические обзоры. 2020. Т. 174. С. 12–19.

[7] *Tarasova O. A., Vasilyev V. B.* To the theory of discrete boundary value problems // 4Open, 2019. 7pp.

УДК 517.95

Задача линейного сопряжения и интегральные преобразования[1]

А. В. Васильев (Москва, Россия), В. Б. Васильев (Белгород, Россия), Н. В. Эберлейн (Белгород, Россия)

alexvassel@gmail.com, vbv57@inbox.ru, eberlein92@mail.ru

В пространствах Соболева - Слободецкого изучается определенная задача сопряжения для эллиптического псевдодифференциального уравнения в плоском секторе. Используя волновую факторизацию для эллиптического символа с конкретным индексом, мы рассматриваем условия Дирихле и Неймана на сторонах сектора. Для частного случая мы сводим рассматриваемую краевую задачу к системе линейных алгебраических уравнений относительно 8 неизвестных функций.

Ключевые слова: эллиптический псевдодифференциальный оператор, задача сопряжения, условие разрешимости.

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № FZWG-2020-0029).

Linear conjugation problem and integral transforms[1]

A. V. Vasilyev (Moscow, Russia), V. B. Vasilyev (Belgorod, Russia), N. V. Eberlein (Belgorod, Russia)

alexvassel@gmail.com, vbv57@inbox.ru, eberlein92@mail.ru

A certain conjugation problem for an elliptic pseudo-differential equation in a plane sector is studied in Sobolev–Slobodetskii spaces. Using wave factorization for an elliptic symbol with concrete index we consider Dirichlet and Neumann conditions on sector sides. For a special case we reduce the considered boundary value problem to a system of linear algebraic equations with respect to 8 unknown functions.

Keywords: elliptic pseudo-differential operator, conjugation problem, solvability condition.

Acknowledgements: this work was supported by the Ministry of Higher Education and Science of Russia, (project No. FZWG-2020-0029).

Введение

В этой работе рассматривается одна задача сопряжения в плоском угле для простейших эллиптических псевдодифференциальных уравнений. В определенном смысле она является обобщением классической краевой задачи Римана для аналитических функций. Исследование опирается на метод волновой факторизации, развитый в [1], и приводит при некоторых дополнительных предположениях на символ оператора к критерию однозначной разрешимости поставленной задачи сопряжения. Используемый аппарат волновой факторизации с успехом применялся при постановке и исследовании других краевых задач для эллиптических псевдодифференциальных уравнений [2–5].

Постановка задачи

В пространстве Соболева–Слободецкого H^s рассматривается следующая задача: найти функцию

$$U(x) = \begin{cases} u_+(x), & x \in C_+^a \\ u_-(x), & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{C_+^a} \end{cases}$$

такую, что $u_+ \in H^s(C_+^a), v_- \in H^s(\mathbb{R}^2 \setminus C_+^a)$, удовлетворяющую уравнениям

$$\begin{cases} (Au_+)(x) = 0, & x \in C_+^a, \\ (Au_-)(x) = 0, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{C_+^a}, \end{cases} \tag{1}$$

где $C_+^a = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_2 > a|x_1|, \ a > 0\}, \Gamma = \partial C_+^a$, A – эллиптический псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$,

$$c_1 \leq |A(\xi)(1 + |\xi|)^{-\alpha}| \leq c_2.$$

К уравнениям (1) мы добавляем следующие граничные условия:

$$\theta \cdot u_{+|\partial C_+^a} + \omega \cdot u_{-|\partial C_+^a} = \mu, \quad \eta \cdot \left(\frac{\partial u_+}{\partial n}\right)_{|\partial C_+^a} + \gamma \cdot \left(\frac{\partial u_-}{\partial n}\right)_{|\partial C_+^a} = \nu, \tag{2}$$

где $\theta, \omega, \eta, \gamma$ – комплексные числа, принимающие различные значения на сторонах угла ∂C_+^a, $\mu \in H^{s-1/2}(\Gamma), \nu \in H^{s-3/2}(\Gamma)$– заданные на Γ функции..

Подобная задача рассматривалась в [2] при дополнительных предположениях относительно символа $A(\xi)$ и была сведена к некоторой системе одномерных интегральных уравнений, которую мы обозначим (X). Предполагалось, что символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию [1] относительно конуса C_+^a

$$A(\xi) = A_{\neq}(\xi) \cdot A_{=}(\xi)$$

с индексом æ таким, что $æ - s = 1 + \delta, |\delta| < 1/2$.

Мы приведем ниже описание терминов, использованных в постановке задачи.

Пространство Соболева–Слободецкого $H^s(\mathbb{R}^2)$ – это гильбертово пространство с нормой

$$||f||_s = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} |\tilde{f}(\xi)|^2(1+|\xi|)^{2s}d\xi\right)^{1/2},$$

где $\tilde{f}$ обозначает преобразование Фурье

$$\tilde{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-ix\cdot\xi}f(x)dx.$$

Если $D \subset \mathbb{R}^2$ – область, то $H^s(D)$ – это подпространство $H^s(\mathbb{R}^2)$, состоящее из функций с носителями в $\overline{D}$.

Пусть $A(\xi)$ – измеримая функция, определенная на $\mathbb{R}^2$. Псевдодифференциальным операторои A в области D с символом $A(\xi)$ называется следующий оператор

$$(Au)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{ix\cdot\xi}A(\xi)\tilde{u}(\xi)d\xi, \quad x \in D.$$

Алгебраическое условие разрешимости

С помощью элементов волновой фвкторизации $A_{\neq}(\xi), A_{=}(\xi)$ строятся функции $b_j(t_{3-j}), B_j(t_{3-j}), j = 1, 2$. Использование преобразования Меллина позволяет получить следующую редукцию.

Теорема 1. *Пусть* $æ = \alpha/2$ *и сомножители* $A_{\neq}(\xi), A_{=}(\xi)$ *однородны степени* $\alpha/2$ *и дифференцируемы вне начала координат,* $b_j(t_{3-j}) \neq 0, B_j(t_{3-j}) \neq 0, j = 1, 2, \ \forall t_1, t_2 \neq 0$. *Тогда система линейных интегральных уравнений* (X) *эквивалентна системе линейных алгебраических уравнений* (3) *относительно неизвестных функций* $\hat{C}_k(\lambda), \hat{D}_k(\lambda), \hat{R}_k(\lambda), \hat{Q}_k(\lambda), k = 1, 2.$

Все коэффициенты системы (3) и правые части также вычисляются по элементам $A_{\neq}(\xi), A_{=}(\xi)$ и заданным граничным условиям. Если матрицу системы обозначить $\mathcal{A}(\lambda)$, то получается следующий критерий разрешимости задачи линейного сопряжения (1),(2).

Отметим, что априорные оценки решения могут быть получены по схеме, описанной в [1].

$$
\left\{\begin{array}{r}
\theta_1\hat{k}_{11}(\lambda)\hat{C}_1(\lambda)+\theta_1\hat{k}_{21}(\lambda)\hat{C}_2(\lambda)+\theta_1 l_{11}\hat{D}_1(\lambda)+\\
+\omega_1\hat{m}_{11}(\lambda)\hat{R}_1(\lambda)+\omega_1\hat{m}_{21}(\lambda)\hat{R}_2(\lambda)+\omega_1\hat{Q}_1(\lambda)=\hat{\mu}_{11}(\lambda)\\
\theta_1\hat{k}_{12}(\lambda)\hat{C}_1(\lambda)+\theta_1\hat{k}_{22}(\lambda)\hat{C}_2(\lambda)+\theta_1 l_{12}\hat{D}_2(\lambda)+\\
+\omega_1\hat{m}_{12}(\lambda)\hat{R}_1(\lambda)+\omega_1\hat{m}_{22}(\lambda)\hat{R}_2(\lambda)+\omega_1\hat{Q}_2(\lambda)=\hat{\mu}_{12}(\lambda)\\
\theta_2 l_{21}\hat{C}_1(\lambda)+\theta_2\hat{n}_{11}(\lambda)\hat{D}_1(\lambda)+\theta_2\hat{n}_{21}(\lambda)\hat{D}_2(\lambda)+\\
+\omega_2\hat{R}_1(\lambda)+\omega_2\hat{p}_{11}(\lambda)\hat{Q}_1(\lambda)+\omega_2\hat{p}_{21}(\lambda)\hat{Q}_2(\lambda)=\hat{\mu}_{21}(\lambda)\\
\theta_2 l_{22}\hat{C}_2(\lambda)+\theta_2\hat{n}_{12}(\lambda)\hat{D}_1(\lambda)+\theta_2\hat{n}_{22}(\lambda)\hat{D}_2(\lambda)+\\
+\omega_2\hat{R}_2(\lambda)+\omega_2\hat{p}_{12}(\lambda)\hat{Q}_1(\lambda)+\omega_2\hat{p}_{22}(\lambda)\hat{Q}_2(\lambda)=\hat{\mu}_{22}(\lambda)\\
\eta_1\hat{K}_{11}(\lambda)\hat{C}_1(\lambda)+\eta_1\hat{K}_{21}(\lambda)\hat{C}_2(\lambda)+\eta_1 L_{11}\hat{D}_1(\lambda)+\\
+\gamma_1\hat{M}_{11}(\lambda)\hat{R}_1(\lambda)+\gamma_1\hat{M}_{21}(\lambda)\hat{R}_2(\lambda)+\gamma_1\hat{Q}_1(\lambda)=\hat{\nu}_{11}(\lambda)\\
\eta_1\hat{K}_{12}(\lambda)\hat{C}_1(\lambda)+\eta_1\hat{K}_{22}(\lambda)\hat{C}_2(\lambda)+\eta_1 L_{12}\hat{D}_2(\lambda)+\\
+\gamma_1\hat{M}_{12}(\lambda)\hat{R}_1(\lambda)+\gamma_1\hat{M}_{22}(\lambda)\hat{R}_2(\lambda)+\gamma_1\hat{Q}_2(\lambda)=\hat{\nu}_{12}(\lambda)\\
\eta_2 L_{21}\hat{C}_1(\lambda)+\eta_2\hat{N}_{11}(\lambda)\hat{D}_1(\lambda)+\eta_2\hat{N}_{21}(\lambda)\hat{D}_2(\lambda)+\\
+\gamma_2\hat{R}_1(\lambda)+\gamma_2\hat{P}_{11}(\lambda)\hat{Q}_1(\lambda)+\gamma_2\hat{P}_{21}(\lambda)\hat{Q}_2(\lambda)=\hat{\nu}_{21}(\lambda)\\
\eta_2 L_{22}\hat{C}_2(\lambda)+\eta_2\hat{N}_{12}(\lambda)\hat{D}_1(\lambda)+\eta_2\hat{N}_{22}(\lambda)\hat{D}_2(\lambda)+\\
+\gamma_2\hat{R}_2(\lambda)+\gamma_2\hat{P}_{12}(\lambda)\hat{Q}_1(\lambda)+\gamma_2\hat{P}_{22}(\lambda)\hat{Q}_2(\lambda)=\hat{\nu}_{22}(\lambda)
\end{array}\right. \tag{3}
$$

Теорема 2. *В предположениях Теоремы 1 условие*

$$inf|\det\mathcal{A}(\lambda)|>0, \quad \operatorname{Re}\lambda=1/2$$

является необходимым и достаточным для существования единственного решения задачи (1), (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Васильев В. Б.* Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. М. : КомКнига, 2010. 136 с.

[2] *Vasilyev V. B.* On some transmission problems in a plane corner // Tatra Mt. Math. Publ. 2015. Vol. 63. P. 291–301.

[3] *Vasilyev V. B.* Pseudo-differential equations, wave factorization, and related problems // Math. Meth. Appl. Sci. 2018. Vol. 41, № 18. P. 9252–9263.

[4] *Васильев В. Б.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений в многомерном конусе // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56, № 10. С. 1356–1365.

[5] *Vasilyev V. B.* On certain 3D limit boundary value problem // Lobachevskii J. Math. 2020, Vol. 41, № 5. P. 913–921.

УДК 517.518.224

Поперечники по Колмогорову весовых классов Соболева с ограничениями на нулевую и старшую производные[1]

А. А. Васильева (Москва, Российская Федерация)

vasilyeva_nastya@inbox.ru

Получены порядковые оценки поперечников весового класса Соболева на области, удовлетворяющей условию Джона. Класс задается ограничениями на производные порядка r в весовом пространстве L_{p_1} и на функцию в весовом пространстве L_{p_0}.

Ключевые слова: колмогоровские поперечники, пересечения функциональных классов, весовые пространства функций.

Kolmogorov widths of weighted Sobolev classes with conditions on the highest and zero derivatives[1]

A. A. Vasil'eva (Moscow, Russian Federation)

vasilyeva_nastya@inbox.ru

Order estimates for widths of a weighted Sobolev class on a John domain is obtained. The class is defined by conditions on the derivatives of order r in a weighted space L_{p_1} and on a function in a weighted space L_{p_0}.

Keywords: Kolmogorov widths, intersections of function classes, weighted function spaces.

Пусть X — нормированное пространство, $C \subset X$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Колмогоровским поперечником множества C в пространстве X называется величина

$$d_n(C, X) = \inf_{L\in\mathcal{L}_n} \sup_{x\in C} \inf_{y\in L} \|x - y\|,$$

где $\mathcal{L}_n$ — совокупность линейных подпространств в X размерности не выше n.

Обозначим через $B_a(x)$ евклидов шар радиуса a с центром в точке x.

Определение 1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область, $a > 0$. Скажем, что $\Omega \in \mathbf{FC}(a)$, если существует точка $x_* \in \Omega$ такая, что для любого $x \in \Omega$ существует число $T(x) > 0$ и кривая $\gamma_x : [0, T(x)] \to \Omega$ со следующими свойствами:

1. γ_x имеет натуральную параметризацию относительно евклидовой нормы на $\mathbb{R}^d$,

2. $\gamma_x(0) = x$, $\gamma_x(T(x)) = x_*$,

3. $B_{at}(\gamma_x(t)) \subset \Omega$ для любого $t \in [0,\, T(x)]$.

Скажем, что Ω удовлетворяет условию Джона, если $\Omega \in \mathbf{FC}(a)$ для некоторого $a > 0$.

Определение 1. [2] Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ — непустой компакт, $h : (0,\, 1] \to (0,\, \infty)$ — неубывающая функция. Скажем, что Γ является h-множеством, если существует константа $c_* \geq 1$ и конечная счетно-аддитивная мера μ на $\mathbb{R}^d$ такая, что $\operatorname{supp} \mu = \Gamma$ и

$$c_*^{-1} h(t) \leq \mu(B_t(x)) \leq c_* h(t)$$

для любых $x \in \Gamma$ и $t \in (0,\, 1]$.

В [2] изучалась задача об оценках поперечников $d_n(M,\, L_{q,v}(\Omega))$, где

$$M = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R},\ \left\| \frac{\nabla^r f}{g} \right\|_{L_{p_1}(\Omega)} \leq 1,\ \ \|wf\|_{L_{p_0}(\Omega)} \leq 1 \right\},$$

$$L_{q,v}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R},\ \|f\|_{L_{q,v}(\Omega)} := \|vf\|_{L_q(\Omega)} < \infty\}.$$

В частности, был рассмотрен пример, когда Ω — область, удовлетворяющая условию Джона, а веса имеют вид

$$g(x) = \operatorname{dist}^{-\beta}(x,\, \Gamma),\ \ w(x) = \operatorname{dist}^{-\sigma}(x,\, \Gamma),\ \ v(x) = \operatorname{dist}^{-\lambda}(x,\, \Gamma), \qquad (1)$$

где $\Gamma \subset \partial\Omega$ — h-множество,

$$h(t) = t^\theta, \quad 0 \leq \theta < d. \qquad (2)$$

Порядковые оценки колмогоровских поперечников $d_n(M,\, L_{q,v}(\Omega))$ с весами, заданными (1)–(2), были получены при дополнительных условиях на параметры:

$$r + \frac{d}{q} - \frac{d}{p_1} > 0,\ \ r + \frac{d}{p_0} - \frac{d}{p_1} > 0,$$

$$\beta + \sigma - r - \frac{d}{p_0} + \frac{d}{p_1} > 0,\ \ \beta + \sigma - r - \frac{d-\theta}{p_0} + \frac{d-\theta}{p_1} > 0.$$

Остался неразобранным случай, когда хотя бы одно из этих неравенств не выполнено.

Здесь будут получены порядковые оценки поперечников в случае, когда $p_1 < q < p_0$, $r + \frac{d}{p_0} - \frac{d}{p_1} < 0$, $\beta + \sigma - r - \frac{d-\theta}{p_0} + \frac{d-\theta}{p_1} \geq 0$.

Теорема 1. *Пусть* $r,\ d \in \mathbb{N}$, $1 < p_1 < q < p_0 \le \infty$, $\Omega \subset \left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)^d$ — *область, удовлетворяющая условию Джона,* $\Gamma \subset \partial\Omega$ — h*-множество, веса* g, v *и* w *заданы (1)–(2). Положим*

$$\gamma_* = \theta, \quad s_* = \frac{r}{d}, \quad \mu_* = \beta + \lambda - r - \frac{d}{q} + \frac{d}{p_1}, \quad \alpha_* = \sigma - \lambda + \frac{d}{q} - \frac{d}{p_0},$$

$$\tilde{\theta} = s_* \frac{\alpha_* + \gamma_*/p_0 - \gamma_*/q}{\mu_* + \alpha_* + \gamma_*(s_* + 1/p_0 - 1/p_1)},$$

$$\hat{\sigma} = s_* \cdot \frac{\frac{1}{q} - \frac{1}{p_0}}{-s_* - \frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} + \frac{2s_*}{q}}.$$

Пусть $s_* + \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1} < 0$, $\mu_* + \alpha_* + \gamma_*/p_0 - \gamma_*/p_1 \ge 0$.

Определим $j_0 \in \mathbb{N}$, $\theta_j \in \mathbb{R}$ $(1 \le j \le j_0)$ *следующим образом.*

- *Если* $q \le 2$, *то* $j_0 = 2$, $\theta_1 = s_* \frac{1/q - 1/p_0}{1/p_1 - 1/p_0}$, $\theta_2 = \tilde{\theta}$.
- *Если* $q > 2$, $p_1 \le 2$, *то* $j_0 = 2$, $\theta_1 = \hat{\sigma}$, $\theta_2 = \tilde{\theta}$.
- *Если* $q > 2$, $p_1 > 2$, *то* $j_0 = 3$, $\theta_1 = s_*$, $\theta_2 = \hat{\sigma}$, $\theta_3 = \tilde{\theta}$.

Пусть существует $j_* \in \{1,\ \dots,\ j_0\}$ *такое, что* $\theta_{j_*} < \min_{j \ne j_*} \theta_j$, *при этом* $\theta_{j_*} > 0$. *Тогда*

$$d_n(M,\ L_{q,v}(\Omega)) \asymp n^{-\theta_{j_*}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Bricchi M.* Existence and properties of h-sets // Georgian Mathematical Journal. 2002. Vol. 9, № 1. P. 13–32.

[2] *Vasil'eva A. A.* Kolmogorov widths of weighted Sobolev classes on a multi-dimensional domain with conditions on the derivatives of order r and zero // J. Appr. Theory. 2021. Vol. 269. Article 105602, 34 pp.

УДК 517.968.72

О корректной разрешимости интегро-дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами в пространствах вектор-функций, голоморфных в угле[1]

В. В. Власов (Москва, Россия)

victor.vlasov@math.msu.ru

Изучаются интегро-дифференциальные уравнения с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Главной частью указанного уравнения является абстрактное параболическое уравнение, возмущенное вольтерровым интегральным оператором. Принципиальное отличие данной работы от имеющихся состоит в том, что мы рассматриваем и изучаем интегро-дифференциальные уравнения для вектор-функций, аргументы которых принимают значения в угловой области комплексной плоскости.

Ключевые слова: вольтерровы интегро-дифференциальные уравнения, голомофная в угловой области вектор-функция, пространство Харди.

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00288).

On correct solvability of integro-differential equations with operator coefficients in spaces of vector-functions holomorphic in the angle[1]

V. V. Vlasov (Moscow, Russia)

victor.vlasov@math.msu.ru

We study the integro-differential equations with unbounded operator coefficients in Hilbert space. The main part of this equation is an abstract parabolic equation perturbed by the Volterra integral operator. The fundamental difference between this work and the existing ones is that we consider and study integro-differential equations for vector functions, the arguments of which take values in the angular domain on the complex plane.

Keywords: Volterra integro-differential equations, holomophic in the angular domain vector function, Hardy space.

Acknowledgements: this work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 20-01-00288).

Изучены классы $\mathrm{Re}_2(S_\theta, H)$ и $W_2^n(S_\theta, A^n)$ функций со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве H, голоморфных в области $S_\theta = \{\tau \in \mathbb{C} : |\arg \tau| < \theta\}$. При этом класс $L_2(S_\theta, H)$ состоит из вектор-функций, для которых

$$\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \int_0^\infty \left\|f\left(te^{i\varphi}\right)\right\|^2 dt < \infty,$$

а класс $W_2^n(S_\theta, A^n)$ из вектор-функций, для которых

$$\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \int_0^\infty \left(\left\| \frac{\partial^n}{\partial t^n} u\left(te^{i\varphi}\right) \right\|^2 + \left\| A^n u\left(te^{i\varphi}\right) \right\|^2 \right) dt < \infty,$$

где A – самосопряженный положительный оператор в пространстве H, имеющий компактный обратный.

Показано, что снабженный соответствующей нормой класс $L_2(S_\theta, H)$ образует гильбертово пространство, а также установлен аналог теоремы Пэли-Винера для $L_2(S_\theta, H)$. Доказано, что снабженный соответствующей нормой класс $W_2^n(S_\theta, A^n)$ является гильбертовым пространством, установлен аналог теоремы о промежуточных производных и теоремы о следах. Установлена корректная разрешимость начальной задачи для интегро-дифференциального уравнения с операторными коэффициентами в пространстве $W_2^1(S_\theta, A)$, ранее изучавшегося в монографии [1], а также в работе [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. М : МАКС Пресс, 2016. 488 с. ISBN 978-5-317-05443-4

[2] *Власов В. В., Раутиан Н. А., Шамаев А. С.* Спектральный анализ и корректная разрешимость абстрактных интегродифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике // Современная математика. Фундаментальные направления. 2011. Т. 39. С. 36–65.

УДК 517.518

Двойные косинус- и косинус-синус преобразования Фурье и обобщенные классы Липшица в равномерной метрике[1]

С. С. Волосивец, Ю. И. Кротова (Саратов, Россия)
VolosivetsSS@mail.ru

Мы доказываем критерии принадлежности двойных косинус-преобразования Фурье и косинус-синус-преобразования Фурье интегрируемой функции обобщенным классам Липшица в терминах поведения указанной выше функции.

Ключевые слова: двойное косинус-преобразование Фурье, двойное косинус-синус преобразование Фурье, смешанная разность, обобщенные классы Липшица, слабая монотонность.

Благодарности: работа первого автора выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках выполнения государственного задания (проект № FSRR-2020-0006).

Double cosine and cosine-sine Fourier transforms and general Lipschitz classes in uniform metric[1]

S. S. Volosivets, Yu. I. Krotova (Saratov, Russia)
VolosivetsSS@mail.ru

We prove criterions for double cosine or cosine-sine transforms of an integrable function to belong generalized Lipschitz classes in terms of behaviour of indicated above function.

Keywords: double cosine Fourier transform, double sine Fourier transform, mixed difference, generalized Lipschitz classes, weak monotonicity.

Acknowledgements: the work of the first author was supported by the Ministry of science and education of the Russian Federation in the framework of the basic part of the scientific research state task, project FSRR-2020-0006).

Введение

Пусть функция $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{C}$ интегрируема по Лебегу на $\mathbb{R}^2_+$, т.е. $f \in L^1(\mathbb{R}^2_+)$. Тогда двойные косинус- и косинус-синус-преобразования Фурье определяются равенствами

$$\widehat{f}_{cc}(x, y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty f(u, v) \cos ux \cos vy \, du \, dv,$$

$$\widehat{f}_{cs}(x, y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty f(u, v) \cos ux \sin vy \, du \, dv.$$

В одномерном случае см. [2]. Обе функции $\widehat{f}_{cc}(x,y)$ и $\widehat{f}_{cs}(x,y)$ равномерно непрерывны и стремятся к нулю, когда $\max(x,y)\to\infty$. Функцию $\widehat{f}_{cc}(x,y)$ можно рассматривать, как двойное комплексное преобразование Фурье продолженной четным образом по обеим переменным функции f, аналогично, хотя и более сложно можно определить $\widehat{f}_{cs}(x,y)$. Пусть

$$\dot{\triangle}^{m,n}_{t,\tau} f(x,y)=\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{j+k}\binom{m}{j}\binom{n}{k}f(x+(m-2j)\frac{t}{2},y+(n-2k)\frac{\tau}{2})$$

есть смешанная разность порядков $m,n\in\mathbb{N}$ с шагами t,τ функции f в точке (x,y). Рассмотрим класс $\Phi^{(2)}$ положительных на $\mathbb{R}^2_+\setminus\{(0,0)\}$ функций ω, для которых $\omega(0,0)=0$, $\omega(x_1,y_1)\le\omega(x_2,y_1)$, $\omega(x_1,y_1)\le\omega(x_1,y_2)$ при $x_2\ge x_1$, $y_2\ge y_1$, $x_i,y_i\in\mathbb{R}_+$, $i=1,2$.

Если $\omega\in\Phi^{(2)}$ такова, что

$$\int_0^u\int_0^v\frac{\omega(x,y)}{xy}\,dx\,dy=O(\omega(u,v)),\quad u,v>0,$$

то ω принадлежит классу BB. Если $m,n>0$ и $\omega\in\Phi^{(2)}$ такова, что

$$\int_u^\infty\int_v^\infty\frac{\omega(x,y)}{x^{m+1}y^{n+1}}\,dx\,dy\le C\frac{\omega(u,v)}{u^mv^n},$$

то будем писать $\omega\in B_mB_n$.

Для $m,n\in\mathbb{N}$ и $\omega\in\Phi^{(2)}$ по определению $f\in H^{m,n}(\omega)$, если для всех $\delta_1,\delta_2\ge0$ справедливо неравенство

$$\omega_{mn}(f,\delta_1,\delta_2)=\sup\{|\dot{\triangle}^{m,n}_{t,\tau}f(x,y)|:0\le t\le\delta_1,0\le\tau\le\delta_2\}\le C\omega(\delta_1,\delta_2),$$

где $x,y\in\mathbb{R}_+$. Рассмотрим также класс

$$h^{m,n}(\omega)=\{f\in H^{m,n}(\omega):\omega_{mn}(f,\delta_1,\delta_2)=o(\omega(\delta_1,\delta_2)),\delta_1,\delta_2\to0\}.$$

Основные результаты

Теорема 1. *а) Пусть $f:\mathbb{R}^2_+\to\mathbb{C}$ такова, что $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2_+)$. Если $m,n\in\mathbb{N}$, $\omega\in BB\cap\Delta_2$ и выполнено условие*

$$\int_0^t\int_0^s x^my^n|f(x,y)|\,dy\,dx=O(t^ms^n\omega(t^{-1},s^{-1})),\quad s,t\ge0,\qquad(1)$$

то $\widehat{f}_{cc}\in H^{m,n}(\omega)$.

b) Пусть $m,n \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}_+$ такова, что $f \in L^1(\mathbb{R}^2_+)$. Если $\omega \in BB \cap \Delta_2$ и m,n являются четными, то из условия $\widehat{f}_{cc} \in H^{m,n}(\omega)$ вытекает, что (1) имеет место. Если же m или n нечетно и $\omega \in BB \cap B_mB_n$, то условие $\widehat{f}_{cc} \in H^{m,n}(\omega)$ также влечет (1).

Теорема 2. *a) Пусть $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{C}$ такова, что $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2_+)$. Если $m,n \in \mathbb{N}$, $\omega \in BB \cap \Delta_2$ и выполнено условие (1), то $\widehat{f}_{cs} \in H^{m,n}(\omega)$.*

b) Пусть $m,n \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}_+$ такова, что $f \in L^1(\mathbb{R}^2_+)$. Если $\omega \in BB \cap \Delta_2$ и m четно, а n нечетно, то из условия $\widehat{f}_{cs} \in H^{m,n}(\omega)$ вытекает, что (1) имеет место. Если же m нечетно или n четно и $\omega \in BB \cap B_mB_n$, то условие $\widehat{f}_{cs} \in H^{m,n}(\omega)$ также влечет (1).

Будем говорить, что $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}_+$ является слабо монотонно убывающей, если $Cf(x_1,y_1) \ge f(x,y)$ для всех $x_1 \in [x/2,x]$, $y_1 \in [y/2,y]$ (см. похожее одномерное определение в [2].

Теорема 3. *Пусть $f(x,y)$ является слабо монотонно убывающей функцией, $m,n \in \mathbb{N}$, $\omega \in BB \cap B_mB_n$, $f \in L^1(\mathbb{R}^2_+)$. Тогда условия*

a) $f(x,y) = O(x^{-1}y^{-1}\omega(x^{-1},y^{-1}))$, $x,y > 0$;

b) $\widehat{f}_{cc} \in H^{m,n}(\omega)$;

c) $\widehat{f}_{cs} \in H^{m,n}(\omega)$;

являются эквивалентными.

Теорема 4. *a) Пусть $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{C}$ такова, что $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2_+)$. Если $m,n \in \mathbb{N}$, $\omega \in BB \cap \Delta_2$ и выполнено условия (1) и*

$$\int_0^t \int_0^s x^m y^n |f(x,y)|\, dy\, dx = o(t^m s^n \omega(t^{-1},s^{-1})), \quad s,t \to \infty, \qquad (2)$$

то $\widehat{f}_{cc} \in h^{m,n}(\omega)$.

b) Пусть $m,n \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}_+$ такова, что $f \in L^1(\mathbb{R}^2_+)$. Если $\omega \in BB \cap \Delta_2$ и m,n являются четными, то из условия $\widehat{f}_{cc} \in h^{m,n}(\omega)$ вытекает, что (2) имеет место. Если же m или n нечетно и $\omega \in BB \cap B_mB_n$, то условие $\widehat{f}_{cc} \in h^{m,n}(\omega)$ также влечет (2).

Аналог теоремы 4 верен для $\widehat{f}_{cs}$. Теорема 1 обобщает, а теорема 2 распространяет на случай $\widehat{f}_{cs}$ некоторые результаты В.Фюлоп и Ф.Морица [3], полученные для $\omega(\delta_1,\delta_2) = \delta_1^\alpha \delta_2^\beta$, $m = n = 1$ и $m = n = 2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М. : Гостехиздат, 1948. 420 с.

[2] *Lifltand E., Tikhonov S., Zeltser M.* Extending tests for convergence of number series // J. Math. Anal. Appl. 2011. Vol. 377, № 1. P. 194–206.

[3] *Fülöp V., Moricz F.* On double sine and cosine transforms, Lipschitz and Zygmund classes // Anal. Theory Appl. 2011. Vol. 27, № 4. P. 351–364.

УДК 517.518

Абсолютная сходимость рядов по мультипликативным системам и приближение в равномерной метрике[1]

С. С. Волосивец, А. Н. Мингачев (Саратов, Россия)
VolosivetsSS@mail.ru

Мы доказываем оценки для остатка $\rho_n(f)$ ряда из модулей коэффициентов Фурье функции f по мультипликативной системе при условии что наилучшие равномерные приближения f не превосходят заданных мажорант. Также мы рассматриваем двойственную задачу.

Ключевые слова: абсолютная сходимость, мультипликативная система, наилучшее приближение, равномерная метрика.

Благодарности: работа первого автора выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках выполнения государственного задания (проект № FSRR-2020-0006).

Absolute convergence of series with respect to multiplicative systems and approximation in uniform metric[1]

S. S. Volosivets, A. N. Mingachev (Saratov, Russia)
VolosivetsSS@mail.ru

We prove estimates for the remainder $\rho_n(f)$ of series of modules of Fourier coefficients of a function f with respect to multiplicative system if uniform best approximations of f does not exceed given majorants. Also, we consider a dual problem.

Keywords: absolute convergence, multiplicative systems, best approximation, uniform metric.

Acknowledgements: the work of the first author was supported by the Ministry of science and education of the Russian Federation in the framework of the basic part of the scientific research state task, project FSRR-2020-0006).

Введение

Пусть $\mathbf{P}=\{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, такая что $2 \le p_j \le N$ при всех $j \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}_j = \{0, 1, \dots, p_j - 1\}$. Определим последовательность $\{m_j\}_{j=0}^{\infty}$ следующим образом: $m_0 = 1$, $m_n = m_{n-1}p_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда любое число $x \in [0, 1)$ представимо в виде

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j m_j^{-1},\ x_j \in \mathbb{Z}_j, \tag{1}$$

а каждое $k \in \mathbb{Z}_+$ однозначно представимо в виде

$$k = \sum_{j=1}^{\infty} k_j m_{j-1}, \ k_j \in \mathbb{Z}_j. \tag{2}$$

Разложение (1) также однозначно, если при $x = s/m_n$, $0 < s < m_n$, $s \in \mathbb{Z}$, брать конечное число ненулевых x_j.

Для чисел $x \in [0,1)$ и $k \in \mathbb{Z}_+$ с разложениями (1), (2) положим по определению $\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j k_j / p_j\right)\right)$. Система функций $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ называется мультипликативной системой. Известно, что она ортонормирована и полна в $L^1[0,1)$ (см. [1, гл. 1,§ 1.5]). Легко видеть, что при $0 \le n < m_k$ функция $\chi_n(x)$ постоянна на $I_j^k = [(j-1)/m_k, j/m_k)$, $1 \le j \le m_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Для $f \in L^1[0,1)$ коэффициенты Фурье и частичная сумма Фурье по системе $\{\chi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ задаются формулами

$$\widehat{f}(j) = \int\limits_0^1 f(t)\overline{\chi_j(t)}\, dt, \ j \in \mathbb{Z}_+, \quad S_n(f)(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \widehat{f}(j)\chi_j(x), \ n \in \mathbb{N}.$$

Через $C^*[0,1)$ обозначим замыкание множества полиномов по системе $\{\chi_i\}_{i=0}^{\infty}$ в равномерной норме $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1)} |f(x)|$. Как обычно, пространство $L^p[0,1)$, $1 \le p < \infty$, снабжено нормой $\|f\|_p = \left(\int\limits_0^1 |f(t)|^p\, dt\right)^{1/p}$. Пусть $\mathcal{P}_n = \{f \in L^1[0,1) : \widehat{f}(i) = 0, i \ge n\}$, $n \in \mathbb{N}$, тогда определим наилучшее приближение для $f \in L^p[0,1)$, $1 \le p < \infty$, формулой $E_n(f)_p = \inf\{\|f - Q\|_p : Q \in \mathcal{P}_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Аналогично определяется $E_n(f)_\infty$ для $f \in C^*[0,1)$.

Для убывающей к нулю последовательности $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ будем писать $f \in E(\varepsilon)$, если $\|f\|_\infty \le \varepsilon_0$ и $E_n(f)_\infty \le \varepsilon_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Для убывающей к нулю последовательности $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ рассмотрим

$$A(\lambda) = \{f \in C^*[0,1) : \rho_n(f) := \sum_{k=n}^{\infty} |\widehat{f}(k)| \le \lambda_n, n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Будем использовать также средние Валле-Пуссена $v_n(f) = n^{-1} \sum\limits_{k=n+1}^{2n} S_k(f)$.

Будем писать $A_n \asymp B_n$, $n \in \mathbb{N}$, если существуют постоянные $C_1, C_2 > 0$, такие что $C_1 A_n \le B_n \le C_2 A_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Формулы, теоремы

Лемма 1 установлена в [2].

Лемма 1. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $Q_n \in \mathcal{P}_{m_n}$, такой что 1) $\|Q_n\|_\infty \le C m_n^{1/2}$; 2) $\sum\limits_{k=0}^{m_n-1} |\widehat{Q_n}(k)| \ge m_n$.*

Лемма 2 доказывается аналогично теореме 4.23 из [3, гл. 4, § 10].

Лемма 2. $f \in C^*[0,1)$ $\|f - v_n(f)\|_\infty \le C E_n(f)_\infty$, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. *Пусть $f \in C^*[0,1)$ и сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} E_n(f)_\infty$. Тогда величина $\rho_n(f) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} |\widehat{f}(k)|$ удовлетворяет неравенству*

$$\rho_n(f) \le C \left(n^{1/2} E_n(f)_\infty + \sum_{k=n}^{\infty} k^{-1/2} E_k(f)_\infty \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 2. *Пусть последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ убывает к нулю, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} \varepsilon_n$ сходится и последовательность $\{n^\beta \varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ не убывает для некоторого $\beta > 0$. Тогда*

$$\sup\{\rho_n(f) : f \in E(\varepsilon)\} \asymp \sum_{k=n}^{\infty} k^{-1/2} \varepsilon_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 3. *Пусть $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ убывает к нулю и удовлетворяет Δ_2-условию $\lambda_n \le C \lambda_{2n}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда справедливо соотношение*

$$\sup\{E_n(f)_\infty : f \in A(\lambda)\} \asymp \lambda_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Начнем с очевидного неравенства

$$E_n(f)_\infty \le \|f - S_n(f)\|_\infty \le \sum_{k=n}^{\infty} |\widehat{f}(k) \chi_k(x)| \le \rho_n(f) \le \lambda_n$$

для $f \in A(\lambda)$. С другой стороны, пусть $a_n = \lambda_n - \lambda_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда для функции $h(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x)$ находим, что

$$\rho_n(h)_\infty = \sum_{k=n}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=n}^{\infty} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) = \lambda_n, n \in \mathbb{N},$$

и $\rho_0(h) = \lambda - 1 \le \lambda_0$, то есть $h \in A(\lambda)$. В силу леммы 2 и почти очевидного равенства $\| \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k \chi_k \|_\infty = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ при $b_k \ge 0$, получаем

$$E_n(h)_\infty \ge C_1 \|h - v_n(h)\|_\infty = C_1 \left(\sum_{k=n+1}^{2n-1} \frac{k-n}{n} a_k + \sum_{k=2n}^{\infty} a_k \right) \ge$$

$$\ge C_1 \sum_{k=2n}^{\infty} a_k = C_1 \lambda_{2n} \ge C_2 \lambda_n.$$

Таким образом, соотношение результат теоремы установлен.

Отметим, что близкие вопросы для тригонометрических рядов рассматривались Н. А. Ильясовым [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М. : Наука, 1987. 344 с.

[2] *Волосивец С. С.* Сходимость рядов Фурье по мультипликативным системам и p-флуктуационный модуль непрерывности // Сиб. матем. журнал. 2006. Т. 47, № 2. С. 241–258.

[3] *Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку : Элм, 1981. 180 с.

[4] *Ильясов Н. А.* Прямая и обратная теоремы в теории абсолютно сходящихся рядов Фурье непрерывных периодических функций // Известия Уральского государственного университета. Математика и Механика. Компьютерные науки. 2006. Т. 44, № 1. С. 89–112.

УДК 517.95

Условия квазинильпотентности полугруппы переноса на полуоси[1]

Ву Нгуен Шон Тунг (Ханой, Вьетнам)
vnsontung@mail.ru

Рассматривается оператор переноса на полуоси в весовом банаховом пространстве типа L^p. Указаны общие условия на выбор весовой функции и на коэффициент поглощения в операторе переноса, при которых порожденная полугруппа оказывается квазинильпотентной (суперустойчивой).

Ключевые слова: оператор переноса, квазинильпотентная полугруппа, весовое банахово пространство.

Superstability conditions for transport semigroup on the semiaxis[1]

Vu Nguyen Son Tung (Hanoi, Vietnam)
vnsontung@mail.ru

Transport operator on the semiaxis is studied in a weighted Banach space of L^p-type. We give general conditions for a choice of a weight function and for an absorption coefficient, for which a generated transport semigroup turns out to be superstable.

Keywords: transport operator, superstable semigroup, weighted Banach space.

Используем стандартные понятия теории полугрупп (см. [1]–[3]). Обсудим условия, при которых оператор вида

$$A \equiv -\frac{d}{dx} - a(x), \qquad x \in [0, +\infty), \tag{1}$$

т. е. оператор переноса с поглощением на полуоси, будет порождать *суперустойчивую* (или, что то же самое, *квазинильпотентную*) полугруппу $U(t)$ класса C_0 в весовом банаховом пространстве типа L^p. В таком случае (см. [4]–[7]) экспоненциальный тип ω_0 полугруппы $U(t)$ равен $(-\infty)$, а спектр производящего оператора A является пустым.

Отметим, что первые исследования по теме — для класса операторов вида (1) — проведены нами в работе [8]. Затем, в работе [9], теория была доведена до конца. Сейчас мы коротко представим соответствующие результаты из [9]. Помимо прочего, их можно использовать в различных нелокальных и обратных задачах, связанных с теорией переноса. Общие постановки подобных задач см. в [9]–[11].

Рассмотрим на полуоси $\mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty)$ в весовом банаховом пространстве $E \equiv L^p\big(\mathbb{R}_+;\ e^{-\nu(x)}\,dx\big)$ с нормой

$$\|h\| = \|h\|_{p,\nu} \equiv \left(\int\limits_0^{+\infty} |h(x)|^p\, e^{-\nu(x)}\, dx \right)^{1/p}, \qquad h \in E,$$

дифференциальный оператор A из формулы (1). Функции $a(x)$ и $\nu(x)$, а также конечное значение $p \geqslant 1$ считаем заданными.

Оператор переноса A с областью определения

$$D(A) = \{\, h \in AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)\colon \quad h \in E, \quad Ah \in E, \quad h(0) = 0 \,\}$$

порождает полугруппу $U(t)$, действующую на элемент $h \in E$ по правилу

$$U(t)h(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ h(x-t)\, \exp\left(-\int\limits_0^t a(x-s)\, ds \right), & t < x < +\infty. \end{cases} \tag{2}$$

Напомним, что $AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ — множество локально абсолютно непрерывных функций на $\mathbb{R}_+$.

Укажем естественные ограничения на весовой показатель $\nu(x)$ и коэффициент $a(x)$, при которых полугруппа (2) является суперустойчивой (квазинильпотентной) в E. Речь идет о полугруппах класса C_0.

Теорема 1. *Пусть $\nu(x)$ — измеримая, неотрицательная, супераддитивная функция на $\mathbb{R}_+$, причем*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\nu(x)}{x} = +\infty. \tag{3}$$

Тогда для любой измеримой, неотрицательной, локально ограниченной функции $a(x)$ на $\mathbb{R}_+$ полугруппа (2) будет суперустойчивой в пространстве $L^p\big(\mathbb{R}_+;\ e^{-\nu(x)}\,dx\big)$. В частности, подходит выбор $a(x) \equiv 0$.

Обратим внимание на сочетание важного требования (3) и того, что функция $\nu(x)$ должна быть *супераддитивной* на $\mathbb{R}_+$. Последнее означает (см. [12]), что

$$\nu(x_1 + x_2) \geqslant \nu(x_1) + \nu(x_2), \qquad \forall\, x_1, x_2 \geqslant 0. \tag{4}$$

Условие (4) заведомо выполнено, если $\nu(x) = x\,\nu_0(x)$ с неотрицательной, монотонно возрастающей на $\mathbb{R}_+$ функцией $\nu_0(x)$. Но есть и примеры, где такое представление невозможно (см. [9]). В любом случае под действие теоремы 1 попадают стандартные показатели вида $\nu(x) = x^\alpha$ при $\alpha > 1$, или $\nu(x) = x\,\ln_+ x$, или $\nu(x) = x\,\ln_+ \ln_+ x$ и так далее.

Имеется возможность избежать существенных ограничений на $\nu(x)$ при соответствующем выборе коэффициента $a(x)$.

Теорема 2. *Пусть $a(x)$ — измеримая, неотрицательная, локально ограниченная функция на $\mathbb{R}_+$, причем*

$$\lim_{x\to+\infty} a(x) = +\infty. \tag{5}$$

Тогда при любом выборе неотрицательной, монотонно неубывающей функции $\nu(x)$ на $\mathbb{R}_+$ полугруппа (2) будет суперустойчивой в пространстве $L^p\big(\mathbb{R}_+;\ e^{-\nu(x)}\,dx\big)$. В частности, подходит выбор $\nu(x)\equiv 0$.

При доказательстве теоремы 2 снова используются соображения супераддитивности (см. [9]), действующие для функции

$$\Phi(x) = \int\limits_0^x \inf_{\tau\in[s,+\infty)} a(\tau)\,ds, \quad x \geqslant 0,$$

связанной с коэффициентом $a(x)$. Основное условие (5) существенно для нашего результата. Несмотря на свой ограничительный характер, оно применимо к большому числу примеров типа $a(x) = x^\beta$ при $\beta > 0$, или $a(x) = \ln_+ x$, или $a(x) = |x-1|^{1/2}$ и так далее.

В качестве простого приложения изложенной теории укажем нелокальную задачу

$$\begin{cases} u_t + u_x + a(x)u = 0, \\ u(0,t) = 0, \\ \int\limits_0^T \eta(t)u(x,t)\,dt = u_1(x), \end{cases} \tag{6}$$

с неизвестной функцией $u = u(x,t)$ на полуоси $x\in\mathbb{R}_+$ при $t\in[0,T]$. Функцию $u_1(x)$ считаем заданной. Пусть коэффициент $a(x)\geqslant 0$ выбран в согласии с теоремой 2. Тогда, как следует из результатов [9], задача (6) будет корректно разрешимой в пространстве $L^p(\mathbb{R}_+)$ с $p\in[1,+\infty)$ при любом выборе весовой функции $\eta\in BV[0,T]$, такой, что $\eta(0+0)\neq 0$. Более того, начальное состояние $u(x,0) = u_0(x)$ решения $u = u(x,t)$ конструктивно восстанавливается методом итераций.

Автор искренне благодарен И. В. Тихонову за постановку задачи и поддержку в исследовании.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.

[2] *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. N.Y.: Springer-Verlag, 1983. viii+280 p.

[3] *Engel K.-J., Nagel R.* One-parameter semigroups for linear evolution equations. N.Y.: Springer-Verlag, 2000. xxii+586 p.

[4] *Sinclair A. M.* Continuous semigroups in Banach algebras. Cambridge: Cambridge University Press, 1982. vi+146 p.

[5] *Balakrishnan A. V.* On superstability of semigroups // In: M.P. Polis et al (eds.). Systems modelling and optimization. Proceedings of the 18th IFIP Conference on System Modelling and Optimization. CRC Research Notes in Mathematics. Chapman and Hall, 1999. P. 12–19.

[6] *Balakrishnan A. V.* Superstability of systems // Applied Mathematics and Computation. 2005. Vol. 164, № 2. P. 321–326.

[7] *Neubrander F., Hart L.* Superstability of semiroups // Pre-print. 2018. P. 1–9. URL: https://people.math.gatech.edu/ lhart31/main12.pdf.

[8] *Ву Нгуен Шон Тунг.* Специальные примеры суперустойчивых полугрупп и их применение в теории обратных задач // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 3. С. 252–262.

[9] *Тихонов И. В., Ву Нгуен Шон Тунг.* Разрешимость нелокальной задачи для эволюционного уравнения с суперустойчивой полугруппой // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56, № 4. С. 490–510.

[10] *Тихонов И. В., Ву Нгуен Шон Тунг.* Разрешимость линейной обратной задачи для эволюционного уравнения с суперустойчивой полугруппой // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. 2018. Т. 26, № 2. С. 103–118.

[11] *Люлько Н. А.* Обратная задача с финальным переопределением для сверхустойчивой гиперболической системы // Марчуковские научные чтения 2019: труды конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики». Новосибирск: ИВМиМГ СОРАН, 2019. С. 305–311.

[12] *Bruckner A., Ostrow E.* Some function classes related to the class of convex functions // Pacific Journal of Mathematics. 1962. Vol. 12. № 4. P. 1203–1215.

УДК 517.538

Об аппроксимативных свойствах рядов Фурье по полиномам Якоби – Соболева[1]

Р. М. Гаджимирзаев (Махачкала, Россия)

ramis3004@gmail.com

Рассматривается задача о приближении функции f из пространства W^r частичными суммами ряда Фурье по системе полиномов Якоби $\{P_n^{\alpha-r,-r}(x)\}_{n=0}^{\infty}$, ортогональной относительно скалярного произведения типа Соболева. Основное внимание уделено получению оценки сверху для функции типа Лебега частичных сумм ряда Фурье по системе $\{P_n^{\alpha-r,-r}(x)\}_{n=0}^{\infty}$.

Ключевые слова: полиномы Якоби, ряды Фурье, скалярное произведение типа Соболева, функция Лебега.

On the approximation properties of the Fourier series by the Jacobi – Sobolev polynomials[1]

R. M. Gadzhimirzaev (Makhachkala, Russia)

ramis3004@gmail.com

We consider the problem of approximating a function f from the space W^r by partial sums of the Fourier series by the system of Jacobi polynomials $\{P_n^{\alpha-r,-r}(x)\}_{n=0}^{\infty}$, orthogonal with respect to the Sobolev-type inner product. Upper bounds are obtained for the Lebesgue-type function of partial sums of the Fourier series by the system $\{P_n^{\alpha-r,-r}(x)\}_{n=0}^{\infty}$.

Keywords: Jacobi polynomials, Fourier series, Sobolev type inner product, Lebesgue function.

Введение

Пусть $-1 < \alpha$ – нецелое, $\rho(x) = (1-x)^{\alpha}$, L^2_{ρ} – весовое пространство Лебега, состоящее из измеримых на $[-1,1]$ функций f, для которых

$$\int_{-1}^{1} f^2(x)\rho(x)dx < \infty.$$

Для $r \in \mathbb{N}$ через $W^r_{L^2_\rho}$ обозначим пространство функций f, непрерывно дифференцируемых $r-1$ раз, причем $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна на $[-1,1]$, а $f^{(r)} \in L^2_{\rho}$, W^r – класс r раз непрерывно дифференцируемых функций f, заданных на $[-1,1]$ и для которых $|f^{(r)}| \le 1$. Для $f, g \in W^r_{L^2_\rho}$

определим скалярное произведение Соболева следующего вида

$$\langle f,g\rangle_S=\sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(-1)g^{(\nu)}(-1)+\int\limits_{-1}^{1} f^{(r)}(x)g^{(r)}(x)\rho(x)dx. \qquad (1)$$

Рассмотрим систему полиномов

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}\frac{(x+1)^n}{n!}, & 0\le n\le r-1\\ \frac{2^r}{(n+\alpha-r)^{[r]}\sqrt{h_{n-r}^{\alpha,0}}}P_n^{\alpha-r,-r}(x), & r\le n,\end{cases} \qquad (2)$$

где $P_n^{\alpha-r,-r}(x)$ – полином Якоби степени n. В работе [1] было показано, что система (2) полна в $W^r_{L^2_\rho}$ и ортонормирована относительно скалярного произведения (1). Ряд Фурье по этой системе имеет следующий вид

$$f(x)=\sum_{k=0}^{r-1}\frac{f^{(k)}(-1)}{k!}(x+1)^k+\sum_{k=r}^{\infty}\frac{2^r\widehat{f}_kP_k^{\alpha-r,-r}(x)}{\sqrt{h_{k-r}^{\alpha,0}}(k+\alpha-r)^{[r]}}, \qquad (3)$$

где

$$\widehat{f}_k=\langle f,\varphi_k\rangle_S=\int\limits_{-1}^{1} f^{(r)}(t)\frac{P_{k-r}^{\alpha,0}(t)}{\sqrt{h_{k-r}^{\alpha,0}}}(1-t)^\alpha dt, \quad k\ge r.$$

Через $S_{n+2r}^\alpha(f)=S_{n+2r}^\alpha(f,x)$ обозначим частичную сумму ряда (3):

$$S_{n+2r}^\alpha(f)=\sum_{k=0}^{r-1}\frac{f^{(k)}(-1)}{k!}(x+1)^k+\sum_{k=r}^{n+2r}\frac{2^r\widehat{f}_kP_k^{\alpha-r,-r}(x)}{\sqrt{h_{k-r}^{\alpha,0}}(k+\alpha-r)^{[r]}}.$$

В той же работе были исследованы аппроксимативные свойства сумм $S_{n+2r}^\alpha(f)$ для функций из пространства W^r. В частности была доказана следующая (см. [1, теорема 4])

Теорема А. *Пусть* $-1<\alpha$ *– нецелое,* $r\in\mathbb{N}$, $f\in W^r$. *Тогда*

$$|f(x)-S_{n+2r}^\alpha(f)|\le c(r)\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n+2r}\right)^r\omega\left(f^{(r)},\frac{\sqrt{1-x^2}}{n+2r}\right)+$$
$$c(r)\left[\omega\left(f^{(r)},\frac{1}{n+2r}\right)\frac{I_{r,n}^\alpha(x)}{(n+2r)^r}+\omega\left(f^{(r)},\frac{1}{(n+2r)^2}\right)J_{r,n}^\alpha(x)\right], \qquad (4)$$

где

$$I_{r,n}^\alpha(x)=(1+x)^r\int\limits_{-1}^{1-1/n^2}(1-t)^{\alpha-\frac{r}{2}}(1+t)^{\frac{r}{2}}|K_{n+r}^{\alpha-r,r}(x,t)|dt, \qquad (5)$$

$$
J_{r,n}^{\alpha}(x)=(1+x)^{r}\int\limits_{1-1/n^{2}}^{1}(1-t)^{\alpha}|K_{n+r}^{\alpha-r,r}(x,t)|dt, \tag{6}
$$

$$
\omega(g,\delta)=\sup_{x,t\in[-1,1],|x-t|\le\delta}|f(x)-f(t)|.
$$

В связи с неравенством (4) возникает задача об оценке величин $I_{r,n}^{\alpha}(x)$ и $J_{r,n}^{\alpha}(x)$, определенных равенствами (5) и (6) соответственно. Основными результатами настоящей работы являются теоремы **1** и **2**, в которых получены оценки сверху для $I_{r,n}^{\alpha}(x)$, $J_{r,n}^{\alpha}(x)$ при $x\in(-1,1)$.

Основной результат

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть $r-1<\alpha$ – нецелое, $x\in(-1,1)$. Тогда для величины $I_{r,n}^{\alpha}(x)$ справедливы следующие оценки:*

1) если $x\in\left[0,1-\frac{1}{2n^2}\right]$, то

$$
I_{r,n}^{\alpha}(x)\le c(\alpha,r)(1-x)^{\frac{r}{2}}\left[\ln(n\sqrt{1-x}+1)+(1-x)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}+1\right];
$$

2) если $x\in\left(1-\frac{1}{2n^2},1\right)$, то

$$
I_{r,n}^{\alpha}(x)\le c(\alpha,r)\begin{cases}1, & \alpha\le r-\frac{1}{2},\\ (1-x)^{\frac{r-\alpha}{2}-\frac{1}{4}}, & \alpha>r-\frac{1}{2};\end{cases}
$$

3) если $x\in\left[-1+\frac{1}{2n^2},0\right)$, то

$$
I_{r,n}^{\alpha}(x)\le c(\alpha,r)(1+x)^{\frac{r}{2}}\left(\ln(n\sqrt{1+x}+1)+(1+x)^{-\frac{1}{4}}+1\right);
$$

4) если $x\in\left(-1,-1+\frac{1}{2n^2}\right)$, то

$$
I_{r,n}^{\alpha}(x)\le c(\alpha,r)(1+x)^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}.
$$

Теорема 2. *Пусть $r-1<\alpha$ – нецелое, $x\in(-1,1)$. Тогда для величины $J_{r,n}^{\alpha}(x)$ справедливы следующие оценки:*

1) если $x\in\left(1-\frac{2}{n^2},1\right)$, то

$$
J_{r,n}^{\alpha}(x)\le\frac{c(\alpha,r)}{n^{2r}};
$$

2) если $x \in \left[0, 1 - \frac{2}{n^2}\right]$, *то*

$$J_{r,n}^{\alpha}(x) \leq c(\alpha, r)\frac{(1-x)^{\frac{r-\alpha}{2}-\frac{3}{4}}}{n^{r+\alpha+\frac{3}{2}}};$$

3) если $x \in (-1, 0)$, *то*

$$J_{r,n}^{\alpha}(x) \leq c(\alpha, r)\frac{(1+x)^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}}{n^{r+\alpha+\frac{3}{2}}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Шарапудинов И. И.* Аппроксимативные свойства рядов Фурье по многочленам, ортогональным по Соболеву с весом Якоби и дискретными массами // Математические заметки. 2017. Т. 101, № 4. С. 611–629.

УДК 517.518.3

О сходимости орторекурсивных разложений почти всюду[1]

В. В. Галатенко (Москва, Россия)
vgalat@imscs.msu.ru
Т. П. Лукашенко (Москва, Россия)
lukashenko@mail.ru
В. А. Садовничий (Москва, Россия)
info@rector.msu.ru

Изложены результаты о сходимости почти всюду орторекурсивных разложений. Установлено, что для орторекурсивных разложений, сходящихся к разлагаемой функции, множитель Вейля $W(k) = \log_2^2(k+1)$, как и для ортогональных разложений.

Ключевые слова: орторекурсивные разложения функций, сходимость почти всюду, множитель Вейля.

Благодарности: исследование выполнено при поддержке Междисциплинарной научно–образовательной школы Московского университета "Математические методы анализа сложных систем".

An almost everywhere convergence orthorecursive expansions[1]

V. V. Galatenko (Moscow, Russian Federation)
vgalat@imscs.msu.ru
T. P. Lukashenko (Moscow, Russian Federation)
lukashenko@mail.ru
V. A. Sadovnichiy (Moscow, Russian Federation)
info@rector.msu.ru

State results on almost everywhere convergence for orthorecursive expansions. Establish for orthorecursive expansions convergent to the expanded functions Weil multiplier $W(k) = \log_2^2(k+1)$ as for orthogonal expansions.

Keywords: orthorecursive expansions of functions, almost everywhere convergence, Weil multiplier.

Acknowledgements: this research has been supported by the interdisciplinary Scientific and Educational School of Moscow University "Mathematical Methods of Complex Systems' Analysis".

Орторекурсивные разложения [1, 2] являются естественным обобщением классических ортогональных разложений. Напомним их определение.

Пусть $\mathbf{H}$ — пространство со скалярным произведением $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ (для определенности будем рассматривать пространства над $\mathbf{R}$), $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{H}$

— произвольная система нормированных элементов, $f \in \mathbf{H}$ — раскладываемый элемент. Определим индуктивно последовательность остатков $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ и последовательность коэффициентов $\{\widehat{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$r_0 = f; \quad \widehat{f}_n = (r_{n-1}, e_n),\ r_n = r_{n-1} - \widehat{f}_n e_n,\ n = 1, 2, \ldots.$$

Орторекурсивным разложением элемента f по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \widehat{f}_n e_n$.

Легко видеть, что если система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ортогональна, то орторекурсивное разложение по ней совпадает с классическим рядом Фурье. Даже без ортогональности системы для орторекурсивных разложений выполняются классические свойства ортогональных разложений, такие как равенство Бесселя

$$\|r_N\|^2 = \left\| f - \sum_{n=1}^{N} \widehat{f}_n e_n \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{N} \left| \widehat{f}_n \right|^2,$$

неравенство Бесселя

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \widehat{f}_n \right|^2 \le \|f\|^2$$

и эквивалентность сходимости разложения к разлагаемому элементу равенству Парсеваля

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \widehat{f}_n \right|^2 = \|f\|^2$$

(см., например, [2]).

В теории ортогональных рядов известна теорема Меньшова–Радемахера (см. [3, 4] или [5, с. 332, 532]), утверждающая, что для сходимости почти всюду на $[0, 1]$ ряда ортонормированных функций $\sigma = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$ достаточно, чтобы сходился ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \log_2^2(k+1)$.

Меньшовым Д. Е. в [3] было также показано, что в приведенном условии $\log_2^2(k+1)$ нельзя заменить на любую неубывающую последовательность $o\left(\log_2^2(k+1)\right)$ — растущую медленнее $\log_2^2(k+1)$. Доказывающие этот факт теоремы ряда авторов см. в [5, гл. 9, § 1].

О переносе теоремы Меньшова–Радемахера на ряд других систем см. [6].

Рассмотрим вопрос об аналогичном условии на коэффициенты орторекурсивных разложений, гарантирующие их сходимость почти всюду. Оказалось, что в общем случае ситуация следующая (см. [7]).

Теорема 1. *Если пространство Лебега $L^2(\Omega)$, $0 < \mu\Omega < \infty$, сепарабельно, а λ_k — такая строго положительная последовательность, что все $\lambda_k \geq 1$ и*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \infty,$$

то для любой функции $f(x) \in L^2(\Omega)$, $\|f(x)\| > 0$, найдется такая нормированная последовательность функций $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, что орторекурсивный ряд $f(x)$ по системе $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ не сходится по норме пространства, не сходится поточечно почти всюду на Ω и при этом

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}_k|^2 \cdot \lambda_k < \infty.$$

Теорема 2. *Если $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность функций из пространства Лебега $L^2(\Omega)$, нормы которых ограничены в совокупности $\sup\limits_k \|e_k(x)\| = C < \infty$, положительная последовательность $\lambda_k \geq 1$ такова, что ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \Lambda < \infty,$$

а числовая последовательность a_k удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \cdot \lambda_k = L < \infty,$$

то функциональнай ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e_k(x)$ абсолютно сходится почти всюду на Ω и

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} |a_k e_k(x)| \right\| \leq C\sqrt{L\Lambda}.$$

Замечание. Условия теорем 1 и 2 показывают, что эти теоремы дополняют друг друга и не могут быть усилены.

Условие сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}$ может быть существенно ослаблено, если ограничиться рассмотрением орторекурсивных разложений, сходящихся по норме к разлагаемой функции (что имеет место, в частности, для полных ортонормированных систем). Более конкретно, получена следующая теорема.

Теорема 3. *Если орторекурсивное разложение функции $f(x) \in L^2(\Omega)$ по последовательности нормированных функций $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к $f(x)$ в $L^2(\Omega)$ и сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}_k|^2 \log_2^2(k+1),$$

то орторекурсивное разложение $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \hat{f}_k e_k(x)$ сходится к $f(x)$ почти всюду на Ω.

Таким образом, для орторекурсивных разложений по последовательности нормированных функций, сходящихся по норме к разлагаемой функции, множителем Вейля является, как и для ортонормированных систем (см. [5, Гл. 9]), последовательность $\lambda_k = \log_2^2(k+1)$. Это усиление результата из [7], где было доказано, что для орторекурсивных разложений, сходящихся по норме к разлагаемой функции, множителем Вейля является последовательность $\lambda_k = \sqrt{k}$. Улучшить теорему 3 нельзя, так как окончательность множителя Вейля $\log_2^2(k+1)$ установлена даже для ортонормированных систем (см. в [3] и [5, гл. 9, § 1]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Лукашенко Т. П.* Об орторекурсивных разложениях по системе Фабера–Шаудера // Тез. докл. 10-й Саратовской зимней школы “ Современные проблемы теории функций и их приложения”, Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 2000. С. 83.

[2] *Лукашенко Т. П.* О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2001. № 1. С. 6–10.

[3] *Menchoff D.* Sur les séries de fonctions ortogonales // Fund. Math. 1923. Vol. 4. P. 82–105.

[4] *Rademacher H.* Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen // Math. Annalen. 1922. Vol. 87. P. 111–138.

[5] *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М. : издательство АФЦ, 1999. 550 с.

[6] *Галатенко В. В., Лукашенко Т. П., Садовничий В. А.* Об условии сходимости почти всюду функционального ряда со слабым аналогом свойства ортонормированности // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2016. № 2. С. 18–24.

[7] *Galatenko V. V., Lukashenko T. P., Sadovnichiy V. A.* Convergence Almost Everywhere of Orthorecursive Expansions in Functional Systems // Advances in Dynamical Systems and Control. Studies in Systems, Decision and Control. V. 69. Springer International Publishing Switzerland, 2016. P. 3–11.

[8] *Галатенко В. В., Лукашенко Т. П., Садовничий В. А.* Об условии сходимости почти всюду орторекурсивных разложений // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2016. № 5. С. 20–25.

УДК 517.9

Об одном классе разностных операторов[1]

Г. В. Гаркавенко, Н. Б. Ускова (Воронеж, Россия)
g.garkavenko@mail.ru, nat-uskova@mail.ru

В работе рассматривается разностный оператор второго порядка с инволюцией при потенциале. Получены условия на потенциал, при которых возможно преобразование подобия исследуемого оператора в оператор блочно-диагонального вида и приведены оценки его собственных значений.

Ключевые слова: разностный оператор, метод подобных операторов, спектр.

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00732).

On a class of difference operators[1]

G. V. Garkavenko, N. B. Uskova (Voronezh, Russia)
g.garkavenko@mail.ru, nat-uskova@mail.ru

We consider the difference operator two order with involution. The conditions for the potential, in which the similarity transform this operator for the block-diagonal operator was obtained. We obtain also the asymptotic estimates for the eigenvalues.

Keywords: difference operator, method of similar operators, spectrum.

Acknowledgements: this work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 19-01-00732).

В работах [1] – [6] исследовались спектральные свойства разностного оператора, возникающего при дискретизации дифференциального оператора второго порядка с растущим потенциалом. Получены асимптотические оценки собственных значений, собственных векторов и спектральных проекторов. Первоначально задача исследования такого разностного оператора ставилась в [7]. В настоящей работе изучается разностный оператор, соответствующий дискретизации оператора второго порядка с растущим потенциалом с инволюцией, т. е. оператору $d^2x/dt^2 - q(-t)x(t)$ и изучается вопрос его приведения с помощью преобразования подобия к оператору блочно-диагонального вида. При этом выписываются условия на потенциал, при которых такое преобразование возможно.

Заметим, что дифференциальные операторы второго порядка с инволюцией активно изучаются в настоящее время (см., например, [8] – [10]).

Перейдем к более подробной постановке задачи. Как обычно, через $l_2(\mathbb{Z})$ обозначено гильбертово пространство двусторонних комплексных последовательностей $y : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, суммируемых с квадратом модуля $\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} |y(i)|^2 < \infty$, со скалярным произведением $(x, y) = \sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} x(i)\overline{y(i)}$

и с нормой $\|y\|_2 = \Big(\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} |y(i)|^2\Big)^{1/2}$, порождаемой этим скалярным произведением. Введем в рассмотрение следующие пространства операторов. Символом $\mathrm{End}\, l_2$ обозначим банахову алгебру ограниченных линейных операторов, действующих в l_2 с нормой $\|X\| = \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|Xx\|$, $x \in l_2$, $X \in \mathrm{End}\, l_2$. Нам также потребуется более узкое подпространство операторов из $\mathrm{End}\, l_2$. Пусть $\{Q_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — дизъюнктная система ортопроекторов в $\mathrm{End}\, l_2$. Тогда каждому оператору $X \in \mathrm{End}\, l_2$ можно поставить в соответствие две матрицы: числовую $X \sim (x_{ij})$ относительно стандартного базиса $\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$, $e_n(k) = \delta_{nk}$, n, $k \in \mathbb{Z}$, δ_{nk} — символ Кронекера и операторную $X \sim (X_{ij})$, где $X_{ij} = Q_i X Q_j$, $i, j \in \mathbb{Z}$, относительно введенной системы ортопроекторов. Оператор $X \in \mathrm{End}\, l_2$ отнесем к $\mathrm{End}_1\, l_2 \subset \mathrm{End}\, l_2$, если конечна величина $\sum\limits_{p\in\mathbb{Z}} \max\limits_{i-j=p} \|Q_i X Q_j\|$, принимаемая за норму в $\mathrm{End}_1\, l_2$. Таким образом, $\mathrm{End}_1\, l_2$ — подпространство операторов из $\mathrm{End}\, l_2$, (операторные) матрицы которых имеют суммируемые диагонали. Заметим, что в работах [1] – [6] использовалось именно это пространство в качестве пространства допустимых возмущений метода подобных операторов.

Рассмотрим в пространстве l_2 разностный оператор $\mathcal{E} : D(\mathcal{E}) \subset l_2 \to l_2$, действующий по формуле $(\mathcal{E}x)(n) = x(n-1) + x(n+1) - 2x(n) - q(-n)x(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, где $q : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ — растущая последовательность, условия на которую появятся ниже. Область определения $D(\mathcal{E})$ оператора $\mathcal{E}$ состоит из таких $x \in l_2$, что $\mathcal{E}x \in l_2$, т. е. $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |q(-n)x(n)|^2 < \infty$. Следуя далее общей схеме метода подобных операторов [1], оператор $\mathcal{E}$ представляют в виде $\mathcal{E} = A - B$, где A — оператор с диагональной матрицей и $B \in \mathrm{End}_1\, l_2$ (см. [1] – [6]). Преобразованием подобия оператор $\mathcal{E}$ приводит к оператору $A - Y$, где $Y \in \mathrm{End}_1\, l_2$ также имеет диагональную матрицу (или матрицу, имеющую ненулевой центральный блок порядка $2k+1$, где $k \in \mathbb{Z}_+$ — некоторое число и ненулевую главную диагональ). В рассматриваемом случае этот вариант не проходит, так как у оператора $\mathcal{E}$ стоит растущая последовательность по побочной диагонали. Поэтому мы будем осуществлять блочную диагонализацию оператора $\mathcal{E}$, т. е. будем преобразованием подобия приводить его к следующему виду: по главной диагонали будут стоять ненулевые блоки размера 2×2 и центральный блок размера $2k+1 \times 2k+1$.

Пусть $P_n(x) = (x, e_n)e_n + (x, e_{-n})e_{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, $P_0(x) = (x, e_0)e_0$, где e_m, $m \in \mathbb{Z}$, — векторы стандартного базиса в l_2. В качестве невозмущенного оператора берем оператор $A = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} P_n \mathcal{E} P_n$, а возмущением считаем оператор $B = \mathcal{E} - \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} P_n \mathcal{E} P_n$. Очевидно, что $B \in \operatorname{End}_1 l_2$. Оператор A имеет собственные значения, совпадающие с объединением собственных значений матриц

$$\begin{pmatrix} -2 & q(n) \\ q(-n) & -2 \end{pmatrix}.$$

А именно,

$$\sigma(A) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+} \sigma_n,$$

где $\sigma_0 = \{q(0) - 2\}$, $\sigma_n = \{-2 \pm \sqrt{q(n)q(-n)}\}$, $n \in \mathbb{N}$. Соответствующие ортогональные собственные векторы находятся в $\operatorname{Im} P_n$ и в $\operatorname{Im} P_n$, $n \in \mathbb{N}$, имеют координаты $e_{n,1} = (1, -\sqrt{\frac{q(-n)}{q(n)}})$, $e_{n,2} = (\sqrt{\frac{q(n)}{q(-n)}}, 1)$, $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, в базисе из своих собственных векторов матрица $\widetilde{A}$ оператора A диагональна. Но, чтобы это было возможно, необходимо требовать сбалансированность последовательности $q : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ (потенциала q): пусть существуют такие константы $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, что

$$c_1|q(-n)| < |q(n)| < c_2|q(-n)|. \tag{1}$$

В базисе e_0, $e_{i,1}$, $e_{i,2}$, $i \in \mathbb{N}$, матрица возмущения $\widetilde{B}$ имеет ненулевые блоки $B_{i,i+1}$ и $B_{i,i-1}$, которые легко можно непосредственно вычислить. При этом $\widetilde{B} = U^{-1}BU \in \operatorname{End}_1 l_2$.

Теперь к оператору $\widetilde{A} - \widetilde{B}$ можно применить схему метода подобных операторов из, например, [4].

Имеет место

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* (1) *и*

$$\gamma_i = \operatorname{dist}(\sigma_i, \sigma(\widetilde{A}) \setminus \sigma_i) \to \infty \tag{2}$$

при $i \to \infty$. Тогда существует такое $k > 0$, что оператор $\mathcal{E}$ подобен оператору $\widetilde{A} - P_{(k)}XP_{(k)} - \sum\limits_{i>k} P_i X P_i$, где $X \in \operatorname{End}_1 l_2$ — решение некоторого нелинейного уравнения метода подобных операторов и его можно найти методом простых итераций, причем $X_{(0)} = 0$, $X_{(1)} = \widetilde{B}$ и т. д.

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 собственные значения $\widetilde{\lambda}_{n,1}$ и $\widetilde{\lambda}_{n,2}$ имеют асимптотику*

$$|\widetilde{\lambda}_{n,i} - \lambda_{n,i}| \le c_3\gamma_n^{-1}, \quad i = 1, 2,$$

где $c_3 > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* Спектральный анализ разностных операторов второго порядка с растущим потенциалом // ТВИМ. 2015. № 3(28). С. 40–48.

[2] *Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* Спектральный анализ одного класса разностных операторов с растущим потенциалом // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, № 4. С. 395–402.

[3] *Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* Метод подобных операторов в исследовании спектральных свойств одного класса разностных операторов // Вестник ВГУ. Серия: Физика-Математика. 2016. № 3. С. 101–111.

[4] *Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* Метод подобных операторов в исследовании спектральных свойств разностных операторов с растущим потенциалом // Сиб. электрон. матем. изв. 2017. Т. 14. С. 673–689.

[5] *Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* Асимптотика собственных значений разностного оператора с растущим потенциалом и полугруппы операторов // Математическая физика и компьютерное моделирование. 2017. Т. 20, № 4. С. 6–17.

[6] *Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б., Зголич А. Р.* Метод подобных операторов и спектральные свойства разностного оператора с четным потенциалом // Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. 2016. № 20(241). С. 42–49.

[7] *Мусилимов Б., Отелбаев М.* Оценка наименьшего собственного значения одного класса матриц, соответствующего разностному уравнению Штурма-Лиувилля // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1981. Т. 21, № 6. С. 1430–1434.

[8] *Крицков Л. В., Сарсенби А. М.* Базисность Рисса системы корневых функций дифференциального оператора второго порядка с инволюцией // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53, № 1. С. 35–48.

[9] *Владыкина В. Е., Шкаликов А. А.* Спектральные свойства обыкновенных дифференциальных операторов с инволюцией // Доклады РАН. 2019. Т. 484, № 1. С. 12–17.

[10] *Kopzhassanova A. A., Lukashov A. L., Sarsenbi A. M.* Spectral properties of non-self-adjoint perturbation for a spectral problem with involution // Abstr. Appl. Anal. 2012. Article ID: 590781. 5 p.

УДК 517.9

Применение метода обобщенных степеней для построения решений кватернионного варианта системы Коши-Римана[1]

Ю. А. Гладышев, Е. А. Лошкарева (Калуга, Россия)

losh-elena@yandex.ru

Рассматривается обобщенная система Коши-Римана для кватернионных функций в восьмимерном пространстве. Изучены некоторые классы решений этой системы и заявлено, что существует возможность использования для построения решений этой системы дифференциальных уравнений обобщенных степеней. В настоящем сообщении указан один из способов решения этой задачи.

Ключевые слова: обобщенные степени Берса, кватернионы, система Коши-Римана.

Application of the generalized degree method for constructing solutions of the quaternion variant of the Cauchy-Riemann system[1]

Yu. A. Gladyshev, E. A. Loshkareva (Kaluga, Russia)

losh-elena@yandex.ru

A generalized Cauchy-Riemann system for quaternionic functions in an eight-dimensional space is considered. Some classes of solutions of this system are studied and it is stated that it is possible to use generalized degrees of differential equations to construct solutions of this system. This message indicates one of the ways to solve this problem.

Keywords: generalized degrees of Bers, quaternions, Cauchy-Riemann system.

Введение

Обобщенная система Коши-Римана в пространстве R^8 [1] имеет вид

$$\left.\begin{matrix} D_1X - \Psi D_2 = 0, \\ X\bar{D}_2 + \bar{D}_1\Psi = 0 \end{matrix}\right\}. \tag{1}$$

Здесь X, Ψ - функции переменной x_i $\left(i = \overline{1,8}\right)$, принимающие значения в теле кватернионов с системой единиц e_i $\left(i = \overline{0,3}\right)$, а D_1, D_2 кватернионые операторы

$$D_1 = \sum_0^3 e_i \frac{\partial}{\partial x_{i+1}}, D_2 = \sum_0^3 e_i \frac{\partial}{\partial x_{i+5}}, i = \left(\overline{0,3}\right). \tag{2}$$

Далее переменные x_5, x_6, x_7, x_8 для удобства обозначим $y_k, k = \overline{(1,4)}$.

Система (1) допускает введение новых функций α, β от x_i, y_k вида

$$X = \bar{D}_1\alpha + \beta D_2, \;\; \psi = -\alpha\bar{D}_2 + D_1\beta. \tag{3}$$

Предполагая, что α, β таковы, что X, Ψ имеют непрерывные первые производные, убеждаемся, что функции α, β гармонические кватернионы

$$\left(D_1\bar{D}_1 + D_2\bar{D}_2\right)\alpha = 0, \;\; \left(D_1\bar{D}_1 + D_2\bar{D}_2\right)\beta = 0, \tag{4}$$

то есть все компоненты α, β являются решениями восьмимерного уравнения Лапласа.

Обратно, если α, β удовлетворяют (4), то X', Ψ' и X'', Ψ''

$$X' = \bar{D}_1\alpha, \;\; \Psi' = -\alpha\bar{D}_2, \tag{5}$$

$$X'' = \beta D_2, \;\; \Psi'' = \bar{D}_1\beta, \tag{6}$$

дают решения системы (1).

Таким образом преобразование (3) сводит решение системы (1) к построению решений уравнения Лапласа и последующему использованию соотношений (5), (6).

Поскольку при физической интерпретации системы (1) она совпадает с системой Максвелла [2,3,4], при определенном отождествлении компонент X_i, Ψ_i с напряженностями полей , то величины α, β можно связать с электрическими и магнитными потенциалами. Поэтому назовем α, β кватернионными потенциалами.

Для приложения ОС введем комплексные переменные

$$z_k = x_k + iy_k, \;\; \bar{z}_k = x_k - iy_k, \;\; i = \overline{1,4}. \tag{7}$$

Запишем соответствующие операторы

$$D_k = \tfrac{\partial}{\partial z_k} = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial}{\partial x_k} - i\tfrac{\partial}{\partial y_k}\right), \;\; \bar{D}_k = \tfrac{\partial}{\partial \bar{z}_k} = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial}{\partial x_k} + i\tfrac{\partial}{\partial y_k}\right), \tag{8}$$

а так же их правые обратные

$$I_k = \int\limits_{z_{k0}}^{z_k} d\xi ..., \;\; \bar{I}_k = \int\limits_{\bar{z}_{k0}}^{\bar{z}_k} d\eta .... \tag{9}$$

Ограничим их действие чисто алгебраическими операциями над переменными $z_k, \bar{z}_k$. Введенные операторы обладают всеми свойствами, необходимыми для применения метода ОС. Ниже всюду использован параметрический вариант метода ОС. Поэтому функции, используемые во всех выражениях и конструкциях, являются комплекснозначными однокомпонентными функциями восьми комплексных переменных $z_k, \bar{z}_k, k = \overline{1,4}$. В переменных $z_k, \bar{z}_k$ уравнение Лапласа запишем

$$\sum_{k=1}^{4} 4\frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial z_k \partial \bar{z}_k} = 0, \ \ \sum_{k=1}^{4} 4\frac{\partial^2 \beta_i}{\partial z_k \partial \bar{z}_k} = 0, \ \ i = \overline{1,4}, \tag{10}$$

или, приняв обозначение $D_k = 4\frac{\partial^2}{\partial z_k \partial \bar{z}_k}$, как

$$\sum_{k=1}^{4} D_k \alpha_i = 0, \ \ \sum_{k=1}^{4} D_k \beta_i = 0. \tag{11}$$

Для обобщенной константы C найдем

$$C = \prod_{k=1}^{4} \left(f_{1k}\left(z_k\right) + f_{2k}\left(\bar{z}_k\right) \right). \tag{12}$$

Здесь f_{1k}, f_{2k} аналитические функции соответствующих комплексных переменных. Из вида C следует, что она представлена как произведение функций, зависящих от пар переменных $z_k, \bar{z}_k$.

В дальнейшем в качестве f_{1k}, f_{2k} возьмем важный случай степенных функций

$$f_{1k} = c_{1k} z_k^{l_k}, \ \ f_{2k} = c_{2k} \bar{z}_k^{m_k}. \tag{13}$$

Комплексные величины c_{1k}, c_{2k} дают в дальнейшем при подстановке в (12) 16 произведений. Назовем эти произвольные постоянные параметрами. Далее будем использовать интегральные операторы I_k , определив их на основе (9) как

$$I_k = \frac{1}{4} \int_{z_{k0}}^{z_k} d\eta \int_{\bar{z}_{k0}}^{\bar{z}_k} d\xi, \ \ k = \overline{1,4}. \tag{14}$$

Напомним, что $z_k, \bar{z}_k$ рассматриваются как независимые переменные.

Обозначенная степень $X^{(p)}C$ определена

$$X_1^{(p_1)} X_2^{(p_2)} X_3^{(p_3)} X_4^{(p_4)} C = p_1! p_2! p_3! p_4! I_1^{(p_1)} I_2^{(p_2)} I_3^{(p_3)} I_4^{(p_4)} C = \prod_{k=1}^{4} p_k! I_k^{(p_k)} C. \tag{15}$$

Левая сторона формулы имеет символический характер и указывает на конструкцию и свойства правой части, которая может быть вычислена как комплексная функция 8 комплексных переменных $z_k, \bar{z}_k, k = \overline{1,4}$. Действительно, используя (11) и независимость комплексных переменных, найдем, проводя операции интегрирования по комплексным переменным при C, определенном в (11)

$$X^{(p)}C = \prod_{k=1}^{4} p_k! \left(\frac{l_k! z_k^{p_k+l_k}}{(p_k+l_k)! p_k!} c_{k1} + \frac{m_k! z_k^{p_k} \bar{z}_k^{p_k+m_k}}{(p_k+m_k)! p_k!} c_{k2} \right). \tag{16}$$

По построению (15) имеет следующие правила «дифференцирования», то есть действия операторов

$$D_i \prod_{k=1}^{4} X_k^{(p_k)} C = p_i \prod_{k=1}^{4} X_k^{(p_k-\delta_{ki})} C, \tag{17}$$

где δ_{ki} дельта Кронекера. Составим линейную комбинацию степеней $X^{(p)}C$, подставив ее в символической форме как степень суммы $\sum \alpha_k X_k^{(1)} C$

$$V_n = \left(\sum_{k=1}^{4} \alpha_k X_k^{(1)} \right)^n. \tag{18}$$

Здесь α_k некоторые произвольные действительные числа. Прежде чем переходить к построению базисных решений (10) приведем следующую формулу

$$D_i \left(\sum_{j=1}^{4} \alpha_j X_j^{(p)} \right)^n = n\alpha_i \left(\sum_{j=1}^{4} \alpha_j X_j^{(p-1)} \right)^{n-1}. \tag{19}$$

Из вида (19) следует, что выражение V_n , введенное в (18) удовлетворяет (10), если потребовать

$$\sum_{j=0}^{4} \alpha_j = 0. \tag{20}$$

Есть возможность построить решение методом ОС несколько в другом виде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Гладышев Ю. А.* О некоторых классах решений обобщенной системы Коши — Римана // Проблемы математического анализа. 2021. Вып. 109. С. 59–64.

[2] *Ландау Л. Д.* Теория поля. Москва : Наука, 1973. 504 с.

[3] *Гладышев Ю. А., Лошкарева Е. А.* Об одной физической интерпретации обобщенных условий Коши-Римана // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Сборник трудов Международной научной конференции, 2021. Р. 102–109.

[4] *Gladyshev Ya. A., Loshkareva E. A.* On one physical interpretation of generalized conditions Cauchy-Riemann // J. Phys.: Conf. Ser. 2021. 1902 012037.

УДК 517.518

Преобразования Фурье сверток функций из пространств Лебега и Лоренца[1]

Б. И. Голубов (Долгопрудный, Россия),
С. С. Волосивец (Саратов, Россия)
golubovboris1939@gmail.com, volosivetsss@mail.ru

В работе приводятся условия весовой интегрируемости преобразований Фурье сверток функций из пространств Лоренца и Лебега, а также количественные оценки, связанные с этой интегрируемостью. Доказана неулучшаемость полученных результатов.

Ключевые слова: преобразование Фурье, весовая интегрируемость, свертка, пространство Лебега, пространство Лоренца.

Благодарности: работа второго автора выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках выполнения государственного задания (проект № FSRR-2020-0006).

Fourier transforms of convolutions of functions from Lebesgue and Lorentz spaces[1]

B. I. Golubov (Dolgoprudnyi, Russia),
S. S. Volosivets (Saratov, Russia)
golubovboris1939@gmail.com, volosivetsss@mail.ru

In the paper the conditions for weighted integrability of Fourier transforms of convolutions of functions from Lebesgue and Lorentz spaces and the quantitative estimates connected with such integrabilty are given. The sharpness of obtained results is proved.

Keywords: Fourier transform, weighted integrability, convolution systems, Lebesgue space, Lorentz space.

Acknowledgements: the work of the econd author was supported by the Ministry of science and education of the Russian Federation in the framework of the basic part of the scientific research state task, project FSRR-2020-0006).

Введение

Пусть $L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$, обозначает пространство измеримых по Лебегу на $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ функций, для которых норма

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

конечна. При $p=\infty$ вместо $L^\infty(\mathbb{R})$ будем рассматривать пространство $B(\mathbb{R})$ ограниченных измеримых функций или пространство $C_0(\mathbb{R})$ непрерывных функций $f(x)$, стремящихся к нулю при $x\to\pm\infty$, с нормой $\|f\|_\infty=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$.

Для $f\in L^1(\mathbb{R})$ определим комплексное преобразование Фурье $\widehat{f}$ равенством

$$\widehat{f}(t)=(2\pi)^{-1/2}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{-itx}\,dx.$$

Легко видеть, что в этом случае $\widehat{f}\in C_0(\mathbb{R})$ (см. [1, гл. 5. предл. 5.1.2].

В случае $1<p\le 2$ преобразование Фурье $\widehat{f}$ функции $f\in L^p(\mathbb{R})$ определяется как предел при $a\to+\infty$ функции $(2\pi)^{-1/2}\int\limits_{-a}^{a} f(t)e^{-itx}\,dt$ в норме $L^{p'}(\mathbb{R})$, где $1/p+1/p'=1$, т.е.

$$\widehat{f}(x)=(L^{p'}(\mathbb{R}))\lim_{a\to+\infty}(2\pi)^{-1/2}\int\limits_{-a}^{a} f(t)e^{-itx}\,dt.$$

В частности, $\widehat{f}\in L^{p'}(\mathbb{R})$ и имеет место аналог неравенства Хаусдорфа-Юнга $\|\widehat{f}\|_{p'}\le(2\pi)^{1/(2p')-1/(2p)}\|f\|_p$, доказанный Е. Титчмаршем (см. [2, гл. 4, теорема 74] или [1, гл. 5. предл. 5.2.5]). При $p=p'=2$ получаем $\widehat{f}\in L^2(\mathbb{R})$ и в этом случае справедливо равенство Планшереля $\|f\|_2=\|\widehat{f}\|_2$ (см. [1, гл. 5. теорема 5.2.4]). Важной частью теоремы Планшереля является восстановление $f(x)$ по формуле

$$f(x)=(L^2(\mathbb{R}))\lim_{a\to+\infty}(2\pi)^{-1/2}\int\limits_{-a}^{a}\widehat{f}(t)e^{itx}\,dt.$$

Пусть $p,q\ge 1$, $\omega_{p,q}(x)=|x|^{1/p-1/q}$. Рассмотрим весовое пространство $L^q_{\omega_{p,q}}(\mathbb{R})$ измеримых на $\mathbb{R}$ функций с конечной нормой

$$\|f\|_{q,\omega_{p,q}}=\left(\int\limits_{\mathbb{R}}(|x|^{1/p-1/q}|f(x)|)^q\,dx\right)^{1/q}=\left(\int\limits_{\mathbb{R}}|x|^{q/p-1}|f(x)|^q\,dx\right)^{1/q}.$$

Пусть $|\cdot|$ — мера Лебега и f^* — невозрастающая перестановка f, т.е. f^* нестрого убывает на $(0,+\infty)$ и

$$|\{x\in(0,+\infty):f^*(x)>\lambda\}|=|\{x\in\mathbb{R}:|f(x)|>\lambda\}|$$

для любого $\lambda > 0$. Тогда при $1 \le p, q < \infty$ пространство Лоренца $L^{p,q}(\mathbb{R})$ (см. [3]) состоит из измеримых на $\mathbb{R}$ функций, для которых конечна норма

$$\|f\|^*_{L^{p,q}} = \left(\int\limits_0^\infty (x^{1/p-1/q} f^*(x))^q \, dx \right)^{1/q} = \left(\int\limits_0^\infty x^{q/p-1} (f^*(x))^q \, dx \right)^{1/q}.$$

Легко видеть, что $L^q_{\omega_{q,q}}(\mathbb{R}) = L^{q,q}(\mathbb{R}) = L^q(\mathbb{R})$ при $1 \le q < \infty$. При $1 \le p < \infty$ по определению

$$\|f\|_{\infty,\omega_{p,\infty}} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^{1/p} |f(x)|, \quad \|f\|^*_{L^{p,\infty}} = \sup_{x\in\mathbb{R}} x^{1/p} f^*(x).$$

Для $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p \le 2$, справедливо неравенство Харди-Литтлвуда

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(x)|^p |x|^{p-2} \, dx \right)^{1/p} \le C\|f\|_p,$$

или $\|f\|_{p,\omega_{p',p}} \le C\|f\|_p$ (см. [2, гл. 4, теорема 80]).

Свертка функций $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ (т.е. f, g интегрируемы по Лебегу на каждом компакте из $\mathbb{R}$) определяется равенством $f * g(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y) \, dy$, если последний интеграл существует. Известно, что для $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$, $g \in L^1(\mathbb{R})$, функция $f * g$ принадлежит $L^p(\mathbb{R})$ и верно неравенство $\|f * g\|_p \le \|f\|_p \|g\|_1$ (см. [1, предл. 0.2.2]). Кроме того, для $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le 2$, $g \in L^1(\mathbb{R})$ справедливо равенство $\widehat{f * g}(x) = (2\pi)^{1/2} \widehat{f}(x)\widehat{g}(x)$, почти всюду на $\mathbb{R}$ (см. [1, гл. 5, теоремы 5.1.3 и 5.2.12]). Используя плотность $L^1(\mathbb{R}) \cap L^{p,q}(\mathbb{R})$ в $L^{p,q}(\mathbb{R})$ при $1 < p < 2$, $1 \le q \le \infty$, методом доказательства теоремы 5.2.12 из [1] можно установить, что формула выше верна для $f \in L^{p,q}(\mathbb{R})$ при $1 < p < 2$, $1 \le q \le \infty$.

В случае тригонометрических рядов абсолютная сходимость рядов Фурье 2π-периодических сверток и ее обобщения изучались М. Изуми и С. Изуми [4], а также К.Онневиром [5]. Положим для 2π-периодической интегрируемой на периоде функции f (т.е. $f \in L^1_{2\pi}$, пространства $L^p_{2\pi}$ вводятся аналогично)

$$c_k(f) = (2\pi)^{-1} \int\limits_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} \, dt, \quad k \in \mathbb{Z},$$

а для $f, g \in L^1_{2\pi}$ свертка вводится равенством $(f * g)_{2\pi} = \int\limits_0^{2\pi} f(x - t) g(t) \, dt$.

Будем писать также $A_n \asymp B_n$, $n \in \mathbb{N}$, если $A_n = O(B_n)$ и $B_n = O(A_n)$

при $n \in \mathbb{N}$. Далее такое же обозначение будет использоваться для выражений, зависящих от функции f. Результаты следующей теоремы A содержатся в работе К. Онневира [5].

Теорема A. 1) *Если $g, h \in L^p_{2\pi}$, $1 < p \le 2$, $1/p + 1/p' = 1$, то ряд $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |c_k((g*h)_{2\pi})|^{p'/2}$ сходится.*

2) *Для любого $1 < p \le 2$ найдутся $g, h \in L^p_{2\pi}$ такие, что для любого $0 < \beta < p'/2$ ряд $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |c_k((g*h)_{2\pi})|^{\beta}$ расходится.*

Аналог теоремы A для преобразования Фурье доказан в [6].

Н. А. Ильясов [7], [8], [9] рассматривал при $r > 0$ величину

$$(\rho_n^{(r)}(f))^r = \sum_{|k|\ge n} |c_k(f)|^r, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $f = (g*h)_{2\pi}$ и изучал соотношения между этой величиной и наилучшими приближениями функций g и h в соответствующих метриках. В частности, в [7] им доказан такой количественный вариант теоремы A.

Теорема B. 1) *Пусть $1 < p \le 2$, $1/p + 1/p' = 1$, $g, h \in L^p_{2\pi}$, $f = (g*h)_{2\pi}$, $\gamma = p'/2$. Тогда*

$$\rho_{n+1}^{(\gamma)}(f) \le C(p) E_n(g)_{L^p_{2\pi}} E_n(h)_{L^p_{2\pi}}, \quad n \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\},$$

где $E_n(g)_{L^p_{2\pi}} = \inf_{t_n\in T_n} \|g - t_n\|_{L^p_{2\pi}}$ — наилучшее приближение тригонометрическими полиномами t_n порядка не выше n ($t_n \in T_n$) функции $g \in L^p_{2\pi}$ в $L^p_{2\pi}$.

2) *Пусть $1 < p \le 2$, $1/p + 1/p' = 1$, $\alpha, \beta > 0$, $\gamma = p'/2$. Тогда существуют $g, h \in L^p_{2\pi}$, такие что $E_n(g)_{L^p_{2\pi}} \asymp n^{-\alpha}$, $E_n(h)_{L^p_{2\pi}} \asymp n^{-\beta}$, $n \in \mathbb{N}$, и для $f = (g*h)_{2\pi}$ справедливо соотношение $\rho_{n+1}^{(\gamma)}(f) \asymp n^{-\alpha-\beta}$, $n \in \mathbb{N}$.*

Хорошо известен критерий М. Рисса абсолютной сходимости тригонометрического ряда (см. [10, гл. 9, § 7]).

Теорема C. *Ряд Фурье функции $f \in L^1_{2\pi}$ сходится абсолютно тогда и только тогда, когда функцию f можно представить в виде $f = (g*h)_{2\pi}$, где $g, h \in L^2_{2\pi}$.*

В работе Н. А. Ильясова [9] установлен количественный вариант этой теоремы.

Теорема D. *Пусть последовательность$\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ убывает и стремится к нулю. Тогда множество непрерывных 2π-периодических функций f со свойством $\rho_{n+1}^{(1)}(f) = O(\lambda_n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, совпадает со множеством*

$$\{(g*h)_{2\pi} : f, g \in L^2_{2\pi}, E_n(g)_{L^2_{2\pi}} = O(\lambda_n^{1/2}), E_n(h)_{L^2_{2\pi}} = O(\lambda_n^{1/2}), \quad n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Вместо $E_n(g)_{L^p_{2\pi}}$ мы будем рассматривать наилучшие приближения целыми функциями экспоненциального типа. Пусть $\sigma \geq 0$, $g(z)$ является целой функцией и для любого $\varepsilon > 0$ существует $A = A(\varepsilon) > 0$, такое что $|g(z)| \leq Ae^{(\sigma+\varepsilon)|z|}$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Тогда будем говорить, что $g(z)$ принадлежит пространству целых функций E_σ экспоненциального типа не выше σ. Для $f \in L^{p,q}(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $\sigma \geq 0$, определим

$$A_\sigma(f)_{L^{p,q}} = \inf\{\|f - g\|_{L^{p,q}} : g \in L^{p,q}(\mathbb{R}) \cap E_\sigma\}.$$

При $p = q$ вместо $A_\sigma(f)_{L^{p,p}}$ будем писать $A_\sigma(f)_p$.

Целью нашей работы является установление аналога теоремы А для двух различных пространств Лоренца и преобразований Фурье, а также теоремы В для различных пространств Лебега и широких классов последовательностей, эквивалентных последовательности наилучших приближений. Приводится количественный аналог теоремы М. Рисса для преобразований Фурье.

Основные результаты

Теорема 1. *Пусть* $1 < p_1, p_2 < 2$, $1 \leq q_1 \leq p_1'$, $1 \leq q_2 \leq p_2'$, $1/r = 1/p_1 + 1/p_2 - 1 \in (1/2, 1)$, $1/s = 1/q_1 + 1/q_2$ *(т.е.* $1/s \geq 1/r'$*). Если* $f \in L^{p_1,q_1}(\mathbb{R})$, $g \in L^{p_2,q_2}(\mathbb{R})$, *то* $h = f * g \in L^{r,s}(\mathbb{R})$ *и справедливы неравенства*

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}} |x|^{s/r'-1} |\widehat{h}(x)|^s \, dx\right)^{1/s} \leq C\|f\|^*_{L^{p_1,q_1}} \|g\|^*_{L^{p_2,q_2}},$$

$$\left(\int\limits_{|x|\geq n} |x|^{s/r'-1} |\widehat{h}(x)|^s \, dx\right)^{1/s} \leq CA_n(f)_{L^{p_1,q_1}} A_n(g)_{L^{p_2,q_2}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $A_n(f)_{L^{p,q}}$ *определено в конце Введения.*

Следствие 1. *Пусть* $1 < p_1, p_2 < 2$, $1/r = 1/p_1 + 1/p_2 - 1 \in (1/2, 1)$. *Если* $f \in L^{p_1}(\mathbb{R})$, $g \in L^{p_2}(\mathbb{R})$, *то* $h = f * g \in L^r(\mathbb{R})$ *и справедливы неравенства*

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}} |\widehat{h}(x)|^{r'} \, dx\right)^{1/r'} \leq C\|f\|_{p_1} \|g\|_{p_2},$$

$$\left(\int\limits_{|x|\geq n} |\widehat{h}(x)|^{r'}\right)^{1/r'} \leq CA_n(f)_{p_1} A_n(g)_{p_2}, \tag{1}$$

где $A_n(f)_p = A_n(f)_{L^{p,p}}$.

Теорема 2. *Пусть* $1 < p_1, p_2 < 2$, $1 \le q_1 \le p_1'$, $1 \le q_2 \le p_2'$, $1/r = 1/p_1 + 1/p_2 - 1 \in (1/2, 1)$, $1/s = 1/q_1 + 1/q_2$. *Если* $1 \le \theta < s$, *то существуют* $f_0 \in L^{p_1,q_1}(\mathbb{R})$, $g_0 \in L^{p_2,q_2}(\mathbb{R})$, *такие что* $h_0 = f_0 * g_0 \notin L^{r,\theta}(\mathbb{R})$ *и интеграл* $\int\limits_0^\infty x^{\theta/r'-1}|\widehat{h_0}(x)|^\theta\,dx$ *расходится.*

Замечание 1. Теоремы 1 и 2 дают обобщение теоремы A на случай различных пространств Лоренца и преобразований Фурье.

Докажем точность неравенства (1) из следствия 1.

Теорема 3. *Пусть* $1 < p_1, p_2 < 2$, $1/r = 1/p_1 + 1/p_2 - 1$, *последовательности* $\{\nu_n\}_{n=1}^\infty$ *и* $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ *убывают к нулю и для них выполнены условия*

$$\sum_{k=n}^\infty \nu_k^{p_1} k^{-1} \asymp \nu_n^{p_1}, \quad n \in \mathbb{N}; \quad \sum_{k=n}^\infty \mu_k^{p_2} k^{-1} \asymp \mu_n^{p_2}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Пусть также $\{\nu_n\}_{n=1}^\infty$ *и* $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ *удовлетворяют* Δ_2*-условию* $\nu_n \le C\nu_{2n}$, $\mu_n \le C\mu_{2n}$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда существуют функции* $f_0 \in L^{p_1}(\mathbb{R})$, $g_0 \in L^{p_2}\mathbb{R})$, *такие что* $A_n(f_0)_{p_1} \asymp \nu_n$, $A_n(g_0)_{p_2} \asymp \mu_n$, $n \in \mathbb{N}$. *и для* $h_0 = f_0 * g_0 \in L^r(\mathbb{R})$ *верно, что*

$$\left(\int\limits_{|x|\ge n} (\widehat{h_0}(x))^{r'}\,dx\right)^{1/r'} \asymp \nu_n\mu_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Замечание 2. Следствие 1 и теорема 3 дают обобщение теоремы B на более широкий класс двусторонних мажорант наилучших приближений и на случай преобразований Фурье. Легко видеть, что последовательности $\nu_n = n^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, $\mu_n = n^{-\beta}$, $\beta > 0$, удовлетворяют условию (2).

Теорема 4. *Пусть выполнены условия следствия 1,* $2 \ge \theta > r$, $\gamma \in (0, r')$. *Тогда существуют функции* $f_0 \in L^{p_1}(\mathbb{R})$, $g_0 \in L^{p_2}(\mathbb{R})$, *такие что* $h_0 = f_0 * g_0 \notin L^\theta(\mathbb{R})$ *и* $\widehat{h_0} \notin L^\gamma(\mathbb{R})$.

В заключение установим аналог теоремы D.

Теорема 5. *Пусть* $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ *и* $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ *— убывающая к нулю последовательность. Тогда функция* f *удовлетворяет соотношению* $\int\limits_{|x|\ge n} |\widehat{f}(t)|\,dt = O(\varepsilon_n)$, $n \in \mathbb{N}$, *в том и только в том случае, когда* $f = g * h$, *где* $g, h \in L^2(\mathbb{R})$ *и при этом* $A_n(f)_2 = O(\varepsilon_n^{1/2})$ *и* $A_n(g)_2 = O(\varepsilon_n^{1/2})$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$.

Замечание 3. Некоторые результаты для мультипликативных преобразований Фурье. близкие к теоремам 3-5 настоящей работы, можно найти в [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Butzer P. L., Nessel R. J.* Fourier analysis and approximation. New York-London. : Academic Press, 1971. 572 p.

[2] *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М. : Гостехиздат, 1948. 420 с.

[3] *Lorentz G. G.* Some new functional spaces // Ann. Math. 1950. Vol. 51, № 1. P. 37–55.

[4] *Izumi M., Izumi S.-I.* Absolute convergence of Fourier series of convolution functions // J. Approx. Theory. 1968. Vol. 1, № 1. P. 103–109.

[5] *Onneweer C. W.* On absolutely convergent Fourier series // Arkiv Mat. 1974. Vol. 12, № 1. P. 51–58.

[6] *Krayukhin S. A., Volosivets S. S.* Functions of bounded p-variation and weighted integrabilty of Fourier transforms // Acta Math. Hung. 2019. Vol. 159, № 2. P. 374–399.

[7] *Ilyasov N. A.* To the M.Riesz theorem on absolute convergence of the trigonometric Fourier series // Transactions of NAS of Azerbaijan, Ser. of phys.-tech. and math. sciences. 2004. Vol. 24, № 1. P. 113–120.

[8] *Ilyasov N. A.* To the M.Riesz theorem on absolute convergence of the trigonometric Fourier series (second report) // Transactions of NAS of Azerbaijan, Ser. of phys.-tech. and math. sciences. 2004. Vol. 24, № 4. P. 135–142.

[9] *Ильясов Н. А.* Скоростная L_p-версия критерия М.Рисса абсолютной сходимости тригонометрических рядов Фурье // Труды ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 193–202.

[10] *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М. : Физматгиз, 1961. 936 с.

[11] *Golubov B. I., Volosivets S. S.* Fourier transforms of multiplicative convolutions // Industrial mathematics and complex systems / Ed. by P. Manchanda et al. Singapore : Springer, 2017. Ch. 7. P. 129–140.

УДК 517.5

Метод решения задачи Дельсарта для сферических дизайнов[1]

Д. В. Горбачев, Д. Р. Лепетков, И. А. Мартьянов (Тула, Россия)
dvgmail@mail.ru

Приводится численно-аналитический метод решения экстремальной задачи Дельсарта для взвешенных сферических дизайнов.

Ключевые слова: сферический дизайн, задача Дельсарта, квадратурная формула, интервальная арифметика.

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-31-90152).

Method for solving the Delsarte problem for spherical designs[1]

D. V. Gorbachev, D. R. Lepetkov, I. A. Martyanov (Tula, Russia)
dvgmail@mail.ru

A numerical-analytical method for solving the Delsarte extremal problem for weighted spherical designs is presented.

Keywords: spherical design, Delsarte problem, quadrature formula, interval arithmetic.

Acknowledgements: this work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 19-31-90152).

Пусть $\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ — единичная сфера. Множество узлов $\{x_\nu\}_{\nu=1}^N \subset \mathbb{S}^d$ и положительных весов $\{\lambda_\nu\}_{\nu=1}^N$, $\sum_{\nu=1}^N \lambda_\nu = 1$, называется сферическим s-дизайном, если квадратурная формула

$$\frac{1}{|\mathbb{S}^d|}\int_{\mathbb{S}^d} f(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^N \lambda_\nu f(x_\nu)$$

справедлива для любого алгебраического многочлена

$$f(x) = \sum_{k_1+\ldots+k_{d+1}\le s} c_{k_1\ldots k_{d+1}} x_1^{k_1}\ldots x_{d+1}^{k_{d+1}}$$

степени не выше s. Дизайн называется минимальным, если он содержит наименьшее число узлов $N(d,s)$.

P. Delsarte, J.M. Goethals и J.J. Seidel (1977) в случае равных весов $\lambda_1 = \ldots = \lambda_N = \frac{1}{N}$ доказали, что

$$N(d,s) \geq A(d,s) = \sup f(1),$$

где супремум берется по всем неотрицательным непрерывным на отрезке $[-1,1]$ функциям вида

$$f(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} f_k P_k(t), \quad P_k(t) = \frac{P_n^{(\frac{d}{2}-1,\frac{d}{2}-1)}(t)}{P_n^{(\frac{d}{2}-1,\frac{d}{2}-1)}(1)},$$

для которых $f(1) > 0$ и $f_k \leq 0$ для всех $k \geq s+1$. Данная оценка остается справедливой и для произвольных весов.

Решение варианта задачи $A(d,s)$ для многочленов степени не выше s ($f_k = 0$ при $k \geq s+1$) влечет оценку жестких дизайнов

$$N(d,s) \geq \binom{d + [\frac{s+1}{2}] - 1}{d} + \binom{d + [\frac{s}{2}]}{d}.$$

В.А. Юдин, Н.Н. Андреев, P. Boyvalenkov с соавторами показали, что решение общей задачи $A(d,s)$ позволяет в некоторых случаях усилить оценку жестких дизайнов.

Предлагается метод точного решения задачи $A(d,s)$ в частных случаях. Он базируется на идее В.В. Арестова и А.Г. Бабенко (1997) для сферических кодов, которая заключается в существовании специальной квадратурной формулы, согласованной с экстремальной функцией.

Теорема. *Пусть существуют узлы* $-1 \leq r_1 < r_2 < \ldots < r_u < r_{u+1} = 1$, *веса* $\rho_1 > 0, \ldots, \rho_{u+1} > 0$, *целые числа* $s+1 \leq k_1 < \ldots < k_v$ *и неотрицательный на* $[-1,1]$ *многочлен* f^*, *такие что*

$$Q(P_0) = 1, \quad Q(P_k) = 0, \quad k \in \{1, \ldots, s, k_1, \ldots, k_v\},$$

$$Q(P_k) > 0, \quad k \in \{s+1, s+2, \ldots\} \setminus \{k_1, \ldots, k_v\},$$

$$f^*(t) = 1 + \sum_{k=1}^{s} f_k^* P_k(t) + \sum_{i=1}^{v} f_{k_i}^* P_{k_i}(t),$$

$$f^*(r_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad f_{k_i}^* < 0, \quad i = 1, \ldots, v,$$

где

$$Q(f) = \sum_{i=1}^{u+1} \rho_i f(r_i).$$

Тогда f^* — *экстремальная функция и*

$$A(d,s) = f^*(1) = \frac{1}{\rho_{u+1}}.$$

Практическое применение теоремы состоит из следующих шагов. Вначале методами оптимизации многочлен f^* находится численно. Это позволяет определить параметры u, v, k_i в теореме и найти начальные приближения неизвестных узлов r_i и весов ρ_i. Затем узлы и веса могут быть рассчитаны с большой точностью из полиномиальной системы уравнений с рациональными коэффициентами $S(r, \rho) = 0$. Далее многочлен f^* уточняется, для чего веса r_i берутся в качестве двойных нулей, а оставшийся множитель вычисляется из решения системы линейных уравнений. Убеждаемся, что все нули f^*, кроме r_i, лежат вне отрезка $[-1, 1]$ (в комплексной области), что влечет неотрицательность f^*. Смотрим знаки коэффициентов f_k^*. Свойство $Q(P_k) > 0$ проверяется как и в методе Арестова–Бабенко при помощи оценки Стилтьеса–Бернштейна для многочленов Гегенбауэра.

Таким образом, численно с большой точностью убеждаемся, что все условия из теоремы выполнены. Чтобы утверждать существовании соответствующего аналитического решения остается показать, что в малой окрестности найденных численно узлов и весов существует действительное решение. Для этого в разобранных примерах мы успешно применили функцию certify из библиотеки HomotopyContinuation.jl, которая реализует интервальный метод Кравчука проверки существования аналитического решения системы полиномиальных уравнений. В качестве примера приведем решение задачи $A(2, 4) = 9.31033\ldots$, где $u = v = 4$, $\{k_1, \ldots, k_4\} = \{7, 12, 17, 22\}$.

УДК 517.9

О точке множества коэффициентов однолистных функций, доставляемой функцией пика[1]

В. Г. Гордиенко (Саратов, Россия)

valeriygor@mail.ru

В работе изучаются свойства точки граничной поверхности системы начальных коэффициентов в классе ограниченных однолистных функций, доставляемой симметризованной функцией Пика.

Ключевые слова: однолистная функция, принцип максимума Понтрягина, функция Пика.

On the point of the set for coefficients of univalent functions, delivered by the function pick[1]

V. G. Gordienko (Saratov, Russia)

valeriygor@mail.ru

In this paper we study the properties of a point of the boundary surface for the system of initial coefficients in the class of bounded univalent functions, delivered by a symmetrized Pick function.

Keywords: univalent function, Pontryagin maximum principle, Pick function.

Введение

Пусть $S-$ класс однолистных аналитических в единичном круге $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функций f, нормированных разложением

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

и $S(M)-$ класс функций $f \in S$, удовлетворяющих в $\mathbb{D}$ ограничению $|f(z)| < M,\ M > 1$. Класс $S(M)$ обладает более сложной структурой по сравнению с классом $S(\infty) = S$. На данный момент для всех $M > 1$ известны точные оценки второго [1] и третьего [2] тейлоровских коэффициентов. В первом случае $\max\limits_{f \in S(M)} |a_2|$ достигается только для вращений функции Пика

$$P_M(z) = MK^{-1}\left(\frac{K(z)}{M}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(M) z^n,$$

где $K(z)-$ функция Кёбе, во втором - $\max\limits_{f\in S(M)} |a_3|$, $M \leq e$ достигается функцией Пика $P_{M^2}(z) = \left[P_{M^2}(z^2)\right]^{1/2}$ и её вращениями. При $M > e$ функции Пика не являются экстремальными. Точные оценки четвёртого коэффициента известны только для M близких к единице [3], со знаком равенства для вращений симметризованной функции $P_{M^3}(z)$. Эти результаты позволили, в своё время, Хажинскому и Тамми сформулировать гипотезу о том, что для каждого $n \geq 2$ существует $M_n > 1$ такое, что для всех $M \in (1, M_n)$ и всех функций $f \in S(M)$ справедливы неравенства

$$|a_n| \leq \frac{2}{n-1}\left(1 - \frac{1}{M^{n-1}}\right)$$

со знаком равенства для вращений функции $P_{M^n}(z) = [P_{M^n}(z^n)]^{1/n}$, которая была доказана в работах [4],[5]. Отыскание констант M_n является трудной задачей.

Структура класса $S(M)$ формирует интерес к описанию свойств границы множеств значений функционалов $V_n(M) = (a_2, a_3, \dots, a_n)$, в частности, к отысканию седловых точек. Первый из таких результатов для $n = 3$ получен в работе [6].

Формулы, теоремы

Исследуем характер точки граничной поверхности $\partial V_5(M)$ множества значений $V_5(M) = \{a_2, a_3, a_4, \operatorname{Re} a_5 : f \in S(M)\}$, доставляемой симметризованной функцией Пика $P_{M^4}(z)$. В работе [7] найдено значение $M_5^* = 2.06263\dots$ такое, что для всех $M \in (1, M_5^*)$ точка $A_M = (0, 0, 0, 1/2(1 - 1/M^4))$ граничной поверхности $\partial V_5(M)$, доставляемая функцией $P_{M^4}(z)$, является точкой локального максимума, что доказывает локальную гипотезу Хажинского-Тамми. Попутно было установлено, что вдоль одного из направлений эта точка имеет угловой характер.

В данной работе, методами теории оптимального управления с применением принципа максимума Понтрягина, продолжено исследование свойств точки A_M. Известно [8], что функции f доставляющие точки граничной поверхности $\partial V_5(M)$, выражаются через интегралы обобщённого дифференциального уравнения Лёвнера

$$\frac{dw}{dt} = -w\sum_{k=1}^{3}\lambda_k\frac{e^{iu_k} + w}{e^{iu_k} - w}, \quad w|_{t=0} = z, \quad 0 \leq t < \log M,$$

с непрерывными функциями $u_k = u_k(t)$ и постоянными числами $\lambda_k \geq 0$,

$k = 1, \ldots, 4,\ \sum_{k=1}^{4} \lambda_k = 1$. Уравнение Лёвнера позволяет записать фазовую систему для коэффициентов функции $f(z) = Mw(z, \log M)$. Граничная поверхность множества $V_5(M)$ параметризуется вектором начальных данных сопряжённой гамильтоновой системы и числами λ_k [8]. Вариация вектора начальных данных и чисел λ_k в окрестности точки A_M, позволяет получить утверждение

Теорема 1. *Точка $A_M = (0, 0, 0, 1/2(1 - 1/M^4))$ граничной поверхности множества $V_5(M) = \{a_2, a_3, a_4, \mathrm{Re}\, a_5 : f \in S(M)\}$, доставляемая симметризованной функцией Пика $P_{M^4}(z)$, является седловой точкой для всех $M \geq 2.550812\ldots$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Pick G.* Über die konforme Abbildung eines Kreises auf ein schlichtes und zugleich beschränktes Gebiet // S.-B. Kaiserl. Akad. Wiss. Wien. Math.-Naturwiss. Kl. Abt. II a. 1917. B. 126. P. 247–263.

[2] *Schaffer A. C., Spencer D. C.* The coefficients of schlicht functions // Duke Math. J. 1945. Vol. 12. P. 107–125.

[3] *Schiffer M., Tammi O.* On the fourth coefficient of bounded univalent functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. Vol. 119. P. 67–78.

[4] *Siewierski L.* Sharp estimation of the coefficients of bounded univalent functions near the identity // Bull. Acad. Polon. Sci. 1968. Vol. 16. P. 575–576.

[5] *Schiffer M., Tammi O.* On bounded univalent functions which are close to identity // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math. 1968. Vol. 435. P. 3–26.

[6] *Захаров А. М., Прохоров Д. В.* Седловые точки множества коэффициентов однолистных функций // Математика.Механика. Сб.науч.тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2003. С. 33–36.

[7] *Гордиенко В. Г., Самсонова К. А.* Определение границы в локальной гипотезе Хажинского-Тамми для пятого коэффициента // Изв.Сарат.ун-та. Новая серия. Серия Математика.Механика.Информатика. 2013. Т. 13, Вып. 4. С. 18–31.

[8] *Прохоров Д. В.* Множества значений систем функционалов в классах однолистных функций // Матем. Сборник. 1990. Т. 181, № 12. С. 1659–1667.

УДК УДК 517.55+517.96

Дискретный аналог формулы Ньютона-Лейбница и операторы с суммирующим эффектом[1]

А. А. Григорьев (Красноярск, Россия)
grigrow@yandex.ru
Е. К. Лейнартас (Красноярск, Россия)
lein@mail.ru
А. П. Ляпин (Красноярск, Россия)
aplyapin@sfu-kras.ru

Работа посвящена некоторым проблемам теории суммирования функций многих дискретных переменных. В результате исследования введено понятие разностных операторов с суммирующим эффектом — операторов, позволяющих решать задачу суммирования; получен критерий, описывающий класс полиномиальных разностных операторов, обладающих суммирующим эффектом.

Ключевые слова: задача суммирования, формула суммирования Эйлера-Маклорена, числа Бернулли, полиномы Бернулли, многомерные разностные уравнения.

On a discrete analogue of the Newton-Leibniz formulae and operators with a summing effect[1]

A. A. Grigoriev (Krasnoyarsk, Russia)
grigrow@yandex.ru
E. K. Leinartas (Krasnoyarsk, Russia)
lein@mail.ru
A. P. Lyapin (Krasnoyarsk, Russia)
aplyapin@sfu-kras.ru

The paper deals with some aspects of the theory of summation of discrete multivariate functions. As a result of the investigation it was defined difference operators with summing effect — operators, allowing to solve the summation problem; the criterion describing a class of polynomial difference operators with a summing effect was obtained.

Keywords: summation problem, Euler–Maclaurin formula, Bernoulli numbers, Bernoulli polynomials, multidimensional difference equation.

Задача суммирования функций является одной из основных задач теории конечных разностей и решает ее знаменитая формула Эйлера-Маклорена, полученная Эйлером в 1733 году и независимо от него Маклореном в 1738 году (см. [1]).

В работах [2], [4] исследовалась задача рационального суммирования, т. е. отыскания сумм вида

$$S(x) = \sum_{t=0}^{x} \varphi(t), \tag{1}$$

где функция $\varphi(t)$ — рациональная функция. Решение задачи состоит в отыскании решения в символьном виде, т. е. явно в виде математической функции (формулы).

Задача суммирования сводится к решению так называемого (см. [3]) телескопического уравнения — неоднородного разностного уравнения

$$(\delta - 1) f(x) = \varphi(x), \tag{2}$$

где δ — оператор сдвига: $\delta f(x) := f(x+1)$.

По аналогии с задачей интегрирования функций, решение $f(x)$ уравнения (2) называют *дискретной первообразной функции* $\varphi(x)$. Если $f(x)$ — дискретная первообразная функции $\varphi(x)$, тогда искомая сумма равна

$$S(x) = f(x+1) - f(0). \tag{3}$$

Формула (3) называется *дискретным аналогом формулы Ньютона–Лейбница.*

Подход Эйлера к задаче отыскания дискретной первообразной основан на операторном равенстве $\delta = e^D$, которое позволяет записать уравнение (2) в виде

$$Df(x) = \left[\frac{D}{e^D - 1}\right] \varphi(x),$$

где D — оператор дифференцирования.

Выражение в квадратных скобках правой части последнего равенства называется *оператором Тодда* и понимается следующим образом: $\left[\frac{D}{e^D-1}\right] = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{m!} D^m$, где b_m — числа Бернулли (см., например, [5]). Таким образом, получаем формулу Эйлера-Маклорена

$$\sum_{t=0}^{x} \varphi(t) = \int_{0}^{x+1} \varphi(t) dt + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{m!} \Big[\varphi^{(m-1)}(x+1) - \varphi^{(m-1)}(0) \Big].$$

Подход Эйлера к задаче суммирования функции $\varphi(t) = \varphi(t_1, \ldots, t_n)$ нескольких переменных предполагает, что нужно найти многомерный аналог уравнения (2), дать определение дискретной первообразной и получить аналог формулы Ньютона-Лейбница (3). В данной работе это реализовано в задаче суммирования функции по целым точкам n-мерного параллелепипеда (теорема 1 и лемма 1).

Для функции нескольких дискретных аргументов $\varphi(t) = \varphi(t_1, \ldots, t_n)$ рассматривается задача отыскания суммы ее значений по всем целочисленным точкам n-мерного параллелепипеда с «переменной» вершиной $x \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant}$:

$$\Pi(x) = \{t \in \mathbb{R}^n_{\geqslant} : 0 \leqslant t_j \leqslant x_j, j = 1, \ \ldots, n\}. \tag{4}$$

Искомую сумму можно записать так:

$$S(x) = \sum_{t_1=0}^{x_1} \cdots \sum_{t_n=0}^{x_n} \varphi(t_1, \ldots, t_n) = \sum_{t \in \Pi(x)} \varphi(t). \tag{5}$$

Решить задачу суммирования — значит найти формулу, выражающую сумму (5) через не зависящее от x (конечное) число слагаемых.

Разностное уравнение относительно неизвестной функции $f(x)$ записывается следующим образом:

$$P(\delta) f(x) = \varphi(x), \ x \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant}. \tag{6}$$

Определение. Полиномиальный разностный оператор $P(\delta)$ назовем *оператором, обладающим суммирующим эффектом,* если существует решение $f(x)$ уравнения (6), такое что сумма (5) выражается через значения $f(x)$ в конечном и не зависящем от $x = (x_1, \ldots, x_n)$ числе точек.

В этом случае, естественным образом, $f(x)$ можно называть *дискретной первообразной функции $\varphi(x)$,* а соответствующее выражение, решающее задачу суммирования (5) — *дискретным аналогом формулы Ньютона–Лейбница.*

Для любой точки x определим оператор проекции π_j вдоль оси x_j:

$$\pi_j x := (x_1, \ldots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \ldots, x_n),$$

и определим его действие на функциях: $\pi_j f(x) := f(\pi_j x)$.

Обозначим $\mathcal{P}(A)$ – булеан (множество всех подмножеств) множества A. Пусть $V := \mathcal{P}(\{1, \ldots, n\})$, $J = \{j_1, \ldots, j_k\} \in V$.

Если обозначить $\pi_J = \pi_{j_1} \circ \ldots \circ \pi_{j_k}$, то множество вершин параллелепипеда (4) можно записать в виде $\{\pi_J x, J \in V\}$. Отметим, что $\pi_\varnothing x = x$.

Лемма 1. *Пусть в уравнении (6) разностный оператор $P(\delta) = R(\delta)(\delta - I)$, где $R(\delta)$ — некоторый полиномиальный оператор. Тогда для* *любого решения f уравнения (6) справедлив дискретный аналог формулы Ньютона-Лейбница*

$$\sum_{t\in\Pi(x)}\varphi(t) = R(\delta)\sum_{J\in V}(-1)^{\#J}f(\pi_J(x+I)),$$

где $\#J$ — число элементов множества J.

Мы видим, что в лемме 1 нахождение значения суммы (5) сводится к вычислению значений функции $f(x)$ в вершинах параллелепипеда $\Pi(x+I)$, число которых равно 2^n и не зависит от x. Таким образом, оператор $P(\delta) = R(\delta)(\delta - I)$ обладает суммирующим эффектом.

Теорема 1. *В задаче суммирования (5) суммирующим эффектом обладают полиномиальные разностные операторы $P(\delta)$ вида*

$$P(\delta) = R(\delta)\prod_{j=1}^{n}(\delta_j - 1),$$

где $R(\delta)$ — некоторый полином, $j = 1,\ldots,n$, и только они.

Пример. Найти сумму $S(x_1,x_2) = \sum\limits_{t_1=0}^{x_1}\sum\limits_{t_2=0}^{x_2}\varphi(t_1,t_2)$, где

$$\varphi(t_1,t_2) = \frac{1}{(t_1+t_2+1)(t_1+t_2+2)(t_1+t_2+3)}.$$

Функция $f(t_1,t_2) = \frac{1}{2}(t_1+t_2+1)^{-1}$ является решением разностного уравнения $(\delta_1-1)(\delta_2-1)f(t) = \varphi(t)$. Имеем $P(\delta) = (\delta_1-1)(\delta_2-1), R\equiv 1$. Искомая сумма равна

$$S(x) = f(x_1+1,x_2+1) - f(x_1+1,0) - f(0,x_2+1) + f(0,0) =$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{x_1+x_2+3} - \frac{1}{x_1+2} - \frac{1}{x_2+2} + 1\Big).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. М : Наука, 1967. 314 с.

[2] *Abramov S. A.* Indefinite sums of rational functions // Proceedings of ISSAC'95. 1995. P. 303–308.

[3] *Kauers M.* The Concrete Tetrahedron // Springer-Verlag Wien, 2011. P. 212.

[4] *Polyakov S. A.* Indefinite summation of rational functions with factorization of denominators // Programming and Computer Software. 2011. Vol. 37, № 6. P. 322–325.

[5] *Shishkina O. A.* Multidimensional Analog of the Bernoulli Polynomials and its Properties // Journal of Siberian Federal University, Mathematics & Physics. 2016. Vol. 9, № 3. P. 376–384.

УДК 517.51

О существовании и структуре универсальных (относительно тригонометрической системы) функций[1]

М. Г. Григорян (Ереван, Армения)
gmarting@ysu.am

Изучаются вопросы существования и описания структуры функций, ряды Фурье которых универсальны тем или иным смыслом в различных функциональных классах.

Ключевые слова: универсальная функция, ряд Фурье, сходимость,классические системы.

Благодарности: исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 21AG-1A066.

On the existence and structure of universal (with respect to the trigonometric system) functions[1]

M. G. Grigoryan (Yrevan, Armenia)
gmarting@ysu.am

Are studied the questions of existence and description the structure of functions whose Fourier series universal in one sense or another in various functional classes.

Keywords: universal function, Fourier series, convergence, classical systems.

Acknowledgements: this work was supported by the RA MES State Committee of Science, in the frames of the research project № 21AG-1A066.

Введение

В докладе будет представлендаен обзор результатов, связанных с существованием, как ранее известных функций универсальных в том или ином смысле в различных функциональных классах, так и новых (различных типов относительно классических систем) универсальных функций: Будут рассмотрены проблемы, связанные с существованием и свойствами функций с универсальными рядами Фурье в разных смыслах в различных функциональных пространствах, а также будет описана структура таких универсальных функций.

Пусть $M[0,1]$— совокупность всех (не обязательно конечных) измеримых функций (соотв. $L^0[0,1]$) - класс всех (соотв. почти везде конечных) измеримых на $[0,1]$ функций. Под сходимостью в метрике $M[0,1]$

или в метрике $L^0[0,1]$ мы будем подразумывать сходимость почти всюду. Пусть $E \subseteq [0,1]$ некоторое измеримое множество и $|E|$– мера Лебега

измеримого множества $E \subseteq [0,1]$, $\operatorname{supp} f = \{ x \in [0,1]; f(x) \neq 0\}$, $L^p(E)$ $(p > 0)$ – класс всех тех измеримых на E функций, для которых $\int_E |f(x)|^p dx < \infty$ и $C(E)-$класс всех непрерывных на $E \subseteq [0,1]$ функций. Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – полная ортонормированная система на $[0,1]$, и пусть $c_k(U) = \int_0^1 U(x)\varphi_k(x)dx$, $k \in \mathbf{N}-$коэффициенты Фурье по системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ функции $U \in L^1[0,1]$,($\mathbf{N}-$ совокупность всех натуральных чисел). Пусть метрическое пространство $S-$ какое-нибудь из пространств $M[0,1]$, $L^p[0,1]$, $p \geq 0$.

Определение 1. *Пусть* $\Lambda = \{N_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbf{N}$ *(подмножество) подпоследовательность* $\{ N_m\}_{m=1}^{\infty}$ *натуральных чисел, и пусть*

$$\rho(\Lambda) := \sup \lim_{m\to\infty} \frac{\Lambda_m}{m}, \tag{1.4}$$

(здесь Λ_m*- число элементов из* Λ*, не превышающих* m*).* $\rho(\Lambda)-$*называется плотностью подпоследовательности* $\{ N_m\}_{m=1}^{\infty}$ *(подмножества* Λ*).*

В работах [1] -[13] были получены некоторые результаты связанные с существованием и описанием структуры функций, ряды Фурье которых по заданной классической системе универсальны тем или иным смыслом в различных функциональных классах. Такие функции мы назовем универсальными относительно классических систем.

Определение 2. *Будем говорить, что для класса* S *относительно системы* $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$: *функция* $U \in L^1[0,1]$

а) универсальна, если ряд Фурье функции $U(x)$ *по этой системе универсален в* S*,*

б) почти универсальна, если можно найти числа (знаки) $\delta_k = \pm 1, k = 0,1,2,..,$ *с* $\rho(k \in \mathbf{N}, \delta_k = 1) = 1$ *такие, что ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k c_k(U) W_k(x)$ *был бы универсальным в* S*,*

в) в смысле знаков своих коэффициентов Фурье по этой системе, если ряд Фурье функции $U(x)$ *по этой системе универсален в* S *в смысле знаков. .*

Замечание 1. *Не существует функции* $U \in L^1[0,1]$ *универсальная для классов* $M[0,1]$ *и* $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$*относительно тригонометрической системы (соотв. относительно системы Уолша)* Отметим, что в работе [2], [5] построена интрегрируемая функция $U(x)$ унивесальная для классов $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$ относительно системы Уолша в смысле знаков.

Отметим также, что нам не известен ответ и на вопрос 2:

Вопрос 1. *Существует ли ограниченная ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$ такая, что можно было бы построить функцию $U \in L^1[0,1]$ универсальную для класса $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$ или для класса M[0,1] относительно этой системы .*

Справедливы следующие теоремы

Теорема 1. *Существует функция $U \in L^1[0,1]$ которая является почти универсальной для класса $M[0,1]$относительно тригонометрической системы $\{e^{2\pi kix}\}_{k=-\infty}^{\infty}$.*

Теорема 2. *Существуют совокупность замкнутых множеств $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, с $F_1 \subset ... \subset .. F_n \subset F_{n+1} \subset .. \subset [0,1]$ и $lim_{n\to\infty}|F_n| = 1$ и функция $U \in L^1[0,1]$ таких, что функция $U(x)$ является почти универсальной для классов $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$ и $L^1(F_n)$ $n \in N$ относительно тригонометрической системы $\{e^{2\pi kix}\}_{k=-\infty}^{\infty}$.*

Теорема 3. *Существует функция $U \in L^1[0,1]$ ($suppU \subset [0,\varepsilon]$, здесь $\varepsilon \in (0,1)-$ наперед заданное число) со сходящимся по $L^1[0,1]$ норме и почти всюду на $[0,1]$ рядом Фурье -Уолша с монотонно убывающими коэффициентами, и которая является универсальной для класса $L^0[0,1]$ относительно системы Уолша* ***в смысле знаков.***

Замечание 2. *Нетрудно видеть, что теорема 2 окончательна в некотором смысле (неулучшаема), она не верна при $p \geq 1$. .*

В этой работе мы опишем структуру тех функций, которые почти универсальны для классов $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$относительно системы Уолша с точки зрения широко известных классических теорем Лузина и Меньшова "Об исправлении функций".

А именно доказывается следующая

Теорема 4. *Для любого $\varepsilon \in (0,1)$ существует совокупность замкнутых множеств $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, с $E_1 = F_1 \subset ... \subset .. F_n \subset F_{n+1} \subset .. \subset [0,1]$ и $|E_1| \geq 1-\varepsilon$, $lim_{n\to\infty}|F_n| = |E|$,таких, что для каждой функции $f \in L^1[0,1]$ можно найти функцию $g \in L^1[0,1]$, совпадающую с f на E_1 со сходящимся по $L^1[0,1]$ норме рядом Фурье -Уолша с монотонно убывающими коэффициентами, и такую, что она была бы универсальной для пространств для классов $L^p[0,1]$,$p \in (0,1)$ и $L^1(F_n)$, $C(F_n)$ $n > 1 \in N$ относительно системы Уолша.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Grigoryan M. G.* On the universal and strong property related to Fourier-Walsh series // Banach Journal of Math. Analysis. 2017. Vol. 11, № 3. P. 698–712.

[2] *Grigoryan M. G., Sargsyan A. A* On the universal function for the class $L^p[0,1], p \in (0,1)$ // Journal of Func. Anal. 2016. Vol. 270, № 8. P. 3111–3133.

[3] *Grigoryan M. G., Galyan L. N* On the universal functions // Journal of Approximation Theory. 2018. Vol. 225. P. 191–208.

[4] *Григорян М. Г.* О структуре функций, универсальных относительно классических систем // 10-й международный симпозиум ряды фурье и их приложения, Ростов-на-Дону, 2018, 27.05.–0.3.07., С. 46–47.

[5] *Григорян М. Г., Саргсян А. А.* О структуре функций,универсальных для классов $L^p[0,1], p \in (0,1)$ // Матем.сборник. 2018. Т. 209, № 1. С. 37–58.

[6] *Grigoryan M. G., Galyan L. N.* On Fourier series that are universal modulo signs // Studia Mathematica. 2019. Vol. 249(2). P. 215–231.

[7] *Grigoryan M. G., Sargsyan A. A.* On the universal function for the class $L^p[0,1], p \in (0,1)$ // Positivity. 2017. Vol. 21, № 3. P. 1425–1451.

[8] *Grigoryan Martin G.* Functions universal with respect to the classical systems // Advances in Operator Theory. 2020. Vol. 5, № 4. P. 1414–1433.

[9] *Martin Grigoryan, Artsrun Sargsya* Universal functions for classes $L^p[0,1]^2, p \in (0,1)$, with respect to the double Walsh system // Positivity. 2019. Vol. 23, № 5. P. 1261–1280.

[10] *Григорян М. Г.* Функции универсальные относительно системы Уолша // Изв. НАН Арм. сер. матем. 2020. Т. 55, № 6. С. 51–67.

[11] *Григорян М. Г.* Функции с универсальными рядами Фурье-Уолша // Матем. сборник. 2020. Т. 211, № 6. С. 107–131.

[12] *Grigoryan M. G.* Universal Fourier Series // Math. Notes. 2020. Vol. 108, iss. 2. С. 282–285.

[13] *Григорян М. Г., Galoyan L. N.* Функции, универсальные относительно тригонометрической системы // Изв. РАН. Сер. матем. 2021. Т. 85, вып. 2. С. 73–94.

[14] *Григорян М. Г.* О существовании и структуре универсальных функций // Доклады Академии Наук. Математика (Doklady Mathematics). 2021. Т. 496, № 1. С. 30-33.

УДК 517.535

Задача Гельфонда об оценках модулей полюсов наипростейших дробей[1]

Д. Я. Данченко, В. И. Данченко (Владимир, Россия)
vdanch2012@yandex.ru

Получены оценки модулей полюсов наипростейших дробей с малыми нормами на единичной окружности.

Ключевые слова: наипростейшие рациональные дроби, оценки, вычеты.

Gelfond's Problem about estimates for modules of poles of the simple partial fractions[1]

D. Ya. Danchenko, V. I. Danchenko(Vladimir, Russia)
vdanch2012@yandex.ru

We are obtained estimates for modules of poles of the simple partial fractions with a small norms on the unit circle.

Keywords: simple partial fractions, estimates, residues.

Рассмотрим наипростейшие дроби порядка не выше $n \in \mathbb{N}$ вида

$$\rho_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z-\xi_k}, \quad |\xi_k| \geq 1, \tag{1}$$

где $\frac{1}{z-\xi_k} \equiv 0$ при $\xi_k = \infty$. Пусть $\delta(\rho_n) := \min\{|\xi_k| - 1 : \ k = 1, \dots, n\}$. При $n \in \mathbb{N}$ и $M > 0$ через $d(n, M) = \inf \delta(\rho_n)$ обозначим расстояние до единичной окружности γ множества полюсов всех дробей вида (1) с условием $|\rho_n(z)| \leq M$, $z \in \gamma$.

Легко видеть, что $d(n, M) > 0$ для любых фиксированных n и M. А.О. Гельфонду [1] принадлежит задача об оценке величин $d(n, M)$ снизу (это один из вариантов классической задачи Е.А. Горина [2] об оценках расстояний до прямых). В [3] эта задача решена частично: показано, что

$$d(n, M) \geq \frac{1}{2}\frac{1}{n+1} \ln \frac{n+1}{1+2M\ln(3n)} - \frac{1}{n+1} \asymp \frac{1}{2}\frac{\ln n}{n}, \tag{2}$$

где $n > n_0(M)$, а в качестве $n = n_0(M)$ можно взять любое решение неравенства $n - 2M\ln(2n+1) \geq 2$, например, достаточно взять $n > 4M^2 + 4$.

Оценка (2) является точной по порядку n. Например, для логарифмической производной (1) от многочлена $z^n - n - 1$ имеем $|\rho_n(z)| \le 1$, $z \in \gamma$, и $\delta(\rho_n) = (1 + o(1)) \ln n/n$, $n \to \infty$.

Однако при $M \to 0$ и фиксированных n оценка (2) не отражает возрастания модулей полюсов. В настояшей заметке в этом направлении оценка (2) дополняется следующим предложением.

Теорема 1. *При выполнении условий $n \ge 2$, $M < 1/10$, для дроби* (1) *имеем:*

$$2 \min\{|\xi_j| : \ j = 1, \dots, n\} > M^{-\frac{1}{n+1}}. \tag{3}$$

Оценка (3) *точна по порядку величин M и n. Это подтверждается, например, логарифмической производной многочлена $Q(z) = z^n - r^n$, $r^n > 10n$.*

Теорема 1 обобщается. Справедлива

Теорема 2. *Пусть $r_n := \rho_n + f$, где ρ_n — дробь вида* (1)*, а f — функция класса Харди H^∞ во внешности замыкания единичного круга, $f(\infty) = 0$. Тогда при $M := \|r_n\|_{\infty,\gamma} < 1/10$ справедлива оценка типа* (3)*.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Гельфонд А. О.* Об оценке мнимых частей корней многочленов с ограниченными производными их логарифмов на действительной оси // Матем. сб. 1966. Т. 71(113), № 3. С. 289–296.

[2] *Горин Е. А.* Частично гипоэллиптические дифференциальные уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами // Сиб. матем. журн. 1962. Т. 3, № 4. С. 500–526.

[3] *Данченко В. И.* Оценки расстояний от полюсов логарифмических производных многочленов до прямых и окружностей // Матем. сб. 1994. Т. 185, № 8. С. 63–80.

УДК 519.85

О минимизации сильно квазивыпуклой функции на слабо выпуклом множестве[1]

С. И. Дудов, М. А. Осипцев
(Саратов, Россия)
DudovSI@info.sgu.ru, Osipcevm@gmail.com

Рассматривается конечномерная задача минимизации сильно квазивыпуклой функции на слабо выпуклом допустимом множестве аргументов. Приводятся необходимые и достаточные условия её решения. Получены достаточные условия решения для случая, когда допустимое множество задано как лебегово множество слабо выпуклой функции. Кроме того, для случая дифференцируемой целевой функции получены достаточные условия локального минимума, включающее «сильное» условия стационарности, с указанием радиуса соответствующий окрестности.

Ключевые слова: сильно квазивыпуклая функция, сильно и слабо выпуклые множества и функции, субдифференциал, нормальный конус, достаточные условия минимума, радиус окрестности локального минимума.

On minimization of a strongly quasi-convex function on a weakly convex set[1]

S. I. Dudov, M. A. Osiptsev (Saratov, Russia)
DudovSI@info.sgu.ru, Osipcevm@gmail.com

The finite-dimensional problem of minimization of a strongly quasi-convex function on a weakly convex valid set of arguments is considered. Necessary and sufficient conditions for its solution are given. Sufficient solution conditions are obtained for the case when the admissible set is defined as a Lebesgue set of a weakly convex function. In addition, for the case of a differentiable target function, the sufficient conditions for the local minimum, including the «strong» stationarity condition are obtained with the indication of the radius of the corresponding neighborhood.

Keywords: strongly quasi-convex function, strongly and weakly convex sets and functions, subdifferential, normal cone, sufficient minimum conditions, radius of neighborhood of local minimum.

Вспомогательные факты

Одна из тенденций развития теории экстремальных задач последнего периода времени – исследование свойств решения задач сильно-слабо выпуклого программирования, то есть задач минимизации сильно или слабо выпуклых функций на сильно или слабо выпуклых допустимых множествах аргументов, и разработка численных методов их решения (см., напр., [1] – [5]). Интерес к таким задачам появился в следствии изучения свойств сильно и слабо выпуклых множеств и функций в рамках параметрически выпуклого анализа, являющегося одним из разделов негладкого анализа (см., напр., [1], [6], [7]).

Здесь мы рассматриваем задачу

$$f(x) \to \min_{x \in D}, \tag{1}$$

где D – слабо выпуклое замкнутое множество из конечномерного действительного пространства $\mathbb{R}^p$, а целевая функция $f(\cdot)$ является сильно квазивыпуклой на некотором открытом выпуклом множестве, содержащим D.

Наша цель – получить необходимые и достаточные условия решения задачи (1), отражающие роль констант сильной квазивыпуклости целевой функции $f(\cdot)$ и слабой выпуклости допустимого множества D.

Напомним определение используемых здесь базовых понятий.

Определение 1. *Пусть $r > 0$ и точки x_1 и x_2 из $\mathbb{R}^p$ таковы, что что $\|x_1 - x_2\| \leqslant 2r$. Обозначим через $D_r(x_1, x_2)$ пересечение всех евклидовых шаров из $\mathbb{R}^p$ радиуса r, содержащих точки x_1 и x_2. Множество $A \subset \mathbb{R}^p$ называется слабо выпуклым с константой r (r-слабо выпуклым), если для любой пары точек из A, таких что $\|x_1 - x_2\| < 2r$ и $x_1 \neq x_2$, пересечение $D_r(x_1, x_2) \cap A$ содержит хотя бы одну точку, отличную от x_1 и x_2.*

Определение 2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ – некоторое выпуклое множество и $\rho > 0$. Функция $f(\cdot) : \Omega \to \mathbb{R}$ называется*

а) сильно квазивыпуклой с константой ρ (ρ-СКВ) на множестве Ω, если для всех $x_0, x_1 \in \Omega$ и $\alpha \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$f((1-\alpha)x_0 + \alpha x_1) \leqslant \max\{f(x_0), f(x_1)\} - \frac{\rho}{2}\alpha(1-\alpha)\|x_0 - x_1\|^2.$$

б) Слабо выпуклой с константой ρ (ρ-слабо выпуклой) на множестве Ω, если для всех $x_0, x_1 \in \Omega$ и $\alpha \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$f((1-\alpha)x_0 + \alpha x_1) \leqslant (1-\alpha)f(x_0) + \alpha f(x_1) + \frac{\rho}{2}\alpha(1-\alpha)\|x_0 - x_1\|^2.$$

Далее используем обозначения:

$N(x, D)$ – нормальный конус множества D в точке x (см. [8]),

$B(x, r)$ – замкнутый евклидов шар радиуса r с центром в точке x,

$\partial f(x)$ – субдифференциал Кларка функции $f(\cdot)$ в точке x,

$Arg\min\limits_{x \in D} f(x) = \{y \in D : f(y) = \min\limits_{x \in D} f(x)\}$,

$A(x) = \{-\partial f(x)\} \cap N(x, D)$, $m(x) = \min\limits_{v \in A(x)} \|v\|$,

$f'(x)$ – градиент функции $f(\cdot)$ в точке x.

Основные результаты

Приведём основные результаты исследования.

Теорема 1. *Пусть Ω – открытое выпуклое множество, $r > 0$, $\rho > 0$ и*
1) D – r-слабо выпуклое замкнутое множество, $D \subset \Omega$,
2) функция $f(\cdot)$ – ρ-СКВ, локально липшицева на Ω и регулярна по Кларку (см. [8]) в точке $x_0 \in D$.
Для того, что бы в точке $x_0 \in D$ функция $f(\cdot)$ принимала наименьшее на D значение необходимо, а если $\frac{m(x_0)}{\rho} \leqslant r$, то и достаточно, чтобы

$$0_p \in \partial f(x_0) + N(x_0, D). \tag{2}$$

Причём, если выполняется (2) и $\frac{m(x_0)}{\rho} < r$, то $Arg \min\limits_{x \in D} f(x) = \{x_0\}$.

Теорема 2. *Пусть Ω – открытое выпуклое множество, $\rho_h > 0$, $\rho_f > 0$, $D = \{x \in \Omega : h(x) \leqslant 0\}$ и*
1) $h(\cdot)$ – ρ_h-слабо выпуклая конечная на Ω функция,
2) $f(\cdot)$ – ρ_f-СКВ, локально липшицевая на Ω и регулярная по Кларку (см. [8]) в точке $x_0 \in \Omega$ функция,
3) $h(x_0) = 0$, $0_p \notin \partial f(x_0)$, $0_p \notin \partial h(x_0)$ и существуют $v_f \in \partial f(x_0)$, $v_h \in \partial h(x_0)$ и $\lambda > 0$ такие, что $v_f + \lambda v_h = 0_p$,
4) выполняется неравенство $\frac{\|v_f\|}{\rho_f} \leqslant \frac{\|v_h\|}{\rho_h}$ или, если $m_h \equiv \inf\{\|v\| : v \in \partial h(x),\ x \in bdD\} > 0$, неравенство $\frac{m(x_0)}{\rho_f} \leqslant \frac{m_h}{\rho_h}$.
Тогда $x_0 \in Arg \min\limits_{x \in D} f(x)$. Кроме того, если хотя бы одно из неравенств в п.4) выполняется строго, то $Arg \min\limits_{x \in D} f(x) = \{x_0\}$.

Теорема 3. *Пусть Ω – открытое выпуклое множество, $r > 0$, $\rho > 0$ и*
1) D – r-слабо выпуклое замкнутое множество, $D \subset \Omega$
2) функция $f(\cdot)$ – ρ-СКВ, локально липшицева на Ω, регулярна и дифференцируема в точке $x_0 \in D$,
3) при некотором $\delta > 0$ выполняется включение

$$B(0_p, \delta) \subset f'(x_0) + N(x_0, D),$$

4) $\rho = 0$ или $\rho > 0$ и $r < \frac{\|f'(x_0)\|}{\rho}$.
Тогда $Arg \min\limits_{x \in D \cap \{y : \|y - x_0\| < \lambda(\delta)} f(x) = \{x_0\}$, где

$$\lambda(\delta) = \begin{cases} 2r, \text{ если } \rho > 0,\ \dfrac{\sqrt{\|f'(x_0)\|^2 - \delta^2}}{\rho} \leqslant r < \dfrac{\|f'(x_0)\|}{\rho}, \\ \dfrac{2r\delta}{\sqrt{\delta^2 + \left(\sqrt{\|f'(x_0)\|^2 - \delta^2} - \rho r\right)^2}}, \text{ если } \rho > 0,\ r < \dfrac{\sqrt{\|f'(x_0)\|^2 - \delta^2}}{\rho}, \\ \dfrac{2r\delta}{\|f'(x_0)\|}, \text{ если } \rho = 0. \end{cases}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Vial J. P.* Strong and weak convexity of set and functions // Math. Oper. Res. 1983. Vol. 8, № 2. P. 231–259.

[2] *Wu Z. Y.* Sufficient global optimality conditions for weakly convex minimization problems // J. Glob. Optim. 2007. Vol. 39. P. 427–440.

[3] *Дудов С. И., Осипцев М. А.* Характеризация решения задач сильно-слабо выпуклого программирования // Матем. сб. 2021. Т. 212, № 6. С. 43-–72.

[4] *Balashov M.* About the gradient projection algorithm for a strongly convex function and a proximally smooth set // J. of Convex Analysis. 2017. Vol. 24, № 2. P. 493–500.

[5] *Balashov M., Polyak B., Tremba A.* Gradient projection and conditional gradient methods for constrained nonconvex minimization // Numerical Functional Analysis and Optimization. 2020. Vol. 41, № 7. P. 822–849.

[6] *Половинкин Е. С., Балашов М. В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М. : Физматлит, 2006. 440 с.

[7] *Иванов Г. Е.* Слабо выпуклые множества и функции. М. : Физматлит, 2006. 352 с.

[8] *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М. : Наука, 1988. 280 с.

УДК 517.956.32+517.929

О существовании решения задачи Коши для одного гиперболического дифференциально-разностного уравнения[1]

Н. В. Зайцева (Москва, Россия)

zaitseva@cs.msu.ru

Исследована начальная задача в полосе для двумерного гиперболического дифференциально-разностного уравнения, содержащего сумму дифференциального оператора и оператора сдвига по пространственной переменной. Для построения решения использовалась классическая операционная схема. Показано, что полученное решение является классическим, если вещественная часть символа дифференциально-разностного оператора положительна.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, дифференциально-разностное уравнение, задача Коши, классическое решение.

On the existence of a solution to the Cauchy problem for a hyperbolic differential-difference equation[1]

N. V. Zaitseva (Moscow, Russia)

zaitseva@cs.msu.ru

An initial value problem in a strip is investigated for a two-dimensional hyperbolic differential-difference equation containing the sum of a differential operator and a shift operator with respect to a spatial variable. A classic operating scheme was used to build the solution. It is shown that the obtained solution is classical if the real part of the symbol of the differential-difference operator is positive.

Keywords: hyperbolic equation, differential-difference equation, Cauchy problem, classical solution.

Исследована следующая задача: найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям

$$u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D); \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + b\, u(x-h,t) = 0, \quad (x,t) \in D; \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

где $a > 0$, $b > 0$, $h \neq 0$ — заданные вещественные числа, $u_0(x) \in L_1(\mathbb{R})$ и $u_0(x) \in C(\mathbb{R})$, $D = \{(x,t) |\, x \in \mathbb{R},\, 0 < t < T\}$ — область координатной плоскости Oxt, $\overline{D} = \{(x,t) |\, x \in \mathbb{R},\, 0 \leq t < T\}$.

Определение. *Классическим решением задачи* (1)–(3) *будем называть функцию* $u(x,t)$, *непрерывную и непрерывно дифференцируемую по* *переменным x и t в множестве $\overline{D}$; у которой существуют непрерывные производные u_{xx} и u_{tt} в области D; удовлетворяющую в каждой точке области D соотношению* (2)*; и такую, что для каждой точки $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ пределы функций $u(x_0, t) - u_0(x_0)$ и $u_t(x_0, t)$ при $t \to 0+$ существуют и равны нулю.*

Для построения решения задачи были использованы классическая операционная схема и идеи работ [1, 2]. В работе [3] показано, что необходимым условием существования решения является требование положительности вещественной части символа дифференциально-разностного оператора уравнения, которое гарантируется выполнением условий

$$0 < b \leq 2a^2/h^2$$

на коэффициенты a, b и сдвиг h.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Муравник А. Б.* Эллиптические задачи с нелокальным потенциалом, возникающие в моделях нелинейной оптики // Матем. заметки. 2019. Т. 105, № 5. С. 747–762.

[2] *Муравник А. Б.* Эллиптические дифференциально-разностные уравнения в полупространстве // Матем. заметки. 2020. Т. 108, № 5. С. 764–770.

[3] *Зайцева Н. В.* Классические решения гиперболического уравнения с нелокальным потенциалом // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 498, № 3. С. 37–40.

УДК 517.984

О задаче рассеяния для систем дифференциальных уравнений с особенностью[1]

М. Ю. Игнатьев (Саратов, Россия)
email@mail.ru

В работе устанавливаются необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи рассеяния для систем дифференциальных уравнений с особенностью в случае отсутствия дискретного спектра.

Ключевые слова: теория рассеяния, обратные задачи, системы с особенностью.

Благодарности: исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-10001, https://rscf.ru/project/21-71-10001/.

On scattering problem for differential systems with a singularity[1]

M. Yu. Ignatiev (Saratov, Russia)
email@mail.ru

In the paper, we obtain necessary and sufficient solvability conditions to inverse scattering problem for the differential systems with a singularity in the case of empty discrete spectrum

Keywords: scattering theory, inverse problems, systems with a singularity.

Acknowledgements: this work was supported by the Russian Science Foundation № 21-71-10001, https://rscf.ru/project/21-71-10001/.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$y' = (\rho B + x^{-1}A + q(x))y \tag{1}$$

со спектральным параметром ρ, где $A, B, q(x), x \in (0, \infty)$ – $n \times n$ $(n > 2)$ матрицы, причем матрицы A и B постоянны, $B = diag(b_1, \dots, b_n)$, элементы $b_1, \dots, b_n$ – различные ненулевые комплексные числа. Относительно матриц A и B будем считать выполненными те же условия, что в [2].

Обозначим через Σ объединение прямых вида:

$$\Sigma = \bigcup_{(k,j):j\neq k} \{\rho : \mathrm{Re}(\rho b_j) = \mathrm{Re}(\rho b_k)\}.$$

Представим множество $\mathbb{C}\setminus\Sigma$ в виде $\mathbb{C}\setminus\Sigma = \bigcup\limits_{\nu=1}^{N} \mathcal{S}_\nu$ объединения непересекающихся открытых секторов $\mathcal{S}_\nu$. В каждом из секторов $\mathcal{S}_\nu$ существует перестановка $R_1, \dots, R_n$ чисел $b_1, \dots, b_n$ такая, что $\mathrm{Re}(R_1\rho) < \mathrm{Re}(R_2\rho) < \dots < \mathrm{Re}(R_n\rho)$ при $\rho \in \mathcal{S}_\nu$.

Определение. Пусть $\rho \in \mathcal{S}_\nu$, $k \in \{1, \dots, n\}$ фиксированы. Решение $\Psi_k(x, \rho)$, $x \in (0, \infty)$ системы (1) называется k-м решением типа Вейля, если оно удовлетворяет условиям:

$$\Psi_k(x, \rho) = O\left(x^{\mu_k}\right), x \to 0,$$

$$\Psi_k(x, \rho) = \exp(\rho x R_k)(\mathfrak{f}_k + o(1)), x \to \infty.$$

Здесь $\{\mu_k\}_{k=1}^n$ – собственные значения матрицы A, $(\mathfrak{f}_1, \dots, \mathfrak{f}_n) = \mathfrak{f}$ – матрица перестановок, такая что $(R_1, \dots, R_n) = (b_1, \dots, b_n)\mathfrak{f}$.

В простейшем случае $q = 0$ решения типа Вейля существуют для всех $\rho \neq 0$ при выполнении *условия информативности* [1], [2]. В общем случае k-е решение типа Вейля существует и единственно для всех таких $\rho \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$, для которых $\Delta_k(\rho) \neq 0$, где $\Delta_k(\rho)$ характеристическая функция [1].

Обозначим через Σ_ν открытый луч, разделяющий секторы $\mathcal{S}_\nu$ и $\mathcal{S}_{\nu+1}$ (здесь предполагается, что нумерация секторов осуществляется в направлении против часовой стрелки и $\mathcal{S}_{N+1} := \mathcal{S}_1$). Если некоторая функция $f(\rho)$ определена при $\rho \in \mathcal{S}_\nu \cup \mathcal{S}_{\nu+1}$, то через $f^\pm(\rho)$, $\rho \in \Sigma_\nu$ обозначим пределы

$$f^\pm(\rho) = \lim_{\varepsilon \to +0} f(\rho \pm i\varepsilon\rho).$$

Известно [1], что предельные значения $\Delta_k^\pm(\rho)$, $\rho \in \Sigma_\nu$ существуют для всех k, ν. Будем говорить, что $q(\cdot) \in G_0^p$, если для каждого $\nu = \overline{1, N}$ и для всех $\rho \in \overline{\mathcal{S}}_\nu$

$$\prod_{k=1}^n \Delta_k^\pm(\rho) \neq 0.$$

Если $q(\cdot) \in G_0^p$, то для любого $\rho \in \Sigma' := \bigcup\limits_{\nu=1}^N \Sigma_\nu = \Sigma \setminus \{0\}$ существуют предельные значения $\Psi^\pm(x, \rho)$, где $\Psi(x, \rho) := (\Psi_1(x, \rho), \dots, \Psi_n(x, \rho))$. Поскольку каждая из матриц $\Psi^-(x, \rho)$, $\Psi^+(x, \rho)$ удовлетворяет системе (1), для каждого $\rho \in \Sigma'$ определена (единственная) матрица $v(\rho)$ такая, что $\Psi^+(x, \rho) = \Psi^-(x, \rho)v(\rho)$.

Матрицу-функцию $v(\rho)$, $\rho \in \Sigma'$ будем называть *данными рассеяния.*

Задача 1. *Найти $q(\cdot) \in G_0^p$ по известным данным рассеяния $v(\cdot)$.*

Далее рассматривается вопрос о необходимых и достаточных условиях разрешимости Задачи 1.

Определим пространство $\mathcal{H}(\Sigma)$ как пространство, состоящее из функций $\varphi \in L_2(\Sigma)$, таких что для каждого $\nu = \overline{1, N}$ ограничение $\varphi(\rho)|_{\rho \in \Sigma_\nu}$

непрерывно и существуют $\lim\limits_{\rho\to 0,\rho\in\Sigma_\nu}\varphi(\rho)$ и $\lim\limits_{\rho\to\infty,\rho\in\Sigma_\nu}\varphi(\rho)$, причем

$$\lim_{\rho\to\infty,\rho\in\Sigma_\nu}\varphi(\rho)=0.$$

Через $\mathcal{H}_0(\Sigma)$ обозначим подпространство, состоящее из таких $\varphi(\cdot)\in\mathcal{H}(\Sigma)$, что для каждого $\nu=\overline{1,N}$ $\lim\limits_{\rho\to 0,\rho\in\Sigma_\nu}\varphi(\rho)=0$. Введем при $\rho\in\Sigma'$ матрицу перестановок $\Pi(\rho)$ такую, что

$$(R_1^+(\rho),\ldots,R_n^+(\rho))=(R_1^-(\rho),\ldots,R_n^-(\rho))\Pi(\rho).$$

Ясно, что $\Pi(\rho)$ представляет собой блочно–диагональную матрицу, постоянную на каждом из лучей Σ_ν. Через $\mathcal{H}_0^\Pi(\Sigma)$ будем обозначать пространство нижнетреугольных блочно - диагональных (где блочная структура - та же, что у матрицы $\Pi(\cdot)$) матриц-функций с элементами из $\mathcal{H}_0(\Sigma)$.

Для $\rho\in\Sigma'$ определим I_- как множество k таких, что $\mathrm{Re}(\rho R_k^-)=\mathrm{Re}(\rho R_{k+1}^-)$.

Определение. Будем говорить, что матрица-функция $v=v(\rho)$, $\rho\in\Sigma'$ принадлежит классу $\mathbf{V}$, если

1. $v(\cdot)-v_0(\cdot)\in\mathcal{H}_0^\Pi(\Sigma)$ (здесь и далее $v_0(\cdot)$ – данные рассеяния невозмущенной системы (1) с $q=0$);

2. нетривиальные диагональные блоки матрицы $v(\rho)$ расположены в строках с номерами k и $k+1$, где $k\in I_-$, и имеют вид

$$\begin{pmatrix} v_{kk} & 0\\ 1 & v_{k+1,k+1}\end{pmatrix},$$

   причем $v_{kk}v_{k+1,k+1}=-1$.

Теорема 1. *Если матрица-функция $v=v(\rho),\rho\in\Sigma'$ является данными рассеяния для некоторой системы вида (1) с $q(\cdot)\in G_0^p$, то $v(\cdot)\in\mathbf{V}$.*

Обозначим через $\Psi_0(x,\rho)$ матрицу $\Psi(x,\rho)$ в случае невозмущенной системы (1) с $q=0$. Для заданной матрицы-функции $v=v(\rho)$, $\rho\in\Sigma'$ определим:

$$\hat v(\rho):=v(\rho)v_0^{-1}(\rho)-I,$$

$$V=V(v,x,\rho):=\Psi_0^-(x,\rho)v(\rho)v_0^{-1}(\rho)(\Psi_0^-(x,\rho))^{-1},$$

$$\hat V(v,x,\rho):=V(v,x,\rho)-I=\Psi_0^-(x,\rho)\hat v(\rho)(\Psi_0^-(x,\rho))^{-1}.$$

Введем зависящие от параметров $v \in \mathbf{V}$, $x \in [0, \infty)$ операторы

$$\mathbf{A}(v,x)f(\rho) := C^+ f(\rho) - (C^- f)(\rho)V(v,x,\rho) = f(\rho) - (C^- f)(\rho)\hat{V}(v,x,\rho).$$

Далее, определим (при тех значениях параметров, при которых правая часть имеет смысл):

$$\mathbf{p}(v,x,\cdot) := (\mathbf{A}(v,x))^{-1}\hat{V}(v,x,\cdot),$$

$$\mathbf{q}(v,\cdot) := \mathbf{\Phi}(\hat{v}(\cdot), \mathbf{p}(v,\cdot,\cdot)) + \mathbf{F}\hat{v}(\cdot),$$

где $\mathbf{F} = s - \lim\limits_{r\to\infty} \mathbf{F}_r$,

$$\mathbf{F}_r f(x) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Sigma\cap\{|\rho|<r\}} d\rho\ \left[B, \Psi_0^-(x,\rho) f(\rho) (\Psi_0^-(x,\rho))^{-1}\right],$$

$$\mathbf{\Phi}(u,\varphi)(x) := \frac{1}{2\pi i}\left[B, \int\limits_{\Sigma} d\rho \left(C^-\varphi(x,\cdot)\right)(\rho)\hat{V}(u,x,\rho)\right],$$

$$\hat{V}(u,x,\rho) := \Psi_0^-(x,\rho)u(\rho)(\Psi_0^-(x,\rho))^{-1},$$

$$C^{\pm} f(\rho) := (Cf)^{\pm}(\rho),\ Cf(\rho) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma} \frac{d\zeta}{\zeta-\rho} f(\zeta),\ \rho \in \mathbb{C}\setminus\Sigma;$$

Теорема 2. *Пусть дана матрица-функция $v(\cdot) \in \mathbf{V}$. Для того, чтобы $v(\cdot)$ являлась данными рассеяния для некоторого $q(\cdot) \in G_0^p$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1. *для каждого $x \in [0, \infty)$ оператор $\mathbf{A}(v,x)$ обратим;*
2. *для каждого $k = \overline{1,n}$ найдется функция $\delta_k(\rho)$, $\rho \in \mathbb{C}\setminus\Sigma$, аналитическая в $\mathbb{C}\setminus\Sigma$ и такая, что:*
   - *для каждого $\nu = \overline{1,N}$ существует непрерывное продолжение функции $\rho^{\mu_k}\delta_k(\rho)$ в $\overline{\mathcal{S}}_\nu$;*
   - *$\rho^{\mu_k}\delta_k(\rho)$ не обращается в нуль ни для каких $\rho \in \overline{\mathcal{S}}_\nu$, $\nu = \overline{1,N}$;*
   - *при $\rho \in \Sigma'$ справедливы формулы сопряжения $\delta^-(\rho) = v_{kk}(\rho)\delta_k^+(\rho)$;*
   - *при $\rho \to \infty$, $\rho \in \mathbb{C}\setminus\Sigma$ справедлива асимптотика $\delta(\rho) = \delta_0(\rho)(I + o(1))$, кроме того, $\delta^{\pm}(\cdot)(\delta_0^{\pm}(\cdot))^{-1} - I \in L_2(\Sigma)$. Здесь $\delta_0(\rho)$ – диагональная матрица, такая что $\delta_{0,kk}(\rho)\Psi_{0k}(x,\rho) = x^{\mu_k}(\mathfrak{h}_k + o(1))$ при $x \to 0$, $\mathfrak{h}_k$ - собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению μ_k.*

3. $\mathbf{q}_{kj}(v, \cdot) \in X_p$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Ignatyev M.* Spectral Analysis for Differential Systems with a Singularity // Results Math. 2017. Vol. 71. P. 1531–1555.

[2] *Ignatiev M.* On Weyl-type Solutions of Differential Systems with a Singularity. The Case of Discontinuous Potential // Mathematical Notes. 2020. Vol. 108, № 6. P. 814–826.

УДК 517.518.43

О свойствах ядер нуль-рядов Уолша[1]

Т. Д. Козловская (Москва, Россия)
tdkozl2018@mail.ru

Доказывается теорема, устанавливающая свойство произвольной порции ядра нуль-ряда Уолша.

Ключевые слова: система Уолша, нуль-ряд, ядро нуль-ряда, приведенное ядро нуль-ряда, множество единственности.

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00584).

On properties of kernels of Walsh null-series[1]

T. D. Kozlovskaya (Moscow, Russia)
tdkozl2018@mail.ru

A theorem establishing a property of an arbitrary portion of the Walsh null-series is proved.

Keywords: Walsh system, null-series, kernel of null-series, reduced kernel of null-series, set of uniqueness.

Acknowledgements: this work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 20-01-00584).

Множество $E \subset [a, b)$ называется U-*множеством* или *множеством единственности* для рядов по системе $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, $x \in [a, b)$, если из сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x)$$

к нулю на $[a, b) \setminus E$ следует, что все коэффициенты этого ряда равны нулю.

Нетривиальный ряд, сходящийся к нулю почти всюду на $[a, b)$, называют *нуль-рядом.* Множество точек, где нуль-ряд не сходится к нулю, назовем *ядром нуль-ряда.* Множество точек, где

$$\varlimsup_{n\to\infty} |S_n(x)| = +\infty,$$

назовем *приведенным ядром нуль-ряда.*

Н. К. Бари получен следующий результат: всякая порция ядра тригонометрического нуль-ряда содержит порцию приведенного ядра того же ряда; существует другой тригонометрический нуль-ряд, для которого ядром и приведенным ядром будут служить именно эти порции ядра и приведенного ядра данного нуль-ряда (см. [1], гл. XIV, с. 794).

Доказательство основной теоремы предваряют следующие утверждения.

Лемма. *Пусть B — ядро нуль-ряда Уолша, $\delta \subset [0,1)$ — произвольный интервал. Тогда множество E всех точек из порции $\delta(B)$, в каждой из которых подпоследовательность $S_{2^m}(x)$ частичных сумм этого нуль-ряда не ограничена, является несчетным.*

Теорема 1 (см. [2]). *Для любого интервала $(\alpha,\beta) \subset [0,1)$ и любой последовательности $p_n \downarrow 0$, $p_n \not\equiv 0$, существует функция $\lambda(x) \in L(0,1)$, отличная от нуля во всех точках (α,β), равная нулю во всех точках $[0,1) \setminus [\alpha,\beta)$ и такая, что ее коэффициенты Фурье–Уолша*

$$\widehat{\lambda}(n) = o(p_n).$$

Построив обобщенное формальное произведение (см. определение ОФП в [2]) исходного нуль-ряда Уолша на ряд Фурье–Уолша "локализующей" функции, получаем следующий основной результат.

Теорема 2. *Пусть B — ядро нуль-ряда Уолша. Для любой порции $\delta(B)$ можно построить другой нуль-ряд, для которого его приведенное ядро N, является множеством всюду плотным в $\delta(B)$. Каждая точка $\delta(B)$ является точкой конденсации для N.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М. : Физматгиз, 1961. 936 с.

[2] *Козловская Т. Д.* О произведении рядов Уолша–Пэли и его применении // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2002. № 3. С. 16–21.

УДК 517.538

О скорости интерполяции аналитических функций посредством h-сумм[1]

М. А. Комаров (Владимир, Россия)

kami9@yandex.ru

Изучается n-кратная интерполяция функций $f(z) = f_0 + f_1 z + \dots$, аналитических вблизи нуля, посредством h-сумм $H_n(z) = \lambda_1 h(\lambda_1 z) + \dots + \lambda_n h(\lambda_n z)$, где $h(z) = h_0 + h_1 z + \dots$ — фиксированная функция, аналитическая в единичном круге, $h_m \neq 0$, $|h_m| \leq C$. При условии, что $|f_m/h_m| \leq a(m+1)^{-s}$, $m = 0, 1, 2, \dots$ ($a := (1 - s^{-1})\gamma^{-1}2^{-s}$), с некоторыми $s > 1$ и $\gamma > 1$, получена поточечная оценка остатка $r_n(z) = f(z) - H_n(z)$ в круге $|z| \leq 1$. Наша оценка уточняет известные результаты, полученные для случая $|f_m/h_m| \leq 1$, $m = 0, 1, 2, \dots$.

Ключевые слова: интерполяция, h-суммы, степенные суммы.

On the rate of interpolation of analytic functions by h-sums[1]

M. A. Komarov (Vladimir, Russia)

kami9@yandex.ru

We study the n-multiple interpolation of functions $f(z) = f_0 + f_1 z + \dots$, analytic near the origin, by h-sums $H_n(z) = \lambda_1 h(\lambda_1 z) + \dots + \lambda_n h(\lambda_n z)$, where $h(z) = h_0 + h_1 z + \dots$ is a fixed function, analytic in the unit disk, $h_m \neq 0$, $|h_m| \leq C$. Under the condition that $|f_m/h_m| \leq a(m+1)^{-s}$, $m = 0, 1, 2, \dots$ ($a := (1 - s^{-1})\gamma^{-1}2^{-s}$), with some $s > 1$ and $\gamma > 1$, we obtain a pointwise estimate of the remainder $r_n(z) = f(z) - H_n(z)$ in the disk $|z| \leq 1$. Our estimate improves some known results, obtained for the case $|f_m/h_m| \leq 1$, $m = 0, 1, 2, \dots$.

Keywords: interpolation, h-sums, power sums.

В [1] был предложен метод аппроксимации аналитических вблизи $z = 0$ функций

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m z^m$$

посредством так называемых h-сумм

$$H_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k h(\lambda_k z), \qquad \lambda_k \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где

$$h(z) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m z^m, \qquad h_m \neq 0,$$

это фиксированная аналитическая в открытом единичном круге функция, а комплексные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ выбираются из условия n-кратной интерполяции

$$f(z) - H_n(z) = O(z^n), \qquad z \to 0.$$

Нетрудно проверить, что набор $\{\lambda_k\}$ совпадает с (единственным) решением следующей системы моментов для степенных сумм:

$$\lambda_1^{m+1} + \dots + \lambda_n^{m+1} = f_m/h_m, \qquad m = 0, 1, \dots, n-1. \tag{1}$$

Основной результат работы [1] можно сформулировать так: *если*

$$|f_m/g_m| \le 1, \qquad m = 0, 1, 2, \dots,$$

а числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ удовлетворяют системе (1), *то H_n и f определены и аналитичны в круге $|z| < \rho = 1/2$, причём $H_n(z) \to f(z)$ равномерно в любом круге $|z| \le (1-\delta)\rho$, $\delta \in (0, 1)$, и*

$$|f(z) - H_n(z)| \le C(h, \delta) n (1 - \delta/2)^n, \qquad |z| \le (1-\delta)\rho.$$

Доказательство этой теоремы опирается на оценку решений (1), согласно которой при условии

$$|\lambda_1^{m+1} + \dots + \lambda_n^{m+1}| \le 1, \qquad m = 0, 1, \dots, n-1, \tag{2}$$

выполняются неравенства

$$|\lambda_k| \le \rho^{-1} = 2, \qquad k = 1, \dots, n.$$

Радиус круга сходимости H_n к f был уточнён в работе [2], где установлено, что на самом деле при условии (2) имеет место более сильная оценка

$$|\lambda_k| \le (1 - \varepsilon_n)^{-1}, \qquad k = 1, \dots, n,$$

с величиной $\varepsilon_n \to 0$ $(n \to \infty)$, определяемой из уравнения

$$\varepsilon_n^2 - (1 - \varepsilon_n)^{n+1} = 0, \quad \varepsilon_n \in (0, 1).$$

В настоящей работе исследуется случай степенного убывания сумм в (1). В частности, доказывается следующая

Лемма. *Если при некоторых $s > 1$ и $\gamma > 1$ первые n степенных сумм комплексных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ удовлетворяют неравенствам*

$$|\lambda_1^m + \dots + \lambda_n^m| \le \frac{a}{m^s}, \quad m = 1, 2, \dots, n,$$

где

$$a = a(s,\gamma) := \frac{s-1}{\gamma s 2^s},$$

то

$$\max_{1\le k\le n} |\lambda_k| < \gamma^{-1/n}.$$

Видим, что при указанном убывании первых n степенных сумм все λ_k лежат внутри единичного круга, в отличие от случая (2) (отметим, что для s, близких к 1, оценку можно улучшить, заменив в определении $a(s,\gamma)$ числитель $s-1$ положительной величиной, отделённой от нуля).

При помощи леммы можно установить, например, следующую оценку погрешности интерполяции функций f суммами H_n:

Теорема. *Если коэффициенты h_m ограничены:*

$$0 < |h_m| \le C, \qquad m = 0, 1, \dots,$$

и при некоторых $s > 1$, $\gamma > 1$ выполняется условие

$$|f_m/h_m| \le \frac{a}{(m+1)^s}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad a = a(s,\gamma) = \frac{s-1}{\gamma s 2^s},$$

а числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ $(n \in \mathbb{N})$ выбраны как решение системы (1)*, то в замкнутом единичном круге верна оценка*

$$|f(z) - H_n(z)| \le \frac{n|z|^n}{\gamma}\Big(\frac{C}{s(2n)^s} + \frac{C}{\gamma^{1/n} - |z|}\Big), \quad |z| \le 1,$$

а суммы H_n определены и аналитичны в круге $|z| < \gamma^{1/n}$, содержащем единичный круг.

При $h(z) = (z-1)^{-1}$ получается оценка интерполяции функций определённого вида посредством *наипростейших дробей*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_k}, \qquad z_k := \lambda_k^{-1}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Данченко В. И.* Об аппроксимативных свойствах сумм вида $\sum_k \lambda_k h(\lambda_k z)$ // Матем. заметки. 2008. Т. 38, № 5. С. 643–649.

[2] *Чунаев П. В.* Об одном нетрадиционном методе аппроксимации // Тр. МИАН. 2010. Т. 270. С. 281–287.

УДК 517.96, 517.984

О смешанных задачах с производными в краевых условиях[1]

В. В. Корнев, А. П. Хромов (Саратов, Россия)
KornevVV@sgu.ru

Приводится решение смешанной задачи для волнового уравнения, не допускающей разделения переменных, с использованием резольвентного подхода и расходящихся рядов.

Ключевые слова: смешанная задача, волновое уравнение, резольвентный подход, расходящийся ряд.

On mixed problems with derivatives in boundary conditions[1]

V. V. Kornev, A. P. Khromov (Saratov, Russia)
KornevVV@sgu.ru

The solution of mixed problem for wave equation, unsolvable by separating variables, is given. It is based on the resolvent method and on the use of divergent series.

Keywords: mixed problem, wave equation, resolvent method, divergent series.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\ (x,t) \in [0,1]\times[0,\infty); \tag{1}$$

$$U_1(u) = u'_x(0,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) = 0; \tag{2}$$

$$U_2(u) = u'_x(1,t) + \alpha_2 u(0,t) + \beta_2 u(1,t) = 0; \tag{3}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u'_t(x,0) = 0. \tag{4}$$

Формальное решение этой задачи по методу Фурье есть

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\varphi)\, cos\rho t d\lambda, \tag{5}$$

где $R_\lambda = (L-\lambda E)^{-1}$ - резольвента оператора $L : Ly = -y''(x)$, $y'(0)+\alpha_1 y(0)+\beta_1 y(1) = y'(1)+\alpha_2 y(0)+\beta_2 y(1) = 0$; E - единичный оператор, $\lambda=\rho^2$, $\mathrm{Re}\rho \geqslant 0$, γ_n - замкнутый контур в λ - плоскости вокруг n-го собственного значения оператора L, $r > 0$ и достаточно велико и фиксировано, n_0 такой номер, что при $n \geqslant n_0$ внутри γ_n находится по одному собственному значению оператора L и все γ_n при $n \geqslant n_0$ находятся вне $|\lambda| = r$.

Мы считаем, что $\varphi(x) \in L[0,1]$. Тогда ряд (5) имеет смысл, хотя он может быть и расходящимся.

Учитывая теоремы 8 и 9 из [1], естественно назначить ряду (5) в качестве суммы следующую функцию

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\widetilde{\varphi}(x+t) + \widetilde{\varphi}(x-t)], \tag{6}$$

где $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ при $x \in [0,1]$ и продолжается на все $x \in \mathbb{R}$ по правилу:

$$(\widetilde{\varphi}(-x), \widetilde{\varphi}(1+x))^T = (\widetilde{\varphi}(x), \widetilde{\varphi}(1-x))^T + 2M\int\limits_0^x e^{M(x-t)}(\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\varphi}(1-t))dt, \tag{7}$$

T - знак транспонирования, $M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим теперь другую задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \ (x,t) \in [0,1] \times [0,\infty); \tag{8}$$

$$U_1(u) = 0, \ U_2(u) = 0; \tag{9}$$

$$u(x,0) = 0, \ u'_t(x,0) = 0. \tag{10}$$

Формальное решение по методу Фурье задачи (8)-(10) есть

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geqslant n_0}^{\infty}\int\limits_{\gamma_n}\right)\int\limits_0^t R_\lambda(f(\bullet,\tau))\frac{sin\rho(t-\tau)}{\rho}d\lambda, \tag{11}$$

где R_λ применяется к $f(x,\tau)$ по переменной x (τ - параметр).

Ряд (11) имеет смысл, если $f(x,t)$ - локально суммируемая в $[0,1] \times [0,\infty)$, и является, вообще говоря, расходящимся. Используя расходящиеся ряды, так же, как и в [2], получаем для ряда (11) следуюющую сумму:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{f}(\eta,\tau)d\eta, \tag{12}$$

где $\widetilde{f}(\eta,\tau) = f(\eta,\tau)$ при $\eta \in [0,1]$ и продолжается на все $\eta \in \mathbb{R}$ по правилу (2).

Рассмотрим основную задачу нашего исследования:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x,t)u(x,t),\ (x,t) \in [0,1] \times [0,\infty); \tag{13}$$

$$U_1(u) = U_2(u) = 0; \tag{14}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u'_t(x,0) = 0. \tag{15}$$

Считаем, что $\varphi(x) \in L[0,1]$ и $q(x,t)u(x,t) \in L[Q_T]$ при любом T, $Q_T = [0,1] \times [0,T]$.

Задача (13)-(15) не относится к задачам на метод Фурье.

Представим решение задачи (13)-(15) в виде $u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t)$, где $u_0(x,t)$ есть решение задачи (1)-(4), которое мы определяем по формуле (6). Для $u_1(x,t)$ имеем систему (8)-(10), где $f(x,t) = -q(x,t)u(x,t)$. Поэтому для $u_1(x,t)$ имеет место формула (12). Тем самым осуществили переход от (13)-(15) к уравнению

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\widetilde{\varphi}(x+t) + \widetilde{\varphi}(x-t)] + \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{f}(\eta,\tau)d\eta, \tag{16}$$

где $f(\eta,\tau) = -q(\eta,\tau)u(\eta,\tau)$ при $\eta \in [0,1]$ и продолжается на все $\eta \in \mathbb{R}$ по формуле (2).

Рассмотрим уравнение (16). Подставляя формально правую часть (16) в интеграл в (16) вместо $u(\eta,\tau)$ бесконечное число раз, приходим к ряду

$$A(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x,t),\ (x,t) \in [0,1] \times [0,\infty), \tag{17}$$

где $a_0(x,t)$ есть правая часть (6); $a_n(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{f}_{n-1}(\eta,\tau)d\eta$, $n = 1,2,...$; $f_n(x,t) = -q(x,t)a_n(x,t),\ n = 0,1,...$.

Теорема 1. *Если при $(x,t) \in Q_T$ $|q(x,t)| \leqslant q_1(x)$, $q_1(x) \in L[0,1]$, то ряд $A(x,t)$ сходится в Q_T абсолютно и равномерно по x и t с экспоненциальной скоростью.*

Теорема 2. *Предположим, что $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ абсолютно нерпрерывны, $\varphi'(0) + \alpha_1\varphi(0) + \beta_1\varphi(1) = \varphi'(1) + \alpha_2\varphi(0) + \beta_2\varphi(1) = 0$, $q(x,t) = q_1(x)q_2(x,t)$, $q_1(x) \in L[0,1]$, $q_2(x,t)$ и q'_{2t} из $C[Q_T]$ при любом $T > 0$. Тогда $A(x,t)$ является классическим решением (удовлетворяющим уравнению* (13) *почти всюду) задачи* (13)-(15).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Хромов А. П., Корнев В. В.* Расходящиеся ряды в методе Фурье для волнового уравнения // Труды института математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27, № 4. С. 215–238.

[2] *Хромов А. П.* О классическом решении смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами и нулевой начальной скоростью // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 10. С. 280–288.

УДК 517.581

Комплексное обвертывание функции $\Gamma(z+1/2)/\Gamma(z+1)$[1]

А. Б. Костин, В. Б. Шерстюков (Москва, Россия)
abkostin@yandex.ru, shervb73@gmail.com

Обсуждается круг вопросов, связанных с интегральными представлениями для гамма-функции Эйлера $\Gamma(z)$ комплексной переменной z. Рассматривается специальное отношение $D(z) \equiv \Gamma(z+1/2)/\Gamma(z+1)$, совпадающее при целых положительных z с нормированным центральным биномиальным коэффициентом. В замкнутой правой полуплоскости (без точки $z=0$) величина $D(z)$ допускает особое интегральное представление, упомянутое для положительных значений переменной в заметке Душана Славича 1975 года. Формула Славича позволяет выводить двусторонние оценки центрального биномиального коэффициента C_{2m}^{m}, согласующиеся с его асимптотикой при $m \to \infty$. Наш метод доказательства комплексной версии формулы Славича использует представление Мальмстена, выражающее гамма-функцию в виде подходящего несобственного интеграла. Дополнительное исследование указывает на наличие асимптотического ряда, обвертывающего логарифм $\sqrt{z}\,D(z)$ в замкнутом угле $|\arg z| \leqslant \pi/4$ с исключенной вершиной.

Ключевые слова: гамма-функция, центральный биномиальный коэффициент, асимптотическое разложение, формула Мальмстена, обвертывающий ряд в комплексной плоскости.

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00236).

Complex enveloping of function $\Gamma(z+1/2)/\Gamma(z+1)$[1]

A. B. Kostin, V. B. Sherstyukov (Moscow, Russia)
abkostin@yandex.ru, shervb73@gmail.com

The article discusses a range of issues related to integral representations for the Euler gamma function $\Gamma(z)$ of the complex variable z. We consider the special quotient $D(z) \equiv \Gamma(z+1/2)/\Gamma(z+1)$ coinciding for positive integers z with the normalized central binomial coefficient. In the closed right half-plane (without the point $z=0$), the quantity $D(z)$ admits a special integral representation, mentioned for positive values of the variable in a 1975 by D. Slavić. Slavić formula allows one to derive two-sided estimates for the central binomial coefficient C_{2m}^{m}, consistent with its asymptotic as $m \to \infty$. Our method of proving a complex version of Slavić formula uses the Malmsten representation expressing the gamma function in the form of a suitable improper integral. Additional research indicates the presence of an asymptotic series, enveloping the logarithm of $\sqrt{z}\,D(z)$ in a closed angle $|\arg z| \leqslant \pi/4$ with an excluded vertex.

Keywords: gamma function, central binomial coefficient, asymptotic expansion, Malmsten formula, enveloping series in the complex plane.

Acknowledgements: the article is done with the financial support of RFFI (project № 18-01-00236).

Вопросы, относящиеся к эйлеровой гамма-функции и биномиальным коэффициентам, составляют важный раздел классического анализа. В последнее время наблюдается интерес к получению асимптотически точных оценок подобных величин (см., например, [1]–[3]). Обзор некоторых результатов по затронутой тематике дан в работе [4].

Рассмотрим специальную величину

$$D(z) \equiv \frac{\Gamma(z+1/2)}{\Gamma(z+1)}, \qquad \operatorname{Re} z \geqslant 0, \quad z \neq 0, \tag{1}$$

с важным интерполяционным свойством

$$D(m) \equiv \frac{\Gamma(m+1/2)}{\Gamma(m+1)} = \sqrt{\pi}\, 2^{-2m} C_{2m}^{m}, \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

где C_{2m}^{m} — центральный биномиальный коэффициент.

В краткой заметке Славича [5] для функции (1) приводится неочевидная формула

$$D(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \exp\left\{ -\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th} t}{2t}\, e^{-4tx}\, dt \right\}, \qquad x > 0. \tag{3}$$

Из (2), (3) получаем интегральное представление центрального биномиального коэффициента

$$C_{2m}^{m} = \frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi m}} \exp\left\{ -\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th} t}{2t}\, e^{-4mt}\, dt \right\}, \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Формула (4) позволяет доказать (см. [5], [6]) универсальные двойные неравенства

$$\frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi m}} \exp\left\{ \sum_{k=1}^{2M-1} \frac{b_k}{m^{2k-1}} \right\} < C_{2m}^{m} < \frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi m}} \exp\left\{ \sum_{k=1}^{2M} \frac{b_k}{m^{2k-1}} \right\}, \tag{5}$$

действующие при всех $m \in \mathbb{N}$ и любом выборе параметра $M \in \mathbb{N}$. Коэффициенты b_k в (5) вычисляются через числа Бернулли B_{2k} по правилу

$$b_k = \frac{(2^{-2k}-1)\, B_{2k}}{k(2k-1)}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Отметим, что в недавней работе Попова [3] для получения как (5), так и новых, уточненных оценок величины C_{2m}^{m}, вместо (4) существенно использовалась при $z = x > 0$ так называемая вторая формула Бине

$$\Gamma(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \exp\left\{ z \ln z - z + 2 \int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(t/z)}{\exp(2\pi t) - 1}\, dt \right\},$$

справедливая в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$.

Как оказалось, формула Славича (3) распространяется на множество $\operatorname{Re} z \geqslant 0,\ z \neq 0$, и удобным инструментом при доказательстве такого утверждения служит восходящее к Мальмстену (1847 г.) представление

$$\Gamma(z) = \exp\left\{ \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-zt} - e^{-t}}{1 - e^{-t}} + (z-1)\, e^{-t} \right) \frac{dt}{t} \right\},$$

также справедливое в замкнутой правой полуплоскости с исключенной точкой $z = 0$ (подробности см. в [7]).

Результат (5) есть очевидное следствие более общих оценок

$$\sum_{k=1}^{2M-1} \frac{(2^{-2k}-1)\, B_{2k}}{k(2k-1)\, x^{2k-1}} < \ln \left(\frac{\sqrt{x}\, \Gamma(x+1/2)}{\Gamma(x+1)} \right) < \sum_{k=1}^{2M} \frac{(2^{-2k}-1)\, B_{2k}}{k(2k-1)\, x^{2k-1}},$$

доказанных в [6] при всех $x > 0$ и $M \in \mathbb{N}$. Эти оценки означают, что функция

$$\ln \left(\frac{\sqrt{x}\, \Gamma(x+1/2)}{\Gamma(x+1)} \right) = \ln \big(\sqrt{x}\, D(x) \big)$$

при $x > 0$ обвертывается рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2^{-2k}-1)\, B_{2k}}{k(2k-1)\, x^{2k-1}}.$$

Основываясь на недавних результатах [6], [7], мы показываем, что подобное свойство имеет место в угле $-\pi/4 \leqslant \arg z \leqslant \pi/4,\ z \neq 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Попов А. Ю.* Новые двусторонние оценки гамма-функции и чисел сочетаний из $2n$ по n. Усиленное обвертывание асимптотическим рядом // Матем. заметки. 2018. Т. 103, № 5. С. 785–789.

[2] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г.* Обобщенные разложения Поповичу для полиномов Бернштейна от рационального модуля // Итоги науки и техники ВИНИТИ. Сер. Современная математика и ее прилож. Тематич. обзоры. 2019. Т. 170. С. 71–117.

[3] *Попов А. Ю.* Двусторонние оценки центрального биномиального коэффициента // Челяб. физ.-матем. журн. 2020. Т. 5, № 1. С. 56–69.

[4] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г.* Сравнительный анализ двусторонних оценок центрального биномиального коэффициента // Челяб. физ.-матем. журн. 2020. Т. 5, № 1. С. 70–95.

[5] *Slavić D. V.* On inequalities for $\Gamma(x+1)/\Gamma(x+1/2)$ // Publikacije Elektrotehničkog fakulteta. Serija Matematika i fizika. 1975. Vol. 498/541. P. 17–20.

[6] *Kostin A. B., Sherstyukov V. B.* Asymptotic behavior of remainders of special number series // Journal of Mathematical Sciences. 2020. Vol. 251. P. 814–838.

[7] *Костин А. Б., Шерстюков В. Б.* Об интегральных представлениях величин, связанных с гамма-функцией // Уфимский матем. журн. 2021. Т. 13, № 4. С. 51–64.

УДК 517.53

Критерий фундаментального принципа для инвариантных подпространств в произвольной выпуклой области[1]

О. А. Кривошеева (Уфа, Россия)
kriolesya2006@yandex.ru

В работе изучаются подпространства функций аналитических в неограниченной выпуклой области комплексной плоскости и инвариантных относительно оператора дифференцирования. Исследуется задача фундаментального принципа – представления всех функций из инвариантного подпространства рядами экспоненциальных мономов. Эти экспоненциальные мономы являются собственными и присоединенными функциями оператора дифференцирования в инвариантном подпространстве. Получен простой геометрический критерий фундаментального принципа. Он формулируется лишь при помощи индекса конденсации А. С. Кривошеева последовательности показателей указанных экспоненциальных мономов.

Ключевые слова: инвариантное подпространство, фундаментальный принцип, экспоненциальный моном.

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке конкурса "Молодая математика России".

A criterion of the fundamental principle for invariant subspaces in an arbitrary convex domain[1]

O. A. Krivosheeva (Ufa, Russia)
kriolesya2006@yandex.ru

We study subspaces of functions analytic in an unbounded convex domain of the complex plane and invariant with respect to the differentiation operator. The problem of the fundamental principle – the representation of all functions from an invariant subspace by a series of exponential monomials-is investigated. These exponential monomials are eigenfunctions and associated functions of the differentiation operator in the invariant subspace. A simple geometric criterion of the fundamental principle is obtained. It is formulated only with the help of A. S. Krivosheev's condensation index of sequence of exponents of the specified exponential monomials.

Keywords: invariant subspace, fundamental principle, exponential monomial.

Acknowledgements: this work was supported in part by Young Russian Mathematics award.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность различных комплексных чисел λ_k и их кратностей n_k. Считаем, что $|\lambda_k|$ не убывает и $|\lambda_k| \to \infty$, $k \to \infty$. Символом $\Xi(\Lambda)$ обозначим множество пределов сходящихся последовательностей вида $\left\{\frac{\bar{\lambda}_{k_j}}{|\lambda_{k_j}|}\right\}_{j=1}^{\infty}$ ($\overline{\lambda}$ — комплексное сопряжение). Множество $\Xi(\Lambda)$ замкнуто и является подмножеством единичной окружности $S(0,1)$. Введем семейство экспоненциальных мономов

$$\mathcal{E}(\Lambda)=\{z^n e^{\lambda_k z}\}_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1}.$$

Пусть $D\subset\mathbb{C}$ — выпуклая область и

$$H_D(\varphi)=\sup_{z\in D}\mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}),\quad \varphi\in[0,2\pi]$$

— ее опорная функция. Положим

$$J(D)=\{e^{i\varphi}\in S(0,1): H_D(\varphi)=+\infty\}.$$

Пусть $H(D)$ — пространство функций аналитических в области D с топологией равномерной сходимости на компактах $K\subset D$, и $W\subset H(D)$ — нетривиальное замкнутое подпространство, которое инвариантно относительно оператора дифференцирования. Спектр этого оператора в подпространстве W является не более чем счетным множеством $\{\lambda_k\}$ ([1], гл.II,§7). Пусть $\Lambda=\{\lambda_k,n_k\}$ — кратный спектр оператора дифференцирования в подпространстве W. Тогда $\mathcal{E}(\Lambda)$ — семейство его собственных и присоединенных функций в W. Через $W(\Lambda,D)$ замыкание (в пространстве $H(D)$) линейной оболочки системы $\mathcal{E}(\Lambda)$.

Основной задачей в теории инвариантных подпространств является проблема фундаментального принципа. Говорят, что в W со спектром Λ справедлив фундаментальный принцип, если для любой функции $g\in W$ верно представление

$$g(z)=\sum_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1} d_{k,n}z^n e^{\lambda_k z},\quad z\in D, \tag{1}$$

причем ряд сходится равномерно на компактах из D.

В работе [2] приводится критерий фундаментального принципа для инвариантных подпространств в произвольной выпуклой области при условии $\Xi(\Lambda)\subseteq J(D)$. В данной работе этот результат распространяется на случай, когда $\Xi(\Lambda)$ лежит в замыкании $\overline{J(D)}$ множества $J(D)$. Отметим, что этот случай принципиально отличается от случая $\Xi(\Lambda)\subseteq J(D)$. Получен простой геометрический критерий фундаментального принципа, который опирается лишь на понятие индекса конденсации последовательности, составляющей спектр инвариантного подпространства.

Следуя [3], введем индекс конденсации

$$S_\Lambda=\lim_{\delta\to 0}\varliminf_{k\to\infty}\frac{\ln|q_\Lambda^k(\lambda_k,\delta)|}{|\lambda_k|},\quad q_\Lambda^k(z,\delta)=\prod_{\lambda_m\in B(\lambda_k,\delta|\lambda_k|,\lambda_m\neq\lambda_k)}\left(\frac{z-\lambda_m}{3\delta|\lambda_m|}\right)^{n_m}.$$

Положим

$$S_\Lambda(\varphi) = \min_{\{\lambda_{k(j)}\}} \lim_{\delta\to 0} \varliminf_{j\to\infty} \frac{\ln|q_\Lambda^{k(j)}(\lambda_{k(j)},\delta)|}{|\lambda_{k(j)}|},$$

где $\varphi \in \mathbb{R}$ и минимум берется по всем подпоследовательностям $\{\lambda_{k(j)}\}$ последовательности $\{\lambda_k\}$ таким, что $\lambda_{k(j)}/|\lambda_{k(j)}| \to e^{-i\varphi}$, $j\to\infty$.

Пусть $\varphi\in\mathbb{R}$ и $a \le +\infty$. Положим

$$\Pi(a,\varphi) = \{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}) < a\}.$$

Множество $\Pi(a,\varphi)$ является полуплоскостью, когда $a\in\mathbb{R}$. Если $a = +\infty$, то $\Pi(a,\varphi)=\mathbb{C}$. Пусть D — неограниченная выпуклая область и $D\ne\Pi(a,\varphi)$, $\varphi\in\mathbb{R}$, $a\le+\infty$. Тогда $\partial J(D) = \{e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}\}$ — двухэлементное множество.

Теорема. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, D *— выпуклая область, и система* $\mathcal{E}(\Lambda)$ *не полна в* $H(D)$. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) Каждая функция $g \in W(\Lambda, D)$ *представляется рядом (1), который сходится равномерно на компактах из области* $D_0 = \Pi(H_D(\varphi_1),\varphi_1) \cap \Pi(H_D(\varphi_2),\varphi_2)$*;*

2) $\Xi(\Lambda) \subseteq \overline{J(D)}$, $\partial J(D) \subseteq \{e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}\}$, $S_\Lambda > -\infty$ *and* $S_\Lambda(\varphi) = 0$, $\varphi\in\partial J(D)\setminus J(D)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Леонтьев А. Ф.* Целые функции. Ряды экспонент. Москва : Наука, 1983. 176 с.

[2] *Кривошеев А. С., Кривошеева О. А.* Инвариантные подпространства целых функций // Матем. заметки. 2021. Т. 109, № 3. С. 380–396.

[3] *Кривошеев А. С.* Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях // Известия РАН. Серия математическая. 2004. Т. 68, № 2. С. 71–136.

УДК 517.55

Обобщение неравенства Харди – Литтлвуда для классов Харди и свойство Фату[1]

В. Г. Кротов (Минск, Беларусь)
krotov@bsu.by

Для функций из классов Харди $H^p(B^n)$ в единичном шаре $B^n \subset \mathbb{C}^n$ изучается задача о существовании пределов почти всюду на границе при произвольном подходе точки $z \in B^n$ к точке границы ζ. Для этого использован вариант понятия L^q_w-точки Лебега с некоторым весом w.

Такой подход допускает также абстрактную трактовку для функций на произведении $X \times (0,T)$, где X — пространство с квазиметрикой и мерой, удовлетворяющей некоторому условию роста. Для реализации этого плана получены обобщения классических неравенств Харди–Литтлвуда для функций из классов Харди, не использующих свойств аналитичности, гармоничности и т.п.

Ключевые слова: пространства Харди, свойство Фату, неравенства Харди-Литтлвуда.

Generalization of the Hardy – Littlewood inequality for Hardy classes and the Fatou property[1]

V. G. Krotov (Minsk, Belarus)
krotov@bsu.by

For functions from Hardy classes $H^p(B^n)$ in the unit ball $B^n \subset \mathbb{C}^n$, we study the problem of the existence of limits almost everywhere on the boundary for an arbitrary approach of the point $z\ inB^n$ to the point of the boundary ζ. For this, a version of the concept of a L^q_w -Lebesgue point with some weight w is used.

This approach also allows an abstract interpretation for functions on the product $X \times (0,T)$, where X is a space with quasimetrics and a measure satisfying a certain growth condition. To implement this plan, generalizations of the classical Hardy–Littlewood inequalities are obtained for functions from the Hardy classes that do not use the properties of analyticity, harmonicity, etc.

Keywords: Hardy Spaces, Fatou Property, Hardy–Littlewood Inequalities.

Введение

Пусть B^n – единичный шар в $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$. Класс Харди $H^p(B^n)$, $p > 0$, состоит из голоморфных функций $f : B^n \to \mathbb{C}$, для которых конечна величина

$$\|f\|_{H^p(B^n)} := \sup_{0 \leq r < 1} \|f_r\|_p, \quad \|g\|_p := \left(\int_S |g(\zeta)|^p \, d\sigma(\zeta) \right)^{1/p}.$$

Здесь $f_r(z) = f(rz)$, σ — поверхностная мера на границе шара $S = \partial B^n$, нормированная условием $\sigma(S) = 1$.

Функции из классов Харди $H^p(B^n)$, $p > 0$, обладают свойством Фату — они имеют пределы для σ-почти всех точек $\zeta \in S$, когда точка $z \in B^n$ стремится к ζ, оставаясь внутри некоторой области. Опишем это свойство более подробно.

На сфере S имеется естественная квазиметрика

$$d(\zeta, \xi) := |1 - \langle \zeta, \xi \rangle|, \quad \langle \zeta, \xi \rangle := \sum_{j=1}^{n} \zeta_j \overline{\xi}_j, \tag{1}$$

где $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$ (см., например, [1, §5.1], [2, Гл. 1, §4]).

С помощью квазиметрики d вводим области подхода к границе (допустимые области Кораньи)

$$D_a(\zeta) := \{r\xi : d(\zeta, \xi) < a(1 - r),\ 0 \le r < 1, \xi \in S\}, \quad \zeta \in S. \tag{2}$$

Здесь и всюду ниже $a > 0$ — любое фиксированное число.

С областями (2) естественным образом связывается понятие D_a-предела (см., например, [1, §5.4]). Каждая функция $f \in H^p(B^n)$, $p > 0$, почти всюду на S имеет D_a-предел при каждом $a > 0$ (см., например, [1, §5.6], [2, Гл. 3, §1]. Будем обозначать этот предел (граничную функцию) так:

$$D_a(\zeta) - \lim f = f^*(\zeta).$$

Области (2) в этом утверждении являются оптимальными и не могут быть существенно расширены. Например, нетрудно показать, что для любой убывающей функции $A : (0, 1] \to [1, +\infty)$, $A(+0) = +\infty$ существует функция $f \in H^p(B^n)$, $p > 0$, для которой предел вдоль областей

$$\{r\eta : d(\zeta, \eta) < A(1 - r)(1 - r),\ 0 \le r < 1,\ \eta \in S\}$$

не существует для σ-почти всех $\zeta \in S$.

1 Свойство Фату

Здесь мы приведем некоторые результаты о граничном поведении функций из классов Харди для случая, когда точка $z \in B^n$ стремится к ζ произвольным образом. Конечно, об обычном пределе речи уже не может быть и мы будем использовать вариант понятия L^q_w-точки Лебега с весом w.

Введем семейство мер ν_α, $\alpha > 0$, на B^n: для измеримого множества $A \subset B^n$ положим

$$\nu_\alpha(A) := \alpha \int_0^1 (1-r)^{\alpha-1} \int_S \chi_A(s\xi)\, d\mu(\xi)\, ds$$

(χ_A — характеристическая функция множества A).

Для точки $\zeta \in S$ и $0 < r, h < 1$ определим области подхода к точке $\zeta \in S$

$$D(\zeta, r, h) := \{s\xi \in B^n : d(\zeta, \xi) < h,\ 1 - r < s < 1\}.$$

Этому семейству областей соответствует максимальный оператор

$$M_\alpha^q f(\zeta) := \sup \left\{ \left(\frac{1}{\nu_\alpha(D(\zeta, r, h))} \int\limits_{D(\zeta,r,h)} |f|^q d\nu_\alpha \right)^{1/q} : 0 < r, h < 1 \right\},$$

где $\zeta \in S$.

Далее запись $A \lesssim B$ означает, что $A \le cB$ для некоторой постоянной $c > 0$, зависящей, возможно, от некоторых параметров.

Теорема 1. *Пусть* $0 < p < q < \infty$, $\alpha := n(q/p - 1)$. *Тогда для любой функции* $f \in H^p(B^n)$ *для всех* $\lambda > 0$ *справедливо неравенство*

$$\sigma(\{M_\alpha^q f > \lambda\}) \lesssim \left(\frac{\|f\|_{H^p}}{\lambda} \right)^q$$

($\lesssim$ не зависит от f и λ).

Из теоремы 1 стандартным способом выводится следующее утверждение о сходимости σ-почти всюду.

Теорема 2. *Пусть* $0 < p < q < \infty$, $\alpha := n(q/p - 1)$. *Тогда для любой функции* $f \in H^p(B^n)$ *для σ-почти всех* $\zeta \in S$ *справедливо соотношение*

$$\lim_{r \to 1, h \to 0} \frac{1}{\nu_\alpha(D(\zeta, r, h))} \int\limits_{D(\zeta,r,h)} |f - f^*(\zeta)|^q d\nu_\alpha = 0.$$

Теоремы 1 и 2 справедливы также при $q = p$ — тогда можно взять любое $\alpha > 0$. Однако в таком случае взять $\alpha = 0$ уже нельзя, так как для любой функция $f \in H^p(B^n)$, отличной от тождественного нуля, $|f|^p$ не может быть суммируемой на B^n по мере ν_0.

2 Обобщение неравенств Харди–Литтлвуда

При доказательстве теоремы 1 использовались следующие неравенства для функций из классов Харди $H^p(B^n)$.

Теорема 3. *Пусть $0 < p < q \le \infty$, $p \le l$, тогда для любой функции $f \in H^p(B^n)$, выполнены неравенства*

$$|f(z)| \lesssim (1-|z|)^{-n/p} \|f\|_{H^p}, \quad z \in B^n,$$

$$\left(\int\limits_S |f(r\zeta)|^q d\sigma(\zeta) \right)^{1/q} \lesssim (1-r)^{-n(1/p-1/q)} \|f\|_{H^p}, \quad 0 \le r < 1,$$

$$\left(\int\limits_0^1 (1-r)^{nl(1/p-1/q)-1} \left(\int\limits_S |f(r\zeta)|^q d\sigma(\zeta) \right)^{l/q} dr \right)^{1/l} \lesssim \|f\|_{H^p}.$$

В одномерном случае теорема 3 была доказана Харди и Литтлвудом [3], Флетт [4] дал для нее другое доказательство, а Митчелл и Хан [5] перенесли ее утверждение на многомерный случай.

Далее мы приведем результат, который обобщает теорему 3 в двух направлениях. С одной стороны, ее утверждение остается справедливым для любой непрерывной (и даже измеримой) функции $f : B^n \to \mathbb{C}$, если в правых частях неравенств (4)–(6) норму $\|f\|_{H^p}$ заменить на $\|N_a f\|_p$, где

$$N_a f(\zeta) := \sup\{|f(z)| : z \in D_a(\zeta)\}, \quad \zeta \in S \quad —$$

максимальная функция, соответствующая областям (2). Квазинормы $\|N_a f\|_p$ и $\|f\|_{H^p}$ эквивалентны с постоянными эквивалентности, зависящими только от n, p и a (см., например, [1, §5.6]).

С другой стороны, единичная сфера $S = \partial B^n \subset \mathbb{C}^n$ будет заменена на весьма общий объект — пространство с квазиметрикой и мерой, удовлетворяющей некоторому условию роста, при этом роль шара B^n будет играть произведение этого пространства на интервал. Перейдем к точным формулировкам.

Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство, топология которого порождена квазиметрикой d, т.е. функция $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет всем аксиомам метрики, причем неравенство треугольника заменяется более слабым условием: существует такое число $a_d \ge 1$, что для всех $x, y, z \in X$ выполнено неравенство

$$d(x, y) \leq a_d[d(x, z) + d(z, y)].$$

Пример квазиметрики — (1).

Квазиметрика d порождает семейство шаров

$$B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}, \quad x \in X,\ r > 0$$

и топологию X. Пусть еще X снабжено борелевской мерой μ.

Рассмотрим произведение $\mathcal{X} := X \times I$, где $I = (0, T)$, $0 < T \leq +\infty$. Для $a > 0$ и каждой точки $x \in X$ определим области

$$\mathcal{D}_a(x) := \{(y, t) \in \mathcal{X} : d(x, y) < at\}.$$

С помощью этих областей вводится $\mathcal{D}_a$-предел и максимальная функция

$$\mathcal{N}_a u(x) := \sup\{|u(y, t)| : (y, t) \in \mathcal{D}_a(x)\}.$$

Далее для $p > 0$ введем классы $\mathcal{H}^p(\mathcal{X})$, состоящие из непрерывных функций $u : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, для которых конечна величина $\|\mathcal{N}_a u\|_{L^p(X)}$. Впервые они рассматривались в [6] в случае $X = \mathbb{R}^n$ и в [7] общем случае.

Теорема 4. *Пусть при некотором $n > 0$ мера μ удовлетворяет условию*

$$r^n \lesssim \mu(B(x, r)), \quad x \in X,\ r \in I, \tag{3}$$

($\lesssim$ не зависит от x и r). Пусть еще $0 < p < q \leq \infty$ и $p \leq l$.

Тогда для любой функции $u \in \mathcal{H}^p(\mathcal{X})$ справедливы неравенства

$$|u(x, t)| \lesssim t^{-n/p} \|\mathcal{N}_a u\|_{L^p(X)}, \quad x \in X, \tag{4}$$

$$\left(\int\limits_X |u(x, t)|^q d\mu(x) \right)^{1/q} \lesssim t^{-n(1/p - 1/q)} \|\mathcal{N}_a u\|_{L^p(X)}, \quad t \in I, \tag{5}$$

$$\left(\int\limits_0^T t^{nl(1/p-1/q)-1} \left(\int\limits_X |u(x, t)|^q d\mu(x) \right)^{l/q} dt \right)^{1/l} \lesssim \|\mathcal{N}_a u\|_{L^p(X)}. \tag{6}$$

Неравенство (4) из теоремы 4 уже отмечалось в [6] в случае $X = \mathbb{R}^n$, см также [8]. Кроме того, неравенство (5) получается из (4) весьма просто. Существенно новым является неравенство (6) в такой общности.

Пример применения теоремы 4: $X = \mathbb{R}^n$ с евклидовым расстоянием и мерой Лебега. Для интегралов Пуассона и Гаусса–Вейерштрасса функций из $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p > 1$, неравенства из теоремы 4 доказаны в [4]. В [4] приводятся также такие неравенства для функций, некоторая степень которых субгармонична.

Теорема 1 также переносится на общую ситуацию. Для этого нам понадобится условие удвоения:

$$\mu(B(x,2r)) \lesssim \mu(B(x,r)), \quad x \in X, r > 0$$

($\lesssim$ не зависит от x и r). Будем предполагать это условие выполненным всюду ниже. Отметим, что в случае ограниченного X при условии удвоения существует такое $n > 0$, для которого выполнено (3).

Теорема 5. *Пусть при некотором $n > 0$ выполнено условие* (3), $0 < p < q < \infty$, $\alpha := n(q/p - 1)$. *Тогда для любой функции $f \in \mathcal{H}^p(\mathcal{X})$ для всех $\lambda > 0$ справедливо неравенство*

$$\mu(\{\mathcal{M}^q_\alpha u > \lambda\}) \lesssim \left(\frac{\|\mathcal{N}_a u\|_{L^p(X)}}{\lambda}\right)^q$$

($\lesssim$ не зависит от u и λ).

В теореме 5 использованы следующие обозначения:

$$\mathcal{M}^q_\alpha u(x) := \sup\left\{\left(\frac{1}{\nu_\alpha(\mathcal{D}(x,t,h))}\int\limits_{\mathcal{D}(x,t,h)} |u|^q d\nu_\alpha\right)^{1/q} : 0 < t, h < 1\right\},$$

где

$$\nu_\alpha(A) := \alpha\int\limits_0^T t^{\alpha-1}\int\limits_X \chi_A(y,t)\,d\mu(y)\,dt, \quad A \subset \mathcal{X},\ \alpha > 0,$$

$$\mathcal{D}(x,t,h) := \{(y,s) \in \mathcal{X} : d(x,y) < h,\ 0 < s < t\}, \quad x \in X,\ 0 < t, h < T.$$

Отметим, что утверждения теорем 4 и 5 сохраняют силу, если в определении классов $\mathcal{H}^p(\mathcal{X})$ непрерывность функций заменить на измеримость.

В заключение остановимся на обобщении теоремы 2.

Пусть $\mathcal{H}^p_0(\mathcal{X})$ — замыкание по квазинорме $\|\mathcal{N}_a u\|_{L^p(X)}$ класса непрерывных в $X \times [0,T)$ функций с компактным носителем. Нетрудно показать, что для каждой функции $u \in \mathcal{H}^p_0(\mathcal{X})$ для μ-почти всех $x \in X$ существует $\mathcal{N}_a$-предел, который мы обозначим $u^*(x)$ [7].

Теорема 6. *Пусть при некотором $n > 0$ выполнено условие* (3), $0 < p < q < \infty$, $\alpha := n(q/p - 1)$. *Тогда для любой функции* $f \in \mathcal{H}_0^p(\mathcal{X})$ *для* μ*-почти всех* $x \in X$ *справедливо соотношение*

$$\lim_{t,h\to 0} \frac{1}{\nu_\alpha(\mathcal{D}(x,t,h))} \int\limits_{\mathcal{D}(x,t,h)} |u - u^*(x)|^q d\nu_\alpha = 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Рудин У.* Теория функций в единичном шаре в $\mathbf{C}^n$. М. : Мир, 1984. 455 с.

[2] *Александров А. Б.* Теория функций в шаре // Комплексный анализ — многие переменные — 2, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 8. М.: ВИНИТИ, 1985. С. 115–190.

[3] *Hardy G. H., Littlewood J. E.* Some properties of fractional integrals. II // Math. Zeit. 1932. Vol. 34. P. 403–439.

[4] *Flett T. M.* On the rate of growth of mean values of holomorphic and harmonic functions // Proc. London Math. Soc. 1970. Vol. 20, № 4. P. 749–768.

[5] *Mitchell J., Hahn K. T.* Representation of linear functionals in H^p spaces over bounded symmetric domains in $\mathbb{C}^n$ // J. Math. Anal. Appl. 1976. Vol. 56, № 24. P. 379–396.

[6] *Coifman R. R., Meyer K. T., Stein E. M.* Some new function spaces and their applications in harmonic analysis // J. Funct. Anal. 1985. Vol. 62, № 2. P. 304–335.

[7] *Кротов В. Г.* О граничном поведении функций из пространств типа Харди // Известия АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54, № 5. С. 957-974.

[8] *Кротов В. Г.* Тент-пространства и их приложения // В сб. «Теория функций и приближений: труды 6-й Саратовской зимней школы, 29 янв.-9 февр. 1992 г. ». Саратов: Изд-во Саратовского университета. 1992. Т. 1. С. 90–101.

УДК 517.5

Частный случай построения жестких фреймов в произвольной нульмерной группе[1]

Ю. С. Крусс (Саратов, Россия)
KrussUS@gmail.com

В работе приводится частный случай построения жестких фреймов в произвольной нульмерной группе по известной масштабирующей функции.

Ключевые слова: вейвлет фреймы, нульмерные группы, p-адические числа.

Благодарности: исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00037, https://rscf.ru/project/22-21-00037/.

Special case of construction tight wavelet frames in arbitrary zerodimensional gruop[1]

I. S. Kruss (Saratov, Russia)
KrussUS@gmail.com

In this work we consider some special case of construction tight wavelet frames in arbitrary zerodimensional gruop from a known scaling function.

Keywords: tight wavelet frame, zero-dimensional group, p-adic numbers.

Acknowledgements: this work was supported by the Russian Science Foundation № 22-21-00037, https://rscf.ru/project/22-21-00037/.

Пусть $(G, \dot{+})$ – локально-компактная нульмерная аддитивная топологическая группа, топология в которой задана счетной системой вложенных подгрупп $... \supset G_{-n} \supset ... \supset G_{-1} \supset G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset ... \supset G_n \supset ...$ таких, что $\bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty} G_n = G$, $\bigcap\limits_{n=-\infty}^{\infty} G_n = \{0\}$ (0 – нулевой элемент группы G), $(G_n \backslash G_{n+1})^{\#} = p$, где p – простое число. $g_n \in G_n \backslash G_{n+1}$ – базисная последовательность. При каждом $n \in \mathbb{Z}$ выбираем элемент $g_n \in G_n \setminus G_{n+1}$ и фиксируем его. Тогда любой элемент $x \in G$ однозначно представим в виде $x = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_n$, $a_n = \overline{0, p-1}$. Оператор растяжения $\mathcal{A}\colon G \to G$ задается равенством $\mathcal{A}x := \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_{n-1}$.

Пусть X – совокупность характеров группы G, которая является группой относительно умножения. Обозначим через $G_n^{\perp}$ – аннулятор группы G_n, т.е. $G_n^{\perp} = \{\chi \in X : \forall x \in G_n, (\chi, x) = 1\}$.

Обозначим через $\mathfrak{D}_M(G_{-N})$ множество ступенчатых функций $f \in L_2(G)$ таких, что $supp\ f \subset G_{-N}$ и f постоянна на множествах вида $G_M\dot{+}g$. Для таких функций масштабирующее уравнение имеет вид $\varphi(x) = p \sum\limits_{h\in H_0^{(N+1)}} \beta_h\varphi(\mathcal{A}x\dot{-}h)$, где $H_0^{(N)} = \{h \in G : h = a_{-1}g_{-1}\dot{+}a_{-2}g_{-2}\dot{+}\dots\dot{+}a_{-N}g_{-N},\ a_j = \overline{0, p-1}\}, N \in \mathbb{N}$.

В частотной форме масштабирующее уравнение можно записать в виде: $\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi)\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1})$.

Если сдвиги $(\varphi(x\dot{-}h))_{h\in H_0}$ не ортогональны, то будем строить функции $\psi_\ell(x)$ так, чтобы для любой $f \in L_2(G)$

$$f(x) = \sum_{\ell=1}^{r}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{h\in H_0}(f, \psi_\ell(\mathcal{A}^n\cdot\dot{-}h))\psi_\ell(\mathcal{A}^n x\dot{-}h).$$

В этом случае аффинная система $\psi_\ell(\mathcal{A}^n x\dot{-}h)$ называется фреймом Парсеваля или жестким вейвлет фреймом.

Теорема 1. *Пусть* $G_{-N}^{\perp}\ \chi_\ell\ (\ell = \overline{1, q-1})$ *смежные классы, для которых* $m_0(G_{-N}^{\perp}\chi_\ell) = 0$ *и* $\hat{\varphi}(G_{-N}^{\perp}\chi_\ell\mathcal{A}^{-1}) \neq 0$. *Определим маски* m_ℓ *и вейвлеты* ψ_ℓ *равенствами*

$$m_\ell(\chi) = \mathbf{1}_{G_{-N}^{\perp}\chi_\ell}(\chi)\ (\ell = \overline{1, q-1}),\ \hat{\psi}_\ell(\chi) = m_\ell(\chi)\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1}).$$

Тогда вейвлеты (ψ_ℓ) $(\ell = \overline{1, q-1})$ *порождают жесткий фрейм.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Лукомский С. Ф.* Кратномасштабный анализ на нульмерных группах и всплесковые базисы // Матем. сб. 2010. Т. 201, № 5. С. 41–64.

УДК 517.54

Экстремальные задачи на классах голоморфных отображений круга в себя[1]

О. С. Кудрявцева (Волгоград, Россия),
А. П. Солодов (Москва, Россия)
kudryavceva_os@mail.ru, apsolodov@mail.ru

Найдены точные области однолистности и обратимости на классах голоморфных отображений единичного круга в себя с внутренней и граничной неподвижными точками и условием на угловую производную в граничной неподвижной точке.

Ключевые слова: голоморфное отображение, неподвижные точки, угловая производная, экстремальные задачи.

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00584).

Extremal problems on classes of holomorphic self-maps of a disc[1]

O. S. Kudryavtseva (Volgograd, Russia),
A. P. Solodov (Moscow, Russia)
kudryavceva_os@mail.ru, apsolodov@mail.ru

Sharp domains of univalence and invertibility on classes of holomorphic self-maps of the unit disc with an interior and a boundary fixed points, with a restriction on the value of the angular derivative at the boundary fixed point are found.

Keywords: holomorphic map, fixed points, angular derivative, extremal problems.

Acknowledgements: this work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 20-01-00584).

В работе изучаются задачи поиска областей однолистности и обратимости на классах голоморфных отображений круга в себя.

Рассматривая класс ограниченных фиксированной постоянной голоморфных отображений f единичного круга с центром в нуле с внутренней неподвижной точкой $z = 0$ и таких, что $f'(0) = 1$, Ландау [1] установил существование единого круга однолистности на этом классе и точно вычислил его радиус. Кроме того, он обнаружил существование круга, в котором все функции из указанного класса обратимы, точно вычислив и его радиус.

Горяйнов [2], изучая влияние угловой производной на поведение функции внутри круга, выделил область однолистности на классе голоморфных функций f, отображающих единичный круг с центром в нуле в себя, со свойствами $f(0)=0$, $f(1)=1$ и $f'(1)\leqslant\alpha$. Вопрос о нахождении неулучшаемых областей однолистности оставался открытым.

В настоящей работе решены задачи поиска точных областей однолистности и обратимости на классах голоморфных отображений круга в себя с внутренней и граничной неподвижными точками и ограничением на значение угловой производной в граничной неподвижной точке.

Теорема 1. *Пусть $\alpha\in(1,4]$. Если f — голоморфная функция, отображающая единичный круг с центром в нуле в себя и удовлетворяющая условиям $f(0)=0$, $f(1)=1$ и $f'(1)\leqslant\alpha$ (в смысле углового предела), тогда f однолистна в области*

$$\mathscr{D}=\left\{z\in\mathbb{C}\colon |z|<1 \ \ \text{и} \ \ \frac{\left|1-2z+|z|^2\right|}{1-|z|^2}<\frac{1}{\sqrt{\alpha-1}}\right\}.$$

Какова бы ни была область $\mathscr{U}$, содержащаяся в единичном круге с центром в нуле, $\mathscr{D}\subset\mathscr{U}$, $\mathscr{U}\neq\mathscr{D}$, найдется голоморфная функция f, отображающая единичный круг с центром в нуле в себя, со свойствами $f(0)=0$, $f(1)=1$ и $f'(1)\leqslant\alpha$, не однолистная в области $\mathscr{U}$.

Теорема 2. *Пусть $\alpha\in(1,2)$. Если f — голоморфная функция, отображающая единичный круг с центром в нуле в себя и удовлетворяющая условиям $f(0)=0$, $f(1)=1$ и $f'(1)\leqslant\alpha$ (в смысле углового предела), тогда существует функция, обратная к f и конформно отображающая область*

$$\mathscr{Y}=\left\{w\in\mathbb{C}\colon |w|<1 \ \ \text{и} \ \ \frac{|1-w|}{1-|w|}<\frac{\alpha}{2\sqrt{\alpha-1}}\right\}$$

на некоторую область $\mathscr{X}$, содержащуюся в единичном круге с центром в нуле.

Какова бы ни была область $\mathscr{V}$, содержащаяся в единичном круге с центром в нуле, $\mathscr{Y}\subset\mathscr{V}$, $\mathscr{V}\neq\mathscr{Y}$, найдется голоморфная функция f, отображающая единичный круг с центром в нуле в себя, со свойствами $f(0)=0$, $f(1)=1$ и $f'(1)\leqslant\alpha$, не имеющая обратной в области $\mathscr{V}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Landau E.* Der Picard–Schottkysche Satz und die Blochsche Konstante // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Phys.-Math. Kl. 1926. Vol. 32. P. 467–474.

[2] *Горяйнов В. В.* Голоморфные отображения единичного круга в себя с двумя неподвижными точками // Матем. сб. 2017. Т. 208, № 3. С. 54–71.

УДК 517.984.54

Восстановление квадратичного дифференциального пучка с целыми функциями в краевых условиях[1]

М. А. Кузнецова (Саратов, Россия)
kuznetsovama@info.sgu.ru

В работе изучается обратная спектральная задача для квадратичного пучка операторов Штурма–Лиувилля с сингулярными коэффициентами и целыми функциями в краевых условиях. Доказывается, что для восстановления пучка достаточно части спектра, если по ней можно построить полную функциональную последовательность. Полученные результаты применяются в исследовании неполной обратной задачи.

Ключевые слова: обратные спектральные задачи, дифференциальные пучки, аналитическая зависимость от спектрального параметра, сингулярные коэффициенты, теорема единственности, неполные обратные задачи.

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 21-71-10001).

On recovering quadratic differential pencils with entire functions in the boundary conditions[1]

M. A. Kuznetsova (Saratov, Russia)
kuznetsovama@info.sgu.ru

In this work, we study an inverse spectral problem for quadratic pencils of Sturm–Liouville operators with singular coefficients and entire functions in the boundary conditions. It is proved that a part of the spectrum is sufficient for recovering the pencil if this part generates a complete functional system. As well, we apply the obtained results to studying a partial inverse problem.

Keywords: inverse spectral problems, differential pencils, analytical dependence on the spectral parameter, singular coefficients, uniqueness theorem, partial inverse problems.

Acknowledgements: this work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 21-71-10001).

Introduction

We study an inverse spectral problem of recovering the coefficients in the quadratic pencil

$$-y'' + q(x)y + 2\lambda p(x)y = \lambda^2 y, \quad x \in (0, \pi), \tag{1}$$

where $p \in L_2(0, \pi)$ and $q \in W_2^{-1}(0, \pi)$. The latter means $q = \sigma'$ in the sense of distributions for some $\sigma \in L_2(0, \pi)$. In the case of singular coefficients, inverse spectral problems of recovering the quadratic pencils were studied in the works [1, 2]. We rewrite and study equation (1) in the form with quasiderivative $y^{[1]} := y' - \sigma y$, as it was done in [1, 2].

We consider the following boundary conditions:

$$y(0) = 0, \quad f_1(\lambda) y^{[1]}(\pi) + f_2(\lambda) y(\pi) = 0, \tag{2}$$

where $f_1(\lambda)$ and $f_2(\lambda)$ are known entire functions. The reason for using conditions (2) is that they allow to unify studying partial inverse problems. In [3], it was shown that partial inverse problems for Sturm–Liouville operators of various classes reduce to recovering their potentials by subspectra of the boundary value problems with conditions (2).

Our aim is to study the inverse problem of recovering the pencil (1) with the boundary conditions (2) by a subspectrum $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ and some number giving information on p :

Inverse problem 1. Given $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ and $(\omega_0 \bmod 1)$, recover the coefficients p and q.

Here, we apply the technique developed in [3] to studying this inverse problem. We find the conditions on a part of the spectrum under which Inverse Problem 1 has a unique solution. These conditions include the completeness of certain functional sequences. Under them, we obtain a uniqueness theorem for Inverse Problem 1. Then, we provide an example of the partial inverse problem to which these results are applicable.

Preliminaries

Let $S(x, \lambda)$ be the solution of equation (1) satisfying the initial conditions $S(0, \lambda) = 0$, $S^{[1]}(0, \lambda) = 1$. The following representations hold, see [2]:

$$\left.\begin{aligned} S(\pi, \lambda) &= \frac{\sin \pi(\lambda - \omega_0)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{K}(t) \exp(i\lambda t)\, dt, \\ S^{[1]}(\pi, \lambda) &= \cos \pi(\lambda - \omega_0) + \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{N}(t) \exp(i\lambda t)\, dt, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

where $\omega_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi p(s)\, ds$ and $\mathcal{K}, \mathcal{N} \in L_2(-\pi, \pi)$. As the piece of the input data for Inverse Problem 1, we take the fractional part $(\omega_0 \bmod 1)$ of ω_0.

First, we note that a number λ is an eigenvalue of the boundary value problem (1), (2) if and only if it is a zero of the characteristic function

$$\Delta(\lambda) = f_1(\lambda) S^{[1]}(\pi, \lambda) + f_2(\lambda) S(\pi, \lambda). \tag{4}$$

Consider a sequence $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ such that $\Delta(\lambda_k) = 0$ and each λ_k occurs in the sequence not more times than its multiplicity as zero of $\Delta(\lambda)$. We call such sequence $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ a subspectrum.

Put $\lambda_0 := 0$ and introduce the notations

$$\mathbb{S}_\lambda = \{n \geq 0\colon \lambda_n \neq \lambda_k \quad \forall k\colon 0 \leq k < n\}, \quad m_{\lambda,n} = \#\{k \geq 0\colon \lambda_k = \lambda_n\}.$$

We assume that equal numbers in the sequence $\{\lambda_k\}_{k\geq 0}$ follow each other:

$$\lambda_n = \lambda_{n+1} = \ldots = \lambda_{n+m_{\lambda,n}-1}, \quad n \in \mathbb{S}_\lambda.$$

Consider the Hilbert space of complex-valued vector-functions

$$\mathcal{H} = L_2(-\pi,\pi) \oplus L_2(-\pi,\pi).$$

For $g = [g_1, g_2]$ and $h = [h_1, h_2]$, the scalar product and the norm in $\mathcal{H}$ are given by the formulae

$$(g,h)_\mathcal{H} = \int_{\pi}^{\pi} [\overline{g_1(t)}h_1(t) + \overline{g_2(t)}h_2(t)]\,dt, \quad \|h\|_\mathcal{H} = \sqrt{(h,h)}.$$

In particular, we have $u(t) := [\overline{\mathcal{N}}(t), \overline{\mathcal{K}}(t)] \in \mathcal{H}$.

Let us introduce the notations

$$v(t,\lambda) = [\lambda f_1(\lambda)e(t,\lambda), f_2(\lambda)e(t,\lambda)], \quad e(x,\lambda) = \exp(i\lambda x).$$

For $n \in \mathbb{S}_\lambda$ and $\nu = \overline{0, m_{\lambda,n}-1}$, we denote

$$v_{n+\nu}(t) = \begin{cases} v^{<\nu>}(t,\lambda_n), & n+\nu > 0, \\ [0,1], & n = \nu = 0, \end{cases} \qquad f^{<j>}(\lambda) = \frac{1}{j!}\frac{d^j}{dz^j}f(z)\Big|_{z=\lambda}.$$

Results

Let $L(p,q)$ be the boundary value problem (1), (2) with arbitrary coefficients $p \in L_2(0,\pi)$ and $q \in W_2^{-1}(0,\pi)$. Along with $L(p,q)$, we consider another problem $L(\tilde{p},\tilde{q})$ of the same form but with other coefficients $\tilde{p} \in L_2(0,\pi)$ and $\tilde{q} \in W_2^{-1}(0,\pi)$. Let us agree that, if a symbol α denotes an object related to p and q, then the symbol $\tilde{\alpha}$ with tilde will denote the analogous object related to $\tilde{p}$ and $\tilde{q}$.

Theorem 1. *Suppose that the sequence $\{v_n\}_{n=0}^\infty$ constructed by $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ satisfies the following condition:*
(C) The sequence $\{v_k\}_{k=0}^\infty$ is complete in $\mathcal{H}$.
Then, the equalities $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty = \{\tilde{\lambda}_n\}_{n=1}^\infty$ and $(\omega_0 \bmod 1) = (\tilde{\omega}_0 \bmod 1)$ yield $p \equiv \tilde{p}$, $q \equiv \tilde{q}$.

The proof is based on obtaining explicit formulae for the coefficients $(u, v_k)_\mathcal{H}$ after substituting (3) into (4). Then, we determine the functions

$\mathcal{N}$ and $\mathcal{K}$ uniquely and reduce Inverse Problem 1 to the inverse problem studied in [2].

In some cases, condition (C) is more difficult to verify than two independent conditions imposed on the subspectrum and the pair of the entire functions in (2). The following theorem contains such conditions.

Theorem 2. *Under the following two assumptions, (C) is fulfilled:*
(S) For $n \in \mathbb{N}$, the functions $f_1(\lambda)$ and $f_2(\lambda)$ do not vanish simultaneously in λ_n.
(C2) The functional sequence $\{e^{<\nu>}(t, \lambda_n)\}_{n \in \mathbb{S}_\lambda, v=\overline{0, m_{\lambda,n}-1}}$ is complete in $L_2(-2\pi, 2\pi)$.

Consider the boundary value problem

$$-y'' + q(x)y + 2\lambda p(x)y = \lambda^2 y, \quad x \in (0, 2\pi), \tag{5}$$

$$y(0) = y(2\pi) = 0, \tag{6}$$

where $p \in L_2(0, 2\pi)$ and $q \in W_2^{-1}(0, 2\pi)$. The eigenvalues $\{\mu_k\}_{k \in \mathbb{Z}_0}$ of the boundary value problem (5), (6) satisfy the asymptotics

$$\mu_k = \frac{k}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(t)\, dt + \varkappa_k, \quad \{\varkappa_k\}_{k \in \mathbb{Z}_0} \in \ell_2.$$

We assume that the coefficients p and q are known on $(\pi, 2\pi)$. In [4], in the regular case $p \in W_2^1(0, 2\pi)$ and $q \in L_2(0, 2\pi)$, the following inverse problem was studied:

Inverse Problem 2. Given $\{\mu_k\}_{k \in \mathbb{Z}_0}$ along with p and q on $(\pi, 2\pi)$, recover the coefficients p and q on the interval $(0, \pi)$.

For this inverse problem, a uniqueness theorem was obtained, see [4, Theorem 2]. By reducing Inverse Problem 2 to Inverse Problem 1, we generalize the mentioned result to the case when $p \in L_2(0, 2\pi)$ and $q \in W_2^{-1}(0, 2\pi)$.

Let us introduce the solution $\varphi(x, \lambda)$ of (5) satisfying the initial conditions

$$\varphi(2\pi, \lambda) = 0, \quad \varphi^{[1]}(2\pi, \lambda) = 1.$$

A number λ is an eigenvalue of (5), (6) if and only if

$$\varphi^{[1]}(\pi, \lambda) S(\pi, \lambda) - S^{[1]}(\pi, \lambda) \varphi(\pi, \lambda) = 0.$$

It is clear that $\varphi(\pi, \lambda)$ and $\varphi^{[1]}(\pi, \lambda)$ are known entire functions. Then, the eigenvalues $\{\mu_k\}_{k \in \mathbb{Z}_0}$ of (5), (6) coincide with the eigenvalues of (1), (2), where we put $f_1(\lambda) = \varphi(\pi, \lambda)$ and $f_2(\lambda) = \varphi^{[1]}(\pi, \lambda)$. This fact and the previous results allow us to obtain a uniqueness theorem.

Theorem 3. *Let* $q = \tilde{q}$ *in* $W_2^{-1}(\pi, 2\pi)$*,* $p = \tilde{p}$ *in* $L_2(\pi, 2\pi)$*, and* $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{Z}_0} = \{\tilde{\mu}_k\}_{k\in\mathbb{Z}_0}$*. Then, the identities* $q \equiv \tilde{q}$ *and* $p \equiv \tilde{p}$ *hold on* $(0, 2\pi)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Hryniv R., Pronska N.* Inverse spectral problems for energy-dependent Sturm-Liouville equations // Inverse Problems. 2012. Vol. 28. P. 085008.

[2] *Bondarenko N. P., Gaidel A. V.* Solvability and stability of the inverse problem for the quadratic differential pencil // Mathematics. 2021. Vol. 9, № 20, article 2617 (27 pp.)

[3] *Bondarenko N. P.* Inverse Sturm-Liouville problem with analytical functions in the boundary condition // Open Mathematics. 2020. Vol. 18, № 1. P. 512-528.

[4] *Yang Ch. -F., Zettl A.* Half inverse problems for quadratic pencils of Sturm-Liouville operators // Taiwanese J. Math. 2012. Vol. 16, № 5. P. 1829-1846.

УДК 519.633

Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения с суммируемым потенциалом[1]

В. П. Курдюмов (Саратов, Россия)

Kurdyumov47@yandex.ru

Для смешанной задачи с суммируемым потенциалом в волновом уравнении с нулевым начальным положением, когда одно из граничных условий не содержит производных, исследуются свойства формального решения по методу Фурье в зависимости от гладкости начальной скорости.

Ключевые слова: метод Фурье, формальное решение, волновое уравнение, резольвента.

Classic and generalized solutions of the mixed problem for wave equation with a summable potential[1]

V. P. Kurdumov (Saratov, Russia)

Kurdyumov47@yandex.ru

The mixed problem for wave equation with a summable potential and zero initial position, containing no derivatives in one of its boundary conditions, is studied. The properties of its formal solution by Fourier method, depending on smoothness of initial velocity, are established.

Keywords: Fourier method, formal solution, wave equation, resolvent.

Введение

Рассматривается смешанная задача

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t),\ x \in [0,1],\ t \in [0,\infty), \tag{1}$$

$$u(x,0) = 0,\ u'_t(x,0) = \psi(x), \tag{2}$$

$$u'_x(0,t) + \beta u'_x(1,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) = \alpha u(0,t) + u(1,t) = 0, \tag{3}$$

где $q(x) \in L[0,1]$, $q(x)$ и $\psi(x)$ - комплекснозначные функции, α, β, α_1, β_1 - комплексные числа.

К задаче (1) - (3) по методу Фурье привлекается оператор Штурма-Лиувиля L : $Ly = -y'' + q(x)y$ с регулярными при $1+\alpha\beta \neq 0$ граничными условиями

$$y'(0) + \beta y'(1) + \alpha_1 y(0) + \beta_1 y(1) = \alpha y(0) + y(1) = 0,$$

который охватывает все линейные двухточечные разнопорядковые граничные условия. Он выделяется тем, что в силу асимптотических формул его собственных значений

$$\lambda_n = \rho_n^2,\ \lambda_n' = \rho_n'^2\ (\lambda = \rho^2,\ \mathrm{Re}\rho \geqslant 0),$$
$$\rho_n = 2n\pi + b_1 + o(1),\ \rho_n' = 2n\pi + b_2 + o(1), \tag{4}$$

только в нем при $b_1 = b_2$ возможно наличие бесконечного множества кратных собственных значений и им соответствующих собственных функций. Один из таких наиболее трудных случаев и рассматривается в статье.

Считаем, что в задаче (1)-(3) $\alpha = 0,\ \beta = -1$, т.е. в дальнейшем рассматривается такая задача

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \tag{5}$$
$$u(x,0) = 0,\ u_t'(x,0) = \psi(x), \tag{6}$$
$$u_x'(0,t) - u_x'(1,t) + \alpha_1(0,t) + \beta_1 u(1,t) = 0,\ u(1,t) = 0. \tag{7}$$

Исследование проводится методом Фурье с помощью резольвентного подхода и идеи А.Н. Крылова об ускорении сходимости рядов Фурье. Такой подход в [1] для задачи (1), (3) с начальными условиями $u(x,0) = \varphi(x),\ u_t'(x,0) = 0$ позволил получить классическое решение без завышения гладкости $\varphi(x)$; и с привлечением теорем Карлесона и Ханта о сходимости тригонометрических рядов Фурье почти всюду (п.в.) показать, что формальное решение сходится п.в. для $\varphi(x) \in L_p[0,1],\ p > 1$, а его сумма является обобщенным решением. Аналогичные результаты для задачи (1), (2) с граничными условиями $u(0,t) = u(1,t) = 0$ или $u_x'(0,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) = u_x'(1,t) + \alpha_2 u(0,t) + \beta_2 u(1,t) = 0$ получены в [2], [3].

Мы получим классическое решение задачи (5)-(2) при условии, что $\psi(x)$ абсолютно непрерывна и $\psi'(x) \in L_p[0,1],\ 1 < p \leqslant 2$. А также покажем, что в случае $\psi(x) \in L[0,1]$ ряд формального решения сходится равномерно при $x \in [0,1],\ t \in [0,T]$ и является обобщенным решением, а если $\psi(x) \in L_p[0,1],\ 1 < p \leqslant 2$, то обобщенное решение является значительно более гладким.

Классическое решение.

Берем $\psi(x)$ такую, что $\psi(1) = 0$ и для простоты считаем, что $\psi(x) \in W_2^1[0,1]$. Оператор Штурма-Лиувиля имеет вид

$$Ly = -y'' + q(x)y,\ y'(0) - y'(1) + \alpha_1 y(0) + \beta_1 y(1) = y(1) = 0.$$

Для его собственных значений справедливы формулы (4), где $b_1 = b_2$, т.е. $\lambda_n = \rho_n^2$, $\lambda_n' = \rho_n'^2$, $\rho_n = 2n\pi + b + o(1)$, $\rho_n' = 2n\pi + b + o(1)$. Обозначим $\widetilde{\gamma}_n = \{\rho|\, |\rho - 2n\pi| = \delta\}$, где $\delta > 0$ и достаточно мало, а $n \geqslant n_0$ и n_0 таково, что при $n \geqslant n_0$ внутри $\widetilde{\gamma}_n$ находятся по одному ρ_n и ρ_n' (которые могут и совпадать). Пусть γ_n - образ $\widetilde{\gamma}_n$ в λ - плоскости ($\lambda = \rho^2$, $\mathrm{Re}\rho \geqslant 0$). Формальное решение задачи (5)-(2) берем в виде

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\right)(R_\lambda\psi)\,\frac{sin\rho t}{\rho}d\lambda,$$

где $r > 0$ таково, что внутри $|\lambda| = r$ находятся все собственные значения λ_n и λ_n', для котрых $n < n_0$, $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ - резольвента оператора L.

Представим $\psi(x)$ в виде $\psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x)$, где $\psi_1(x) \in W_2^1[0,1]$, $\psi_1(0) = \psi_1(1) = 0$, $\psi_2(x) \in C^2[0,1]$, $\psi_2(x) \in D_L$ (область определения оператора L). Формальное решение представим так

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{4} u_j(x,t), \text{ где}$$

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\left(R_\lambda^0\psi_1\right)\frac{sin\rho t}{\rho}d\lambda, \qquad (8)$$

$$u_2(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\left(R_\lambda\psi_1 - R_\lambda^0\psi_1\right)\frac{sin\rho t}{\rho}d\lambda, \qquad (9)$$

$$u_3(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\frac{1}{\lambda - \mu_0}\left(R_\lambda^0 g\right)\frac{sin\rho t}{\rho}d\lambda,$$

$$u_4(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\frac{1}{\lambda - \mu_0}\left(R_\lambda g - R_\lambda^0 g\right)\frac{sin\rho t}{\rho}d\lambda,$$

R_λ^0 - резольвента оператора L_0 : $L_0 y = -y''$, $y'(0) - y'(1) = 0$, $y(1) = 0$; μ_0 находится вне контуров $|\lambda| = r$ и γ_n при $n \geqslant n_0$, $g = (L - \mu_0 E)\psi_2$.

Теорема 1. *Если $q(x) \in L[0,1]$ и $\psi(x) \in W_2^1[0,1]$, то сумма ряда формального решения задачи (5)-(2) непрерывно дифференцируема по x и t и удовлетворяет условиям (6), (2); $u_x'(x,t)$ ($u_t'(x,t)$) абсолютно непрерывна по x (по t) и п.в. удовлетворяется уравнение (5).*

Обобщенное решение.

Пусть $\psi(x) \in L[0,1]$. Формальное решение берем в виде $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$, где $u_j(x,t)$ - те же, что и в (8),(9), но с функцией $\psi(x)$ вместо $\psi_1(x)$. Пусть $\psi_h(x) \in W_2^1[0,1]$ и $u_h(x,t)$ - решение задачи (5)-(2) с функцией $\psi_h(x)$ вместо $\psi(x)$, даваемое теоремой 1.

Теорема 2. *Если $q(x)$ и $\psi(x) \in L[0,1]$, то ряд $u(x,t)$ формального решения задачи (5)-(2) сходится равномерно по $x \in [0,1]$ и $t \in [0,T]$ и $u(x,0) = 0$. Более того, если $\| \psi_h - \psi \|_1 \to 0$ при $h \to 0$, то решение $u_h(x,t)$ задачи (5)-(2) сходится к $u(x,t)$ равномерно по $x \in [0,1]$ и $t \in [0,T]$.*

Если же $\psi(x) \in L_p[0,1],\ 1 < p \leqslant 2$, то имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Если $q(x) \in L[0,1]$, $\psi(x) \in L_p[0,1],\ 1 < p \leqslant 2$, то сумма ряда формального решения задачи (5)-(2) абсолютно непрерывна по x, t и удовлетворяет условиям $u(x,0) = 0$, $u(1,t) = 0$; п.в. по $x \in [0,1]$ $u'_t(x,0) = \psi(x)$ и п.в. на $[0,\infty)$ выполняются условия $u'_x(0,t) - u'_x(1,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) = 0$, $u'_t(x,0) = \psi(x)$.*

Более того, если $\| \psi_h - \psi \|_p \to 0$ при $h \to 0$, то $u_h(x,t)$ сходится к $u(x,t)$ равномерно по $x \in [0,1]$ и $t \in [0,T]$ при любом $T > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Смешанная задача для волнового уравнения с суммируемым потенциалом в случае двухточечных граничных условий разных порядков // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 4. С. 505–515.

[2] *Хромов А. П.* Смешанная задача для однородного волнового уравнения с ненулевой начальной скоростью // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56, № 10. С. 1795–1805. https://doi.org/10.7868/S0044466916100112

[3] *Курдюмов В. П., Хромов А. П., Халова В. А.* Смешанная задача для однородного волнового уравнения сненулевой начальной скоростью с суммируемым потенциалом // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 4. С. 444–456. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-4-444-456

УДК 517.5

Слабо лакунарные ортогональные системы[1]

И. В. Лимонова (Москва, Россия)

limonova_irina@rambler.ru

Для конечной ортогональной системы равномерно ограниченных функций установлено существование достаточно плотных подсистем со свойством лакунарности и с хорошей оценкой нормы оператора мажоранты частных сумм. Доклад основан на совместной работе с Б.С. Кашиным.

Ключевые слова: подсистема, свойство лакунарности, оператор мажоранты частных сумм.

Благодарности: работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ (проект № 14.W03.31.0031).

Weakly lacunary orthogonal systems[1]

I. V. Limonova (Moscow, Russia)

limonova_irina@rambler.ru

For a finite orthogonal system of uniformly bounded functions, we establish the existence of sufficiently dense subsystems with the lacunarity property and a good norm estimate for the maximal partial sum operator. The talk is based on the joint work with B. S. Kashin.

Keywords: subsystem, lacunarity property, maximal partial sum operator.

Acknowledgements: this work was supported by a grant of the Government of the Russian Federation (project no. 14.W03.31.0031).

Пусть $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированная система функций (О.Н.С.), заданных на вероятностном пространстве (X, μ). Система Φ называется p–лакунарной ($p > 2$) или S_p–системой, если для некоторой постоянной K и любого полинома $P = \sum\limits_{k=1}^{N} a_k\varphi_k$ по системе Φ справедливо неравенство

$$\|P\|_{L^p} \leq K \|P\|_{L^2}. \tag{1}$$

Естественный вопрос о максимальной плотности S_p–подсистем в данной О.Н.С. оказался весьма сложным. Он оставался открытым даже в случае тригонометрической системы до появления прорывной работы [1] Ж.Бургейна, в которой была установлена

Теорема A. *Пусть $p > 2$ и О.Н.С. $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{N}$ такова, что*

$$\|\varphi_k\|_{L^\infty} \leq M,\ k = 1, 2, \ldots, N.$$

Тогда найдётся множество $\Lambda \subset \langle N \rangle$ такое, что $|\Lambda| \geq N^{2/p}$ и для любого полинома $P = \sum_{k\in\Lambda} a_k \varphi_k$ имеет место оценка (1) с $K = K(M,p)$. Здесь и далее $\langle N \rangle$ обозначает множество чисел $\{1, 2, \ldots, N\}$.

Пусть $\Lambda \subset \langle N \rangle$ и S_Λ — оператор, действующий по правилу $S_\Lambda(\{a_k\}_{k\in\Lambda}) = \sum\limits_{k\in\Lambda} a_k \varphi_k(x)$. Ясно, что для множества Λ, существование которого установлено в Теореме А,

$$\|S_\Lambda : l^\infty(\Lambda) \to L^p(X)\| \leq |\Lambda|^{1/2} \cdot K(M,p). \tag{2}$$

Введём пространство Орлича L_{ψ_α}, где

$$\psi_\alpha(t) = t^2 \frac{\ln^\alpha(e + |t|)}{\ln^\alpha(e + 1/|t|)}, \ \alpha > 0, \tag{3}$$

а норма функции $f \in L_{\psi_\alpha}(X)$ определяется по формуле

$$\|f\|_{\psi_\alpha} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int\limits_X \psi_\alpha \left(\frac{f(x)}{\lambda} \right) d\mu \leq 1 \right\}.$$

В работе [2] установлены аналоги оценки (2) для пространств Орлича L_{ψ_α} для произвольных ортогональных систем с равномерно ограниченными элементами. Естественно, что в этом случае можно гарантировать большую, чем в Теореме А, плотность множества Λ. Однако для пространства Орлича, порождённого функцией (3), нельзя ожидать, что случайная подсистема мощности $\geq N/(\log N)^\beta$ (β — сколь угодно большая постоянная) окажется ψ_α–лакунарной. Поэтому естественно искать подсистемы $\Phi_\Lambda := \{\varphi_k\}_{k\in\Lambda}$, для которых справедлив аналог более слабого, чем p–лакунарность, свойства (2). Доказательство результатов из работы [2] основано на некоторой модификации метода Бургейна [1].

Ниже нам удобнее рассматривать ортогональные (не обязательно нормированные в $L^2(X,\mu)$) системы со свойством

$$\|\varphi_k\|_{L^\infty(X)} \leqslant 1, \ k = 1, 2, \ldots, N. \tag{4}$$

Пусть $\{\xi_i(\omega)\}_{i=1}^N$ — набор независимых случайных величин, принимающих значения 0 и 1 (селекторов), заданных на вероятностном пространстве (Ω, ν) с

$$\mathbb{E}\xi_i = \int\limits_\Omega \xi_i(\omega) d\nu = \delta, \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Для $\omega \in \Omega$ будем обозначать

$$\Lambda_\omega = \{i \in \langle N \rangle : \xi_i(\omega) = 1\}.$$

Теорема 1. *Пусть $\alpha > 0$ и $\rho > 0$ фиксированы. Для произвольной ортогональной системы $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^N$ со свойством*

$$\|\varphi_k\|_{L^\infty(X)} \leqslant 1, \ k = 1, 2, \ldots, N.$$

с вероятностью большей $1 - C(\rho)N^{-9}$ для случайного множества $\Lambda = \Lambda_\omega$, порождённого набором $\{\xi_i(\omega)\}_{i=1}^N$ с $\mathbb{E}\xi_i = \delta = \big(\log(N+3)\big)^{-\rho}$, $1 \le i \le N$, имеет место неравенство

$$\|S_\Lambda : l^\infty(\Lambda) \to L_{\psi_\alpha}(X)\| \le K(\alpha, \rho)|\Lambda|^{1/2} \left(\big(\log(N+3)\big)^{\frac{\alpha}{2} - \frac{\rho}{4}} + 1\right).$$

Следствие. *При $\delta = \big(\log(N+3)\big)^{-2\alpha}$ норма оператора $S_\Lambda \cdot |\Lambda|^{-1/2}$, действующего из $l^\infty(\Lambda)$ в $L_{\psi_\alpha}(X)$, с вероятностью близкой к 1 ограничена величиной, не зависящей от N.*

Максимальный оператор S^*_Φ (или, что то же, оператор мажоранты частных сумм) задаётся соотношением: для $\{a_k\}_{k=1}^N \in \mathbb{R}^N$

$$S^*_\Phi(\{a_k\})(x) = \sup_{1 \le M \le N} \left| \sum_{k=1}^M a_k \varphi_k(x) \right|.$$

Теорема 2. *При $\rho > 4$ для любой ортогональной системы $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^N$ со свойством (4) найдётся $\Lambda \subset \langle N \rangle$, мощности $|\Lambda| \ge N\big(\log(N+3)\big)^{-\rho}$, такое, что*

$$\left\|S^*_{\Phi_\Lambda} : l^\infty(\Lambda) \to L^2(X)\right\| \le C(\rho)|\Lambda|^{1/2}. \tag{5}$$

Замечание. Существует ортогональная система, основанная на матрице Гильберта (см. [3], гл. 9), со свойством (4), для которой выполнение оценки (5) для $\Lambda \subset \langle N \rangle$ возможно только при $|\Lambda| \le N\big(\log(N+3)\big)^{-2}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Bourgain J.* Bounded orthogonal systems and the $\Lambda(p)$–set problem // Acta Math. 1989. Vol. 162. P. 227–245.

[2] *Кашин Б. С., Лимонова И. В.* Слабо лакунарные ортогональные системы и свойства оператора мажоранты частных сумм для подсистем // Тр. МИАН. 2020. Т. 311. С. 164—182.

[3] *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М. : 2−е изд. доп. АФЦ, 1999.

УДК 517.956.32

Эффективное применение метода Фурье к решению смешанной задачи для телеграфного уравнения[1]

И. С. Ломов (Москва, Россия)
lomov@cs.msu.ru

Приведен алгоритм построения быстро сходящегося ряда, представляющего собой обобщенное или классическое решение смешанной задачи для телеграфного уравнения, рассматриваемого в полуполосе. Рассмотрен случай существенно несамосопряженного оператора по пространственной переменной. Построенный ряд представляет собой обобщенную формулу Даламбера.

Ключевые слова: телеграфное уравнение, смешанная задача, метод Фурье, несамосопряженный оператор.

Effective application of the Fourier method to solving a mixed problem for the telegraph equation[1]

I. S. Lomov (Moscow, Russia)
lomov@cs.msu.ru

An algorithm for constructing a rapidly converging series is presented, which is a generalized or classical solution of a mixed problem for the telegraph equation considered in a half-strip. The case of an essentially non-self-adjoint operator with respect to the spatial variable is considered. The constructed series is a generalized d'Alembert formula.

Keywords: telegraph equation, mixed problem, Fourier method, non-self-adjoint operator.

Рассмотрим смешанную задачу для телеграфного уравнения

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) - q(x)u(x,t), \quad (x,t) \in Q = (0,1) \times (0,\infty), \tag{1}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(0,t) = u_x(1,t), \quad t \geq 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = 0, \quad x \in [0,1], \tag{3}$$

$q(x)$, $\varphi(x)$ — комплекснозначные, интегрируемые на $(0,1)$ функции.

Обозначим через $R^0_\lambda = (L_0 - \lambda E)^{-1}$ — резольвенту оператора L_0 : $-y''(x)$, $x \in (0,1)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = y'(1)$; $\lambda = \varrho^2$, $Re\,\varrho \geq 0$, E — единичный оператор. Пусть $y = R^0_\lambda g$, тогда y является решением задачи

$$-y''(x) - \varrho^2 y(x) = g(x),\ x \in (0,1),\ y(0) = 0,\ y'(0) = y'(1).$$

Решив эту задачу, получим

$$R_\lambda^0 g(x) = -\frac{\sin \varrho x}{2\varrho \sin^2 \frac{\varrho}{2}} \int\limits_0^1 \cos \varrho(1-t) g(t) dt - \frac{1}{\varrho} \int\limits_0^x \sin \varrho(x-t) g(t) dt. \quad (4)$$

Решение задачи (1)–(3) при $q(x) = 0$ по методу Фурье запишем в виде

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{n \geq 0} \int\limits_{\gamma_n} (R_\lambda^0 \varphi) \cos \varrho t d\lambda, \quad (5)$$

где $\lambda = \varrho^2$, $Re\, \varrho \geq 0$, γ_n — образ в λ-плоскости окружности $\widetilde{\gamma}_n = \{\varrho : |\varrho - 2\pi n| = \delta\}$, $\delta > 0$ и достаточно мало, так что внутри γ_n находится по одному собственному значению оператора L_0.

Подставив (4) в (5) и применив теорему о вычетах, получим

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2}\big[2(x+t)(1,\varphi) + 4\sum_{n=1}^{\infty}[(\varphi,(1-\tau)\sin 2\pi n\tau)\sin 2\pi n(x+t) +$$

$$+(\varphi, \cos 2\pi n\tau)(x+t)\cos 2\pi n(x+t)] +$$

$$+2(x-t)(1,\varphi) + 4\sum_{n=1}^{\infty}[(\varphi,(1-\tau)\sin 2\pi n\tau)\sin 2\pi n(x-t) +$$

$$+(\varphi, \cos 2\pi n\tau)(x-t)\cos 2\pi n(x-t)]\big] = \frac{1}{2}[\widetilde{\varphi}(x+t) + \widetilde{\varphi}(x-t)],$$

последнее равенство объясняется тем, что функция $\widetilde{\varphi}(x)$ имеет следующее разложение по рассматриваемой системе корневых функций: $\widetilde{\varphi}(x) = 2x(1,\varphi) + 4\sum\limits_{n=1}^{\infty}[(\varphi,(1-\tau)\sin 2\pi n\tau)\sin 2\pi nx + (\varphi,\cos 2\pi n\tau)x\cos 2\pi nx]$.

Подставим $u_0(x,t) = \dfrac{1}{2}[\widetilde{\varphi}(x+t) + \widetilde{\varphi}(x-t)]$ в краевые условия (2). Получим два соотношения: $\widetilde{\varphi}(x) = -\widetilde{\varphi}(-x)$, $x \in \mathbb{R}$, т. е. функция $\widetilde{\varphi}(x)$ — нечетная, и

$$\widetilde{\varphi}'(1+x) = 2\widetilde{\varphi}'(x) - \widetilde{\varphi}'(1-x),\ x \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

где учтено, что $\widetilde{\varphi}'(x)$ — четная функция.

Проинтегрировав равенство (6) по отрезку $[0,x]$, получим

$$\widetilde{\varphi}(1+x) = 2\widetilde{\varphi}(x) + \widetilde{\varphi}(1-x),\ x \in \mathbb{R}, \quad (7)$$

Соотношение (7) позволяет продолжить функцию $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$, $x \in [0,1]$, с отрезка $[0,1]$ на полуось $x > 0$.

Обозначим $Q_T = (0,1) \times (0,T)$ для произвольного фиксированного числа $T > 0$.

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Для того чтобы существовало единственное классическое решение* $u(x,t)$ *задачи* (1)–(3)*, необходимо и достаточно, чтобы функции* $\varphi(x)$*,* $\varphi'(x)$ *были абсолютно непрерывны на отрезке* $[0,1]$ *и* $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = \varphi'(1)$*. Это решение дается формулой*

$$u(x,t) = A(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x,t), \tag{8}$$

где

$$a_0(x,t) = u_0(x,t) = \frac{1}{2}[\widetilde{\varphi}(x+t) + \widetilde{\varphi}(x-t)],$$

$$a_n(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{f}_{n-1}(\eta,\tau)d\eta, \quad n = 1,2,\ldots,$$

$\widetilde{\varphi}(x)$ *есть нечетное продолжение функции* $\varphi(x)$ *с отрезка* $[0,1]$*, определяемое соотношением* (7)*,* $\widetilde{f}_n(\eta,\tau) = f_n(\eta,\tau) = -q(\eta)a_n(\eta,\tau)$ *при* $\eta \in [0,1]$*,* $n = 0,1,\ldots$*,* $f_n(\eta,\tau)$ *продолжается по переменной* η *с* $[0,1]$ *на всю прямую так же, как функция* $\varphi(x)$*,* $\widetilde{f}_n(\eta,\tau) = -\widetilde{q(\eta)a_n}(\eta,\tau)$*.*

Формулу (8) можно назвать обобщенной формулой Даламбера.

Теорема 2. *Если* $\varphi \in \mathcal{L}(0,1)$*, то ряд* $A(x,t)$ (8) *сходится абсолютно и равномерно (с экспоненциальной скоростью) в* Q_T *для любого* $T > 0$*.*

Теорема 3. *Если* $\varphi \in \mathcal{L}(0,1)$*, а функции* $\varphi_h(x)$*,* $h = 1,2,\ldots$*, удовлетворяют условиям теоремы* 1 *и* $\|\varphi_h - \varphi\|_1 \to 0$ *при* $h \to \infty$*, то соответствующие функциям* $\varphi_h(x)$ *классические решения* $u_h(x,t)$ *задачи* (1)–(3) *сходятся по норме* $\mathcal{L}(Q_T)$ *к* $A(x,t)$*, т.е. в этом случае ряд* (8) *является обобщенным решением задачи* (1)–(3)*.*

Таким образом, из теорем 1–3 следует, что один и тот же ряд $A(x,t)$, быстро сходящийся, является классическим или обобщенным решением задачи (1)–(3) в зависимости от гладкости функции $\varphi(x)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Хромов А. П., Корнев В. В.* Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59, № 2. С. 268–300.

[2] *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и метод Фурье для волнового уравнения // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 20-й межд. Саратовской зимн. шк. (Саратов, 28 января – 1 февраля 2020 г.). Саратов : Изд-во "Научная книга 2020. С. 433–439.

УДК 517.5

О p-адических жестких вейвлет фреймах[1]

С. Ф. Лукомский, А. М. Водолазов (Саратов, Россия)
LukomskiiSF@info.sgu.ru, vam21@yandex.ru

Предлагается способ построения жестких вейвлет фреймов в произвольной нульмерной группе по известной масштабирующей функции. В качестве группы можно выбирать аддитивную группу поля p-адических чисел, аддитивную группу поля положительной характеристики, группу Виленкина. Предлагаемый метод не использует принцип унитарного расширения. Приведен пример построения жесткого фрейма в группе 2-адических чисел.

Ключевые слова: вейвлет фреймы, нульмерные группы, p-адические числа.

Благодарности: исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00037, https://rscf.ru/project/22-21-00037/.

On p-adic tight wavelet frames[1]

S. F. Lukomskii, A. M. Vodolazov (Saratov, Russia)
LukomskiiSF@info.sgu.ru, vam21@yandex.ru

We propose a method for constructing tight wavelet frames in an arbitrary zero-dimensional group from a known scaling function. As a group, one can choose the additive group of the field of p -adic numbers, the additive group of the field of positive characteristic, or the Vilenkin group. The proposed method does not use the principle of unitary expansion. An example of constructing a tight wavelet frame in the group of 2-adic numbers is given.

Keywords: tight wavelet frame, zero-dimensional group, p-adic numbers.

Acknowledgements: this work was supported by the Russian Science Foundation № 22-21-00037, https://rscf.ru/project/22-21-00037/.

Введение

В работах [2-4] разработаны методы построения жестких вейвлет фреймов в группах Виленкина и полях положительной характеристики. Для этого авторы использовали принцип унитарнрго расширения. В [1] указан способ построения фреймов в поле p-адических чисел, но нет даже примеров жестких фреймов. Мы предлагаем способ построения жестких вейвлет фреймов в любой нульмерной группе, по известной масштабирующей функции. Этот спсоб позволяет достаточно прсто строить жесткие вейвлет фреймы и в поле p-адических чисел. Предлагаемый способ не использует принцип унитарного расширения.

1. Нульмерные группы и их характеры

Пусть G-локально компактная нульмерная группа с основной цепочкой подгрупп $\cdots \supset G_{-n} \supset \cdots \supset G_{-1} \supset G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_n \supset \cdots$, порядок фактор групп $\sharp G_n/G_{n+1} = p$ - простое число, $g_n \in G_n \setminus G_{n+1}$ -базисная последовательность.
$H_0 = \{h \in G : h = a_{-1}g_{-1}\dot{+}a_{-2}g_{-2}\dot{+}\ldots\dot{+}a_{-s}g_{-s}, s \in \mathbb{N},\ a_j = \overline{0, p-1}\}$, множество сдвигов. Оператор $\mathcal{A}\colon G \to G$, определенный равенством, $\mathcal{A}x := \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_{n-1}$, при $x = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_n \in G$ - оператор растяжения в G, $\mathcal{A}g_n = g_{n-1}, \mathcal{A}G_n = G_{n-1}$.

Пусть далее X –группа характеров, $G_n^{\perp} = \{\chi \in X : \forall\, x \in G_n\ , \chi(x) = 1\}$ аннуляторы, $r_n \in G_{n+1}^{\perp} \setminus G_n^{\perp}$ – функции Радемахера. Оператор растяжения в X определяется равенством $(\chi\mathcal{A}, x) := (\chi, \mathcal{A}x)$.

При $M, N \in \mathbb{N}$. Обозначим через $\mathfrak{D}_{G_M}(G_{-N})$ множество функций $f \in L_2(G)$ таких, что 1) $\operatorname{supp} f \subset G_{-N}$, и 2) f постоянна на смежных классах $G_M\dot{+}g$. Класс $\mathfrak{D}_{G_{-N}^{\perp}}(G_M^{\perp})$ определяется аналогично.

Лемма 1. *Для любых фиксированных $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_s = 0, 1, ..., p-1$ множество H_0 есть ортонормированный базис в $L_2(G_0^{\perp} r_0^{\alpha_0} r_1^{\alpha_1} ... r_s^{\alpha_s})$.*

Лемма 2. *Пусть $s \in \mathbb{N}$. Для любых фиксированных $\alpha_u ... \alpha_0 \alpha_{-1}, ..., \alpha_{-s} = \overline{0, p-1}$ семейство $p^{\frac{s}{2}}\mathcal{A}^s H_0$ есть ортонормированный базис в $L_2(G_{-s}^{\perp} r_{-s}^{\alpha_{-s}} ... r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0} ... r_u^{\alpha_u})$.*

Пусть функцию $\varphi \in L_2(G)$ удовлетворяет масштабирующему уравнению , $\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi)\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1})$, с маской $m_0(\chi) = \sum\limits_{h \in H_0} \beta_h \overline{(\chi\mathcal{A}^{-1}, h)}$.

Лемма 3. *Если масштабирующая функция $\varphi \in \mathfrak{D}_{G_M}(G_{-N}),\ M, N \in \mathbb{N}$, то масштабирующее уравнение имеет вид*

$$\varphi(x) = p \sum_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h \varphi(\mathcal{A}x \dot{-} h).$$

2. Построение жестких фреймов без принципа унитарного расширения

Пусть $\varphi \in \mathfrak{D}_{G_M}(G_{-N})$, т.е. $\hat{\varphi} \in \mathfrak{D}_{G_{-N}^{\perp}}(G_M^{\perp})$. Маска

$$m_0(\chi) = \sum_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h \overline{(\chi, A^{-1}h)}$$

постоянна на смежных классах по подгруппе $G_{-N}^{\perp}$.

Лемма 4. *Пусть маски m_j $(j = 1, ..., q)$ удовлетворяют условиям*

$$\hat{\psi}^{(j)}(\chi) = \hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1})m_j(\chi) = 1$$

на смежных классах

$$G_{-s}^{\perp} r_{-s}^{\gamma_{-s}} ... r_{-1}^{\gamma_{-1}} r_0^{\gamma_0} ... r_u^{\gamma_u}, \quad s = s(j).$$

Тогда

$$\sum_{h\in H_0} |c_{n,h}^{(j)}(f)|^2 = \sum_{h\in H_0} |(\psi_{n,h}^{(j)}, f)|^2 = \int_{G_{n-s}^{\perp} r_{n-s}^{\gamma_{-s}} ... r_{n-1}^{\gamma_{-1}} r_{n-0}^{\gamma_0}} |\hat{f}(\chi)|^2 d\nu(\chi).$$

Теорема 3. *Пусть $\varphi \in \mathfrak{D}_{G_{-N}^{\perp}}(G_M^{\perp})$ масштабирующая функция с маской m_0. Определим маски $m_j : j = 1, 2, ..., q$ так, что*
1)$\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1})m_j(\chi) = \mathbf{1}_{E_j}(\chi)$, где $E_j = G_{-s(j)}^{\perp} r_{-s(j)}^{\alpha_{-s(j)}} r_{-s(j)+1}^{\alpha_{-s(j)+1}} ... r_0^{\alpha_0} ... r_M^{\alpha_M}$ дизъюнктные смежные классы, и $E_j\mathcal{A}^t$ дизъюнктные множества.
2)существуют целые числа $t(j)$, такие, что

$$\bigsqcup_j E_j\mathcal{A}^{t(j)} = G_{M+1}^{\perp} \setminus G_M^{\perp}.$$

Тогда функции $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_q$ порождают жесткий фрейм.

Доказательство теоремы основано на леммах 1-4.
Пример.(2-adic фрейм) Операция $\dot{+}$ удовлетворяет условию $pg_n = g_{n+1}$. Рассмотрим простейший случай: $p = 2, M = N = 1$ т.е. $\hat{\varphi} \in \mathfrak{D}_{G_{-1}^{\perp}}(G_1^{\perp})$ Маску $m_0(\chi) = \sum_{h\in H_0^{(2)}} \beta_h \overline{(\chi, A^{-1}h)}$, ищем такую, что $m_0(\chi)m_0(\chi\mathcal{A}^{-1}) = 0$ на $G_2^{\perp} \setminus G_1^{\perp}$. Обозначим $m = \alpha_{-1} + \alpha_0 p + \alpha_1 p^2, \quad n = a_{-1} + a_{-2}p$,

$$\overline{(\chi\mathcal{A}^{-1}, h)} = (G_{-1}^{\perp} r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0} r_1^{\alpha_1}, a_{-1}g_0 \dot{+} a_{-2}g_{-1}\dot{)} = A_{m,n},$$

$$A_{m,n} = e^{2\pi i(\alpha_{-1}+\alpha_0 p^{-1}+\alpha_1 p^{-2})(a_{-1}+\frac{a_{-2}}{p})}, \quad m_0(G_{-1}^{\perp} r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0} r_1^{\alpha_1}) = \lambda_m$$

$$A = (A_{m,n})_{m=\overline{0,7}, n=\overline{0,3}}, \quad B = (\beta_0, ..., \beta_3)^T, \ \Lambda = (\lambda_0, ..., \lambda_7)^T.$$

Для нахождения маски m_0 имеем систему

$$AB = \Lambda. \tag{1}$$

Решение системы ищем такое, чтобы $m_0(\chi)m_0(\chi\mathcal{A}^{-1}) = 0$ на $G_2^\perp \setminus G_1^\perp$. Полагаем $\lambda_0 = 1, \lambda_2 = \lambda_6 = \lambda_7 = 0$, решаем систему

$$\begin{pmatrix} A_{0,0} & A_{0,1} & A_{0,2} & A_{0,3} \\ A_{2,0} & A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{6,0} & A_{6,1} & A_{6,2} & A_{6,3} \\ A_{7,0} & A_{7,1} & A_{7,2} & A_{7,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_2 \\ \lambda_6 \\ \lambda_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и находим $\beta_0 = \frac{1}{2}, \beta_1 = \frac{i}{2}, \beta_2 = \frac{-i}{2}, \beta_3 = \frac{1}{2}$. Подставляя их в систему (1) находим $\lambda_1 = 1 + i$, $\lambda_3 = 1 - i, \lambda_4 = 1 + e^{\frac{3\pi i}{4}}, \lambda_5 = 1$. Полагаем
$m_1(\chi) = \frac{1}{1+i}\mathbf{1}_{G_{-1}^\perp r_0}(\chi), \quad \hat{\psi}^{(1)}(\chi) = \hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1})m_1(\chi)$,
$m_2(\chi) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{G_0^\perp r_0 r_1}(\chi), \quad \hat{\psi}^{(2)}(\chi) = \hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1})m_2(\chi)$.

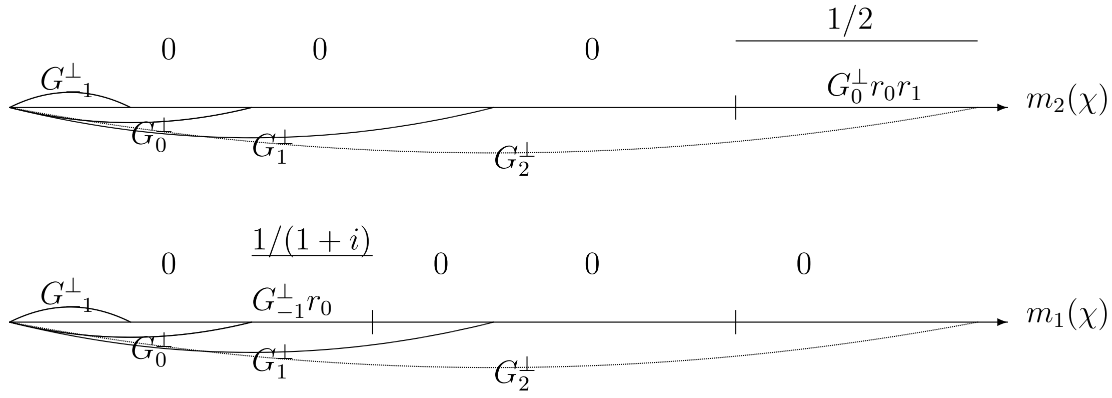

Рис.1. Графики масок m_2 и m_1.

Восстанавливаем
$$\psi^{(1)}(x) = \int_X \mathbf{1}_{G_{-1}^\perp r_0}(\chi, x)d\nu(x) = 2r_0(x)\mathbf{1}_{G_{-1}}(x)$$
$$\psi^{(2)}(x) = \int_X \mathbf{1}_{G_0^\perp r_0 r_1}(\chi, x)d\nu(x) = r_0(x)r_1(x)\mathbf{1}_{G_0}(x)$$

Так как $G_{-1}^\perp r_0\mathcal{A} \bigsqcup G_0^\perp r_0 r_1 = (G_2^\perp \setminus G_1^\perp)$, то функции $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}$ порождают жесткий фрейм. Графики масок приведены на рисунке 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Albeverio S., Evdokimov S., Skopina M.* p-Adic Multiresolution Analysis and Wavelet Frames // J. Fourier Anal Appl. 2010. Vol. 16, № 5. P. 693–714.

[2] *Shah F. A., Debnaht L.* Tightwavelet frames on local fields// Analysis. 2013. Vol. 33. P. 293–307.

[3] *Farkov Y., Lebedeva E., Skopina M.* Wavelet frames on Vilenkin groups and their approximation properties // Iternational Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing. 2015. Vol. 13, № 5. 1550036 (19 pages).

[4] *Ahmada O., Bhatb M. Y., Sheikha N. A.* Construction of Parseval Framelets Associated with GMRA on Local Fields of Positive Characteristic // Num Func. Anal. and Optim. 2021. Vol. 42, № 3. P. 344–370.

УДК 517.5

Соболевские системы, ортогональные относительно весового скалярного произведения с двумя дискретными точками[1]

М. Г. Магомед-Касумов (Махачкала, Россия)
rasuldev@gmail.com

Получены представления функций из систем, ортогональных относительно дискретно-непрерывного весового скалярного произведения типа Соболева с двумя дискретными точками, в терминах функций, ортогональных относительно классических скалярных произведений.

Ключевые слова: весовое скалярное произведение, скалярного произведение типа Соболева, дискретно-непрерывное скалярное произведение.

Sobolev systems orthogonal with respect to the weighted inner product with two discrete points[1]

M. G. Magomed-Kasumov (Makhachkala, Russia)
rasuldev@gmail.com

Representations for functions from systems, orthogonal with respect to a discrete-continuous weighted Sobolev-type inner product with two discrete points, are obtained in terms of functions orthogonal with respect to classical inner products.

Keywords: weighted inner product, Sobolev-type inner product, discrete-continuous inner product.

Введение

В работах Шарапудинова И.И. (см. [1, 2] и приведенные там списки литературы) исследуются свойства систем функций, ортогональных относительно скалярного произведения

$$\langle f, g\rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(a)g^{(\nu)}(a) + \int_a^b f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)w(t)dt, \tag{1}$$

и рядов Фурье по ним. Одно из замечательных свойств частичных сумм рядов Фурье $S_{r,n}(f)$ по таким системам заключается в том, они r-кратно совпадают с функцией f в точке a. Указанное свойство делает эти ряды удобным инструментом для приближенного решения спектральными методами задачи Коши для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения [3, 4]. Однако для решения двухточечных краевых задач упомянутого свойства совпадения в начале отрезка уже недостаточно: в этом случае хотелось бы совпадения частичных сумм с приближаемой функцией на обоих концах рассматриваемого отрезка. В связи с этим возникает задача об изучении систем функций, ортогональных относительно скалярного произведения с двумя дискретными точками:

$$\langle f,g\rangle=\sum_{\nu=0}^{r-1}\Big(f^{(\nu)}(a)g^{(\nu)}(a)+f^{(\nu)}(b)g^{(\nu)}(b)\Big)+\int_a^b f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)w(t)dt. \quad (2)$$

Основной целью данной работы является получение представлений для функций из систем $\Phi_1=\{\varphi_{1,k}\}$, ортонормированных относительно (2) при $r=1$, в терминах функций, ортогональных относительно классических скалярных произведений. Мы будем считать одну из функций системы Φ_1 равной константе (в рамках данной работы без потери общности можно считать, что константой является $\varphi_{1,0}(t)$). Без требования, связанного с константой, получение содержательных результатов становится гораздо более сложной задачей. С другой стороны, это требование является довольно естественным, поскольку известные ортогональные системы, как правило, включают в себя константу. Отметим, что указанная задача в безвесовом случае рассматривалась в работе [5].

Основные результаты

Обозначим через $W^1_{L^2_w}=W^1_{L^2_w}[a,b]$ пространство Соболева, состоящее из абсолютно непрерывных на $[a,b]$ функций f, таких что $f'\in L^2_w[a,b]$, где $L^2_w=L^2_w[a,b]$ — пространство Лебега с весовой (неотрицательной, почти всюду положительной и измеримой) функцией w:

$$L^2_w[a,b]=\{f:\int_a^b|f(t)|^2w(t)dt<\infty\}.$$

Нетрудно убедиться в том, что формула (2) при $r=1$

$$\langle f,g\rangle_S=f(a)g(a)+f(b)g(b)+\int_a^b f'(t)g'(t)w(t)dt \quad (3)$$

задает скалярное произведение в пространстве $W^1_{L^2_w}$. Через $\Phi_1=\{\varphi_{1,k}\}$ будем обозначать систему функций из $W^1_{L^2_w}$.

Предложение 1. *Если $\varphi_{1,0}(t) \equiv const$, то Φ_1 будет ортогональной системой тогда и только тогда, когда*

$$\varphi_{1,k}(a) + \varphi_{1,k}(b) = 0, k \geq 1, \tag{4}$$

$$2\varphi_{1,k}(a)\varphi_{1,n}(a) + \int_a^b \varphi'_{1,k}(t)\varphi'_{1,n}(t)w(t)dt = 0, k, n \geq 1, k \neq n. \tag{5}$$

Предложение 2. *Обозначим через Φ систему функций $\{\varphi_k(x) = \varphi'_{1,k+1}(x)\}_{k=0}^{\infty}$. Тогда выполнение любых двух из следующих условий влечет выполнение и третьего:*

- *Level 0 Item 0 система функций Φ ортогональна в L^2_w;*
- *Level 0 Item 1 система функций Φ_1 ортогональна относительно (3);*
- *Level 0 Item 2 функции $\varphi_{1,k}$, $k \geq 1$, удовлетворяют условиям:*

$$\varphi_{1,1}(a) + \varphi_{1,1}(b) = 0, \tag{6}$$

$$\varphi_{1,k}(a) = \varphi_{1,k}(b) = 0, k \geq 2. \tag{7}$$

Предложение 3. *Пусть $\varphi_k(x) = \varphi'_{1,k+1}(x)$, $k \geq 0$. Тогда выполнение любых двух из следующих условий влечет выполнение и третьего:*

- *Level 0 Item 0 функция $\varphi_k(x)$ нормирована в $L^2_w[a,b]$;*
- *Level 0 Item 1 функция $\varphi_{1,k+1}(x)$ нормирована относительно (3);*
- *Level 0 Item 2 на концах отрезка функция $\varphi_{1,k+1}(x)$ обращается в ноль:*

$$\varphi_{1,k+1}(a) = \varphi_{1,k+1}(b) = 0. \tag{8}$$

Теорема 4. *Пусть $\Phi = \{\varphi_k\}$ — система функций, удовлетворяющая условию*

$$\int_a^b \varphi_k(t)u(t)dt = 0, k \geq 1. \tag{9}$$

Тогда ортонормированность в L^2_u системы $\Phi = \{\varphi_k\}$ равносильна ортонормированности в $W^1_{L^2_\rho}$, $\rho(x) = \frac{1}{u(x)}$, системы функций $\Phi_1 = \{\varphi_{1,k}\}$, заданной равенствами

$$\varphi_{1,0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\varphi_{1,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2}J_0^2}}\Big(-\frac{1}{2}J_0 + \int_a^x \varphi_0(t)u(t)dt\Big), J_0 = \int_a^b \varphi_0(t)u(t)dt,$$

$$\varphi_{1,k+1}(x) = \int_a^x \varphi_k(t)u(t)dt, \quad k \geq 1.$$

Теорема 5. *Пусть* $\Phi = \{\varphi_k\} \subset L^2_\rho$ *— ортонормированная система функций, обладающая свойством*

$$\int_a^b \varphi_k(t)dt = 0, k \geq m. \tag{10}$$

Тогда система функций $\Phi_1 = \{\varphi_{1,k}\}$*, в которой* $\varphi_{1,k}$*,* $0 \leq k \leq m$*, получены ортогонализацией системы функций*

$$1, \int_a^x \varphi_k(t)dt, \quad 0 \leq k \leq m-1, \tag{11}$$

и

$$\varphi_{1,k}(x) = \int_a^x \varphi_{k-1}(t)dt, \quad k \geq m+1, \tag{12}$$

будет ортонормированной в $W^1_{L^2_\rho}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Шарапудинов И. И.* Ортогональные по Соболеву системы функций и некоторые их приложения // УМН. 2019. Т. 74, № 4(448). С. 87–164.

[2] *Шарапудинов И. И.* Системы функций, ортогональные по Соболеву, ассоциированные с ортогональной системой // Изв. РАН. Сер. матем. 2018. Т. 82, № 1. С. 225–258.

[3] *Шарапудинов И. И.* Полиномы, ортогональные по Соболеву, ассоциированные с полиномами Чебышёва первого рода, и задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54, № 12. С. 1645–1662.

[4] *Шарапудинов И. И.* Ортогональные по Соболеву системы функций и задача Коши для ОДУ // Изв. РАН. Сер. матем. 2019. Т. 83, № 2. С. 204–226.

[5] *Магомед-Касумов М. Г.* Соболевские системы, ортогональные относительно скалярного произведения с двумя дискретными точками, и ряды Фурье по ним // Изв. Вузов. 2021. № 12. С. 56–66.

УДК 517.5

О непрерывности некоторых классов и подклассов отображений с s-усредненной характеристикой[1]

А. Н. Малютина (Томск, Россия)

nmd@math.tsu.ru

По известной теореме С. Л. Соболева [1], если G ограниченная область евклидова пространства $\mathbb{R}$ и функция $f : G \to \mathbb{R}^1$, $f \in W^1_{p,loc}(G)$, $p > n$, то она непрерывна в G. Если $1 < p \leq n$, этого свойства, вообще говоря, может и не быть. В настоящей работе мы обобщаем результаты, полученные в [2] и находим необходимые условия, при которых некоторые классы и подклассы отображений с s-усредненной характеристикой [7] $1 < s \leq n$ будут непрерывными. Примеры подклассов таких отображений с указанными выше свойствами приведены в [7, 8].

Ключевые слова: отображение с s-усредненной характеристикой, дифференциальные свойства, непрерывность.

On the continuity of some classes and subclasses of mappings with s-averaged characteristic[1]

A. N. Malyutina (Tomsk, Russia)

nmd@math.tsu.ru

According to the well-known S. L. Sobolev's embedding theorem [1], if G is a bounded domain of Euclidean space and a function $f : G \to \mathbb{R}^1$, $f \in W^1_{p,loc}(G)$, $p > n$, then this function is continuous in G. If $1 < p \leq n$, then this property may not exist. In this paper we generalize the results obtained in [2] and find the necessary conditions of the continuity of some classes and subclasses of mappings with saveraged characteristic [7]. Examples of subclasses of such mappings are given in [7, 8].

Keywords: mapping with s-averaged characteristic, differential properties, continuity.

Введение

Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$, $f : G \to \mathbb{R}^n$, $f \in W^1_n(G)$,$1 < s \leq n$, пусть для любого $y \in G$ выполняются неравенства

$$\int_G (\lambda(x, f))^s k(|x - y|) d\sigma_x < M, \tag{1}$$

$$\int_G (\lambda^*(x, f))^{s^*} k(|x - y|) d\sigma_x < M^*, \tag{2}$$

где функция $k(t)$ определена при $t > 0$, положительна, не возрастает и $\lim\limits_{t\to 0+} k(t) = +\infty$. В случае (1) будем говорить, что отображение с (s,k)-усредненной характеристикой, а в случае (2) – отображение с (s^*,k)-усредненной характеристикой, где функция $f \in W_n^1(G,k,M)$, $1 < s < n$ [7].

Теорема 1. *Пусть f, отображение с (s^*,k)-усредненной характеристикой и выполнено неравенство*

$$\int\limits_0^a k^{\frac{1}{s^*}}(t)t^{\frac{n}{s^*}}dt < +\infty,\ \alpha > n-p. \tag{3}$$

Если $f \in W^1_{n,loc}(G)$, $f^{-1} \in W^1_{n,loc}(G)$, $1 < s \le n$ и для любой точки $y \in G$

$$I\left(\int\limits_G \left(\frac{|\triangle f|^n}{J(x,f)}\right)^s \|x-y\|^{-\alpha} d\sigma_x\right) < M, \tag{4}$$

если $\alpha > n-s$, то на любом компакте A из области G функция f эквивалентна некоторой непрерывной функции.

Доказательство теоремы следует из теоремы Арцела. Для этого построим равностепенно непрерывную и равномерно ограниченную на K последовательность функций, сходящуюся к функции f почти везде в G. Рассмотрим последовательность ε-усредненний функции f по С. Л. Соболеву при достаточно малых ε. Здесь ε-усреднением функции f по С. Л. Соболеву [1] является функция

$$f_\varepsilon = \varepsilon^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{x-u}{\varepsilon}\right) f(u)du = \varepsilon^{-n}\int\limits_{B(0,\varepsilon)} \varphi\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) f(x-u)du.$$

Из [1, с. 79] следует, что вне области G функция $f_\varepsilon = 0$. Известно [1], что функция f_ε бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}^n$ и $\|f_\varepsilon - f\|_p$, $\mathbb{R}^n \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и что $\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_\varepsilon$.

Существуют открытые множества G_1 и G_2 такие, что компакт

$$K \subset G_1 \subset G_2,\ \overline{G_1} \subset G_2,\ \overline{G_2} \subset G$$

где $\overline{G_i}$ - замыкание множества G_i,$i = 1,2$. Покажем, что для достаточно малых ε

$$I\left(\int\limits_G \frac{|\triangle f|^n}{J(x,f)}\|x-y\|^{-\alpha} d\sigma_x\right) < M, y \in G_2$$

Используя обобщенное неравенство Минковского [1] и условие (1) получим

$$I\left(\int\limits_G \frac{|\triangle f|^n}{J(x,f)}\|x-y\|^{-\alpha}d\sigma_x\right) =$$

$$\left[\int\limits_{G_2}\varepsilon^{-n}\int\limits_{B(0,\varepsilon)}\varphi\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)\frac{|\triangle f(x-u)|^n}{J(x,f)}du\|x-y\|^{\alpha}d\sigma_x\right]^{\frac{1}{s}} \leq$$

$$\varepsilon^{-n}\int\limits_{B(0,\varepsilon)}\left[\int\limits_{G_2}\varphi\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)\left(\frac{|\triangle f(x-u)|^n}{J(x,f)}\right)^s\|x-y\|^{\alpha}d\sigma_x\right]^{\frac{1}{s}}du \leq$$

$$\varepsilon^{-n}M\int\limits_{B(0,\varepsilon)}\varphi\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) = M, \tag{5}$$

если $(y-u)\in G$, т.е. при $\varepsilon<\varepsilon_0$, где ε_0 меньше расстояния от границы множества G_2 до границы G. Из неравенства (5) следует, что $\forall y\in G_2$ выполнено неравенство:

$$\left(\int\limits_G \frac{|\triangle f|^n}{J(x,f)}\|x-y\|^{-\alpha}d\sigma_x\right)^s < n^{\frac{n}{2}}M, \text{ если } B(y,r)\subset G_2.$$

Из (3) следует, что непрерывные функции f_ε при $\varepsilon<\varepsilon_0$ удовлетворяют условию леммы Ч. Морри [7], поэтому для любых точек x,y таких, что шар

$$B\left(\frac{x+y}{2},\frac{3}{2}|x-y|\right)\subset G_2,\ |f_\varepsilon(x)-f_\varepsilon(y)|<N|x-y|^\beta,$$

где $\beta=(\alpha-n+s)/s$ и N зависит от M,n,s,α.

Таким образом, семейство функций f_ε при $\varepsilon<\varepsilon_0$ на K равностепенно непрерывно.

Покажем, что функции f_ε при $\varepsilon<\varepsilon_0$ на K ограничены одним числом. Существует функция $\eta\in D$ такая, что ее носитель лежит в G_2 и $\eta(x)=1$ для $x\in G_1$ [3].

Функция $f_\eta\in W_p^1(\mathbb{R}^n)$. Доопределим $f\equiv 0$ вне области G. Для $\varphi\in D$ имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_i} f + \eta \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \varphi dx = \int\limits_{G} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_i} f + \eta \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \varphi dx =$$

$$\int\limits_{G} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_i} f \varphi dx + \int\limits_{G} \eta \varphi \frac{\partial f}{\partial x_i} dx \right) = \int\limits_{G} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_i} f \varphi dx - \int\limits_{G} f \eta \varphi \frac{\partial (\eta \varphi)}{\partial x_i} dx \right) =$$

$$-\int\limits_{G} f \eta \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx. \tag{6}$$

Из (6) следует, что обобщенная производная

$$\frac{\partial (\eta, f)}{\partial x_i} = \frac{\partial \eta}{\partial x_i} f + \eta \frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{7}$$

Покажем, что для функции ηf

$$I \left(\int\limits_{G} \left| \frac{|\triangle f|^n}{J(x,f)} \right|^s \|x-y\|^{-\alpha} d\sigma_x \right) < M, \ \forall y \in K.$$

Из (7) следует, что

$$I \left(\int\limits_{G} \left| \frac{|\triangle f|^n}{J(x,\eta f)} \right|^s \|x-y\|^{-\alpha} d\sigma_x \right) \leq$$

$$I \left(\int\limits_{G} \left| \frac{|\triangle f|^n}{J(x,\eta f)} f \right|^s \|x-y\|^{-\alpha} d\sigma_x \right) +$$

$$I \left(\int\limits_{G} \left| \eta \frac{|\triangle f|^n}{J(x,\eta f)} \right|^s \|x-y\|^{-\alpha} d\sigma_x \right) \leq$$

$$I \left(\int\limits_{G} \left| \frac{|\triangle f|^n}{J(x,\eta f)} f \right|^s \|x-y\|^{-\alpha} d\sigma_x \right)_{y \in G_2} +$$

$$I \left(\int\limits_{G} \left| \eta \frac{|\triangle f|^n}{J(x,f)} \right|^s \|x-y\|^{-\alpha} d\sigma_x \right)_{y \in G_2} \leq A d^{\frac{-\alpha}{s}} B + CM = M_1 \tag{8}$$

где $A = max\frac{\partial\eta}{\partial x_i}$, $x \in G_2$; $C = max\eta(x)$, $x \in G_2$; $B = \|f\|_{p,G}$; d - расстояние между границами множеств G_1 и G_2. Известно [6], что функция $\varphi \in D$ удовлетворяет условиям теоремы и, применяя условие Гельдера и оценки (8) получаем.

$$|\eta(x)f_\varepsilon(x)| = \left|\frac{1}{\omega_{n-1}}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial(\eta f_\varepsilon)}{\partial x_i}(x-y)\frac{y_i}{|y|^n}dy\sigma_y\right| \leq$$

$$\frac{1}{\omega_{n-1}}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{G_2}\frac{\partial(\eta f_\varepsilon)}{\partial y_i}(y)\frac{d\sigma_y}{|y-x|^{n-1}} \leq$$

$$\frac{1}{\omega_{n-1}}\sum_{i=1}^{n}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\partial(\eta f_\varepsilon)}{\partial y_i}(y)\right|^p|y-x|^{-\alpha}d\sigma_y\right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int\limits_{G_2}|y-x|^m d\sigma_y\right)^{\frac{p-1}{p}} \leq M_2,$$

где $m = \frac{np-p-\alpha}{p-1}$,$m+n > 0$,$M_2$ зависит от M_1, n и диаметра области G_2.

Для $x \in K$, $\eta(x) \bigtriangledown f_\varepsilon(x) = f_\varepsilon(x)$ и $|f_\varepsilon| \leq M_2$ следовательно равномерно ограничена. Таким образом, на K семейство функций $f_\varepsilon(x)$, $\varepsilon < \varepsilon_0$ равностепенно непрерывно, равномерно ограниченно, поэтому по теореме Арцеля из семейства можно выделить подпоследовательность функций $|f_n(x)|$ равномерно сходящуюся на K к некоторой непрерывной функций Ψ . Таким образом, получившиеся функции f и Ψ эквивалентны.

Замечание. *Построенные примеры показывают, что в рассматриваемых подмножествах функций класса $W^1_p(G)$ с $p = n$ существуют функции, не принадлежащие ни одному из классов $W^1_l(G)$ при $l > n$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л. : Изд-во ЛГУ, 1950. 255 с.

[2] *Никулина Н. Г.* О непрерывности оного класса функций // В сборнике «Экстремальные задачи теории функций». Томск: Изд-во Томск. ун-та. 1980. С. 78–83.

[3] *Ладыженская О. А., Уральцев Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М. : Наука, 1973. 576 с.

[4] *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М. : Наука, 1969. 480 с.

[5] *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М. : Наука, 1976. 280 с.

[6] *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М. : Наука, 1973. 344 с.

[7] *Асанбеков У. К., Малютина А. Н.* Вычисление модуля сферического кольца // В книге: Комплексный анализ и приложения материалы VIII Петрозаводской международной конференции. 2016. С. 103–106.

[8] *Alipova K., Elizarova M., Malyutina A.* Examples of the mappings with s-averaged characteristic // В сборнике: Комплексный анализ и его приложения материалы VII Петрозаводской международной конференции, 2014. С. 12–17.

УДК 517.53

Некоторые интегральные операторы в областях с границами класса Лаврентьева[1]

Н. М. Махина (Брянск, Россия)

mahinanm@yandex.ru

В данной работе строится ограниченный интегральный оператор, отображающий весовое пространство измеримых функций на соответствующее пространство аналитических функций, в случае, если данные пространства рассматриваются на произведениях областей с границами класса Лаврентьева.

Ключевые слова: конформное отображение, проектор, произведение областей, класс кривых Лаврентьева.

Some integral operators in domains with the boundaries of the Lavrentiev class[1]

N. M. Makhina (Bryansk, Russia)

mahinanm@yandex.ru

In this paper we construct a bounded integral operator, mapping the weight space of measurable functions on the corresponding space of analytic functions, if these spaces are considered on the products of domains with the boundaries of the Lavrentiev class.

Keywords: conformal mapping, projector, product of domains, Lavrentiev curve class.

Пусть (L) – множество кривых Γ (класс кривых Лаврентьева) таких, что $l(w_1, w_2) \le c|w_1 - w_2|$, где точки w_1, w_2 – произвольно выбранные на Γ, $l(w_1, w_2)$ – длина кратчайшей дуги Γ' на кривой Γ, соединяющей точки w_1, w_2 (см. [1], [2]).

В работах автора (см., например, [3]-[6]) рассматриваются вопросы, связанные с возможностью построения ограниченных интегральных операторов в весовых классах аналитических функций типа Бергмана. Отмечается, что решение подобного рода задач во многих случаях тесно связано с геометрическими характеристиками границы области аналитичности, которые, в свою очередь, могут выражаться в различного рода оценках конформно отображающей функции.

Пусть $H(G)$ – множество всех аналитических функций в G; $L^p_\beta(G)$ – класс функций f, измеримых по Лебегу, таких, что

$$\|f\|^p_{L^p_\beta(G)} = \int\limits_G |f(w)|^p \, d^\beta(w, \partial G) dm_2(w) < +\infty \, , \beta > -1, \, 0 < p < +\infty,$$

$A^p_\beta(G) = H(G) \cap L^p_\beta(G)$.

Теорема 1 (см. [7]). Пусть G – некоторая односвязная область на комплексной плоскости с границей класса (L), $\varphi(z)$ – функция Римана, отображающая S на G, $\varphi(0) = \omega_0$, $\omega_0 \in G, \varphi'(0) > 0$. Тогда для $1 < p < +\infty$ справедлива оценка:

$$\int\limits_S \frac{|\varphi'(z)|^{\beta+2} (1-|z|)^\beta \chi^p_\gamma(z)}{|1-\overline{\zeta}z|^{\eta+2}|1-\overline{\xi}z|^\mu} dm_2(z) \le \frac{\tilde{\tilde{\tilde{c}}} |\varphi'(\zeta)|^{\beta+2} (1-|\zeta|)^\beta \chi_\gamma(\zeta) \chi_\gamma^{\frac{p}{q}}(\xi)}{(1-|\zeta|)^{\eta+2-\frac{2}{p}}(1-|\xi|)^{\mu-\frac{2}{q}}},$$

где $\chi_\gamma(\zeta) = (1-|\zeta|)^{-\frac{\gamma}{pq}}$; $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $\beta > -1$, $0 < \dfrac{\gamma}{q} < \beta p + 1$, $\eta \ge \beta - 2 + \dfrac{3}{p} - \dfrac{\gamma}{pq}$; $\mu > 2 - \dfrac{\gamma}{q^2}$, $\tilde{\tilde{\tilde{c}}} = const > 0$.

Теорема 2. (см. [6]). Пусть G – односвязная область на комплексной плоскости с границей класса (L), $\varphi(z)$ – функция, конформно отображающая S на G, $\varphi(0) = \omega_0$, $\omega_0 \in G, \varphi'(0) > 0$, $\psi = \varphi^{-1}$. Тогда

$$F(w) = P_\eta(f)(w) = \frac{\eta+1}{\pi} \int\limits_G \frac{(1-|\psi(\mu)|^2)^\eta}{(1-\overline{\psi(\mu)}\psi(w))^{\eta+2}} f(\mu) \left|\psi'(\mu)\right|^2 dm_2(\mu)$$

непрерывно отображает $L^p_\beta(G)$ на $A^p_\beta(G)$, $1 \le p < +\infty$, $\beta > -1$, $\eta > 2(\beta+1)$, причем при $c(\beta,p) = const > 0$,

$$\|F\|_{A^p_\beta(G)} \le c(\beta,p) \|f\|_{L^p_\beta(G)}.$$

Результат данной теоремы основан на оценках модуля производной конформно отображающей функции (аналогов теоремы 1).

Пусть теперь $\{G_j\}^m_{j=1}$ – класс областей, ограниченных кривыми класса (L) и $\tilde{G} = G_1 \times ... \times G_m$.

По аналогии, обозначим, $L^p_{\vec{\beta}}(\tilde{G})$ – множество измеримых в $\tilde{G}$ функций, для которых

$$\|f\|_{L^p_{\vec{\beta}}(\tilde{G})} = \int\limits_{\tilde{G}} |f(w)|^p \, d^{\vec{\beta}}(w, \partial G) dm_{2m}(w) =$$

$$= \int\limits_{G_1} ... \int\limits_{G_m} |f(w_1,...,w_m)|^p \prod_{j=1}^m d^{\beta_j}(w_j, \partial G_j) dm_2(w_j) < +\infty,$$

где $0 < p < +\infty, \vec{\beta} = (\beta_1,...,\beta_m), \beta_j > -1, j = \overline{1,m}; dm_{2m} = dm_2...dm_2$ – мера Лебега на $\tilde{G}$. Пусть $A^p_{\vec{\beta}}(\tilde{G}) = H(\tilde{G}) \cap L^p_{\vec{\beta}}(\tilde{G})$.

Оказывается, справедлива следующая теорема:

Теорема 3. Пусть $\{G_j\}_{j=1}^m$ – вышеуказанное множество областей с границами класса (L), $\tilde{G} = G_1 \times ... \times G_m$.

Пусть $\{\varphi_j\}_{j=1}^m$ – множество функций, конформно отображающих единичный круг S на G_j, $\varphi_j(0) = w_0^j$, $w_0^j \in G_j$, $\varphi_j'(0) > 0$, $\psi_j = \varphi_j^{-1}$, $j = \overline{1, m}$.

Тогда

$$P_{\vec{\eta}}(f)(\vec{w}) \overset{def}{=} F(\vec{w}) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\eta_j + 1}{\pi} \int\limits_{G_1} ... \int\limits_{G_m} f(\mu_1, ..., \mu_n) \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{m} \frac{(1 - |\psi_j(\mu_j)|^2)^{\eta_j} \left|\psi_j'(\mu_j)\right|^2}{(1 - \overline{\psi_j(\mu_j)}\psi_j(w_j))^{\eta_j + 2}} dm_2(\mu_1)...dm_2(\mu_n)$$

непрерывно отображает $L^p_{\vec{\beta}}(\tilde{G})$ на $A^p_{\vec{\beta}}(\tilde{G})$, $1 < p < +\infty$, $\beta_j > -1$, $j = \overline{1, m}$, при всех $\eta > \eta_0$, $\eta_0 = \eta_0(\vec{\beta})$, $\exists c = c(\vec{\beta}, p)$:

$$\|F\|_{A^p_{\vec{\beta}}(\tilde{G})} \leq c \, \|f\|_{L^p_{\vec{\beta}}(\tilde{G})} .$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. Москва : Мир, 1969. 136 с.

[2] *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. Москва : Мир, 1984. 469 с.

[3] *Махина Н. М.* Некоторые оценки конформно отображающей функции в областях с кусочно-гладкой и асимптотически конформной границей // Вестник Омского университета. 2018. Т. 23, № 3. С. 47–51.

[4] *Махина Н. М.* Об ограниченности некоторых интегральных операторов в областях с асимптотически конформными границами // Ученые записки Брянского государственного университета. 2019. № 3(15). С. 14–16.

[5] *Shamoyan R. F., Makhina N. M.* On continuous linear functionals in some weighted functional classes on product domains // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2015. Vol. 12. P. 651–678.

[6] *Tkachenko N. M., Shamoyan F. A.* The Hardy-Littlewood theorem and the operator of harmonic conjugate in some classes of simply connected domains with rectifiable boundary // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. 2009. Vol. 5, № 2. P. 192–210.

[7] *Махина Н. М.* Некоторые свойства классов BMOA и интегральные оценки конформно отображающей функции в областях с границей типа Лаврентьева // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 2019. Т. 51, № 4. С. 487–495.

УДК 517.518.126

О векторнозначных интегралах Мак-Шейна и Хенстока[1]

К. М. Нараленков (Москва, Россия)

naralenkov@gmail.com

Получены достаточные условия для интегрируемости по Мак-Шейну на счётной системе замкнутых множеств в классе измеримых по Риману и интегрируемых по Хенстоку векторнозначных функций.

Ключевые слова: измеримая по Риману функция, ограниченная вариация, AC_* и AC функции, интегралы Мак-Шейна и Хенстока, норма Алексича.

On the vector-valued McShane and Henstock integrals[1]

K. M. Naralenkov (Moscow, Russia)

naralenkov@gmail.com

We obtain sufficient conditions for a Riemann-measurable Henstock integrable vector-valued function to be McShane integrable on a sequence of closed sets.

Keywords: Riemann-measurable function, bounded variation, AC_* and AC functions, McShane and Henstock integrals, Alexiewicz norm.

Хорошо известно, что для действительнозначной функции, интегрируемой по Хенстоку на отрезке, этот отрезок покрывается счётной системой замкнутых множеств, на каждом из которых рассматриваемая функция интегрируема по Мак-Шейну. Доказательство данного факта существенно использует то, что для действительнозначных функций интеграл Хенстока эквивалентен узкому интегралу Данжуа, а интеграл Мак-Шейна — интегралу Лебега. С другой стороны, в [1] построен пример интегрируемой по Хенстоку на отрезке функции со значениями в пространстве c_0, которая не интегрируема по Мак-Шейну ни на каком невырожденном подотрезке. Таким образом, для получения аналогов упомянутого выше результата для векторнозначных функций потребуются или дополнительные условия на пространство значений или ограничения на рассматриваемую функцию (или же на её неопределённый интеграл). Понятие *измеримости по Риману* естественным образом возникает при рассмотрении векторнозначных обобщений интеграла Римана [2]. Все измеримые по Бохнеру функции измеримы по Риману, однако измеримые по Риману функции могут иметь несепарабельную область значений. В настоящей работе, мы продолжаем изучение взаимоотношения векторнозначных интегралов Мак-Шейна и Хенстока в классе измеримых по Риману функций, начатое в [3], [4].

Пусть X — действительное банахово пространство и $[a, b]$ есть фиксированный невырожденный отрезок действительной оси. На протяжении всей работы I и E будут обозначать произвольный невырожденный подотрезок и произвольное измеримое по Лебегу подмножество отрезка $[a, b]$ соответственно. Если $F : [a, b] \to X$, то $\Delta F(I)$ обозначает *приращение* F на I. Положительная функция на E будет называться *масштабом* на множестве E. Наконец, μ обозначает меру Лебега на действительной оси.

Частичное разбиение Мак-Шейна отрезка $[a, b]$ есть конечный набор $\{(I_k, t_k)\}_{k=1}^{K}$ пар отрезок-точка такой, что отрезки $\{I_k\}_{k=1}^{K}$ попарно не перекрываются и $t_k \in [a, b]$ для каждого k. Частичное разбиение Мак-Шейна отрезка $[a, b]$ называется *частичным разбиением Хенстока* отрезка $[a, b]$ если $t_k \in I_k$ для всех k. Частичное разбиение Мак-Шейна (Хенстока) отрезка $[a, b]$ называется *разбиением Мак-Шейна (Хенстока)* отрезка $[a, b]$ если его отрезки *покрывают* отрезок $[a, b]$.

Определение 1. Функция $f : [a, b] \to X$ называется *интегрируемой по Мак-Шейну (Хенстоку)* на $[a, b]$, с *интегралом Мак-Шейна (Хенстока)* $w \in X$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется масштаб δ на $[a, b]$ такой, что неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^{K} f(t_k)\mu(I_k) - w \right\| < \varepsilon$$

выполняется для всякого разбиения Мак-Шейна (Хенстока) $\{(I_k, t_k)\}_{k=1}^{K}$ отрезка $[a, b]$ с условием $I_k \subset (t_k - \delta(t_k), t_k + \delta(t_k))$ для всех k.

Определение 2. Функция $f : [a, b] \to X$ $\mathcal{M}$-*интегрируема* ($\mathcal{H}$-*интегрируема*) на $[a, b]$ если она интегрируема по Мак-Шейну (Хенстоку) на $[a, b]$ и каждому $\varepsilon > 0$ в определении интеграла Мак-Шейна (Хенстока) функции f по $[a, b]$ соответствует *измеримый* масштаб δ. Функция f $\mathcal{M}$-*интегрируема* ($\mathcal{H}$-*интегрируема*) на множестве E если функция $f \cdot \chi_E$, где χ_E обозначает *характеристическую функцию* множества E, $\mathcal{M}$-*интегрируема* ($\mathcal{H}$-*интегрируема*) на $[a, b]$.

Определение 3. Функция $f : E \to X$ называется *измеримой по Риману* на E если для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся замкнутое множество $F \subset E$, удовлетворяющее условию $\mu(E \setminus F) < \varepsilon$, и положительное число δ такие, что неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^{K} \{f(t_k) - f(t'_k)\} \cdot \mu(I_k) \right\| < \varepsilon$$

выполняется для всякого конечного набора $\{I_k\}_{k=1}^K$ попарно неперекрывающихся отрезков с условием $\max\limits_{1\le k\le K}\mu(I_k)<\delta$ и для всех $t_k, t_k'\in I_k\cap F$.

Все $\mathcal{H}$-интегрируемые функции обязательно измеримы по Риману, более того, интеграл Мак-Шейна (Хенстока) оказывается эквивалентен $\mathcal{M}$-интегралу ($\mathcal{H}$-интегралу) для измеримых по Риману функций [2].

Определение 4. $F:[a,b]\to X$ есть *sVB функция* на E если

$$\mathrm{sV}(F,E)=\sup\sum_{k=1}^K\|\Delta F(I_k)\|<\infty,$$

где супремум берется по всем наборам попарно неперекрывающихся отрезков $\{I_k\}_{k=1}^K$ с условием $\partial I_k\subset E$ для всех k.

Определение 5. $F:[a,b]\to X$ есть *VB_* функция* на E если

$$\mathrm{V}(F,E)=\sup\left\|\sum_{k=1}^K\Delta F(I_k)\right\|<\infty,$$

где супремум берется по всем наборам попарно неперекрывающихся отрезков $\{I_k\}_{k=1}^K$ с условием $\partial I_k\cap E\ne\varnothing$ для всех k.

Определение 6. $F:[a,b]\to X$ есть *AC (AC_*) функция* на E если для каждого $\varepsilon>0$ существует $\eta>0$ такое, что

$$\left\|\sum_{k=1}^K\Delta F(I_k)\right\|<\varepsilon$$

выполняется для каждого конечного набора попарно неперекрывающихся отрезков $\{I_k\}_{k=1}^K$ с условием $\partial I_k\subset E$ ($\partial I_k\cap E\ne\varnothing$) для всех k и $\sum\limits_{k=1}^K\mu(I_k)<\eta$.

Определение 7. $F:[a,b]\to X$ есть *$sVBG$ (VBG_*, ACG, ACG_*) функция* на E если можно покрыть счётной системой множеств, на каждом из которых F есть sVB (VB_*, AC, AC_*) функция.

Определение 8. Пусть $f:[a,b]\to X$ интегрируема на $[a,b]$. Тогда *норма Алексича* функции f определяется равенством

$$\|f\|_A=\sup_{a<t\le b}\left\|\int_a^t f\right\|.$$

Теорема 1. *Пусть X не содержит подпространства, изоморфного c_0. Если $f:[a,b]\to X$ $\mathcal{H}$-интегрируема на $[a,b]$, то $[a,b]$ можно* *покрыть счётной системой замкнутых множеств, на каждом из которых неопределённый интеграл функции f есть VB_* и AC функция, а также функция f $\mathcal{M}$-интегрируема.*

Теорема 2. *Пусть $f : [a, b] \to X$ $\mathcal{H}$-интегрируема на $[a, b]$. Если неопределённый интеграл функции f есть $sVBG$ функция на $[a, b]$, то $[a, b]$ можно покрыть счётной системой замкнутых множеств, на каждом из которых неопределённый интеграл функции f есть sVB и AC функция, а также функция f $\mathcal{M}$-интегрируема.*

Теорема 3. *Пусть $f : [a, b] \to X$ интегрируема по Хенстоку на $[a, b]$. Если существует множество $N \subset [a, b]$ такое, что $\mu(N) = 0$ и $[a, b] \setminus N$ можно покрыть счётной системой замкнутых множеств, на каждом из которых f интегрируема по Мак-Шейну, то $[a, b] \setminus N$ есть объединение счётной возрастающей последовательности замкнутых множеств $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, на каждом из которых f интегрируема по Мак-Шейну и условие*

$$\|f\chi_{F_n} - f\|_A < \frac{1}{n} \tag{1}$$

выполнено для всех n.

Следствие 1. *Пусть $f : [a, b] \to X$ $\mathcal{H}$-интегрируема на $[a, b]$ и выполняется по крайней мере одно из следующих условий:*

1. *X не содержит подпространства, изоморфного c_0;*
2. *неопределённый интеграл функции f есть $sVBG$ функция на $[a, b]$.*

Тогда $[a, b]$ есть объединение счётной возрастающей последовательности замкнутых множеств $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, на каждом из которых f интегрируема по Мак-Шейну и условие (1) выполнено для всех n.

Теорема 4. *Пусть функция $f : [a, b] \to X$ $\mathcal{H}$-интегрируема на $[a, b]$. Тогда найдется множество $N \subset [a, b]$ такое, что $\mu(N) = 0$ и $[a, b] \setminus N$ есть объединение счётной возрастающей последовательности замкнутых множеств $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, на каждом из которых f ограничена и условие (1) выполнено для всех n.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Naralenkov K. M.* A Henstock-Kurzweil integrable vector-valued function which is not McShane integrable on any portion // Quaestiones Math. 2012. Vol. 35, № 1. P. 11–21.

[2] *Naralenkov K. M.* A Lusin type measurability property for vector-valued functions // J. Math. Anal. Appl. 2014. Vol. 417, № 1. P. 293–307.

[3] *Caponetti D., Marraffa V., Naralenkov K.* On the integration of Riemann-measurable vector-valued functions // Monatsh. Math. 2017. Vol. 182, № 3. P. 513–536.

[4] *Нараленков К. М.* О дескриптивных характеристиках некоторых векторнозначных обобщений интеграла Римана // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы международной конференции Воронежская зимняя математическая школа. Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2021. С. 221–224.

УДК 517.54

Конформные модули и квазиконформное отражение[1]

С. Р. Насыров (Казань, Россия)
email@mail.ru

Мы описываем задачи, связанные с внешними и внутренними конформными модулями четырехугольников. Отдельно рассматривается случай равнобедренных трапеций, для которых устанавливаются оценки коэффициента квазиконформного отражения относительно их границы.

Ключевые слова: конформный модуль, четырехсторонник, квазиконформное отражение, конформное отображение.

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2021-1393).

Conformal moduli and quasiconformal reflection[1]

S. R. Nasyrov (Kazan, Russia)
email@mail.ru

We describe some problems connected with the exterior an interior moduli of polygonal quadrilaterals. In particular, isosceles trapezoids are considered, and for their boundaries estimations of the coefficient of quasiconformal reflection are obtained.

Keywords: conformal module, quadrilateral, quasiconformal reflection, conformal mapping.

Acknowledgements: this work was supported by the development program of the Volga Region Mathematical Center (agreement no. 075-02-2021-1393).

Четырехсторонником $\boldsymbol{Q} = (Q; z_1, z_2, z_3, z_4)$ называется жорданова область Q на сфере Римана с четырьмя отмеченными точками z_1, z_2, z_3 и z_4 на ее границе; будем нумеровать z_j в том порядке, как они располагаются на границе области при ее положительном обходе.

Одной из основных геометрических характеристик четырехсторонника $\boldsymbol{Q}$ является его *конформный модуль*. Имеется много эквивалентных определений этого понятия. Например, если f — конформное отображение Q на прямоугольник $[0,1]\times[0,h], h>0$, такое что точки z_1, z_2, z_3 и z_4 переходят в 0, 1, $1+ih$ и ih, то h определено единственным образом и называется конформным модулем $\boldsymbol{Q}$. В этом случае мы пишем

$$h = \operatorname{Mod}(\boldsymbol{Q}).$$

Другой способ определения модуля состоит в использовании понятия экстремальной длины $\lambda(\Gamma)$ семейства кривых Γ. Если Γ — семейство кривых в области Q, соединяющих стороны z_1z_2 и z_3z_4 четырехсторонника $\boldsymbol{Q}$, то $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{Q}) = \lambda(\Gamma)$. Если же мы рассмотрим семейство Γ_1 кривых, соединяющих стороны z_2z_3 и z_1z_4 в Q, то $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{Q}) = 1/\lambda(\Gamma_1)$. Наконец,

$$\mathrm{Mod}(\boldsymbol{Q}) = \left(\inf_u \iint_Q |\nabla u|^2 dxdy\right)^{-1}$$

где инфимум берется по всем гладким функциям u in Q, непрерывным в $\overline{Q}$, которые равны 0 на граничной дуге z_1z_2 и 1 на дуге z_3z_4; хорошо известно, что этот инфимум на самом деле является минимумом и достигается на гармонической функции.

Предположим, что Q — ограниченная жорданова область в $\mathbb{C}$, $L = \partial Q$ и z_1, z_2, z_3, z_4 — некоторые точки на L, удовлетворяющие описанным выше требованиям. Рассмотрим четырехсторонник $\boldsymbol{Q} = (Q; z_1, z_2, z_3, z_4)$. Тогда величина $\mathrm{Mod}(Q; z_1, z_2, z_3, z_4)$ называется *внутренним модулем.* Мы также можем рассмотреть четырехсторонник $\boldsymbol{Q}^c := (Q^c; z_4, z_3, z_2, z_1)$, где Q^c — это дополнение Q до сферы Римана. В этом случае $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{Q}^c)$ называется *внешним модулем.*

Конформные модули играют важную роль в геометрической теории функций и ее приложений. Мы анализируем внутренние и внешние модули, их отношение и применяем полученные результаты в теории квазиконформных отображений. Заметим, что одно из известных определений квазиконформных отображений, так называемое геометрическое определение, использует конформные модули. Сохраняющий ориентацию гомеоморфизм сферы Римана $\overline{\mathbb{C}}$ называется K-квазиконформным ($K \geq 1$), если он удовлетворяет условию: конформные подули квазиинвариантны при таком отображении, т. е. если $\boldsymbol{Q} = (Q; z_1, z_2, z_3, z_4)$ – произвольный четырехсторонник и $f(\boldsymbol{Q}) = (f(Q); f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4))$, то

$$K^{-1}\mathrm{Mod}(\boldsymbol{Q}) \leq \mathrm{Mod}(f(\boldsymbol{Q})) \leq K\mathrm{Mod}(\boldsymbol{Q}).$$

Важным является понятие квазиокружности. Напомним, что замкнутая жорданова кривая L на сфере Римана называется *квазиокружностью*, если она является образом окружности при некотором K-квазиконформном автоморфизме сферы Римана, при этом, она также называется K-квазокружностью. Важной задача состоит в определении для заданной кривой, является ли она квазиокружностью или нет, и если ответ положителен, то требуется найти минимально возможное значение K, которое мы обозначим через K_L. Проблема нахождения K_L является открытой даже для случая таких простых кривых L как границы длинных прямоугольников.

Заметим, что Альфорс дал следующую геометрическую характеризацию квазиокружностей. Если L — замкнутая жорданова кривая на плоскости и существует константа $C \geq 0$ такая, что для любых трех точек z_1, z_2 и z_3 на L таких, что z_3 лежит на поддуге L меньшего диаметра с концами в точках z_1 и z_2, выполняется неравенство

$$|z_1 - z_3| + |z_2 - z_3| \leq C|z_1 - z_2|,$$

то L является K-квазиокружностью, где K зависит только от C. Обратно, если L является K-квазиокружностью, то для каждой подобной тройки точек на L это неравенство имеет место с C. завясящим только от K.

Если L — квазиокружность, то существует квазиконформное отражение относительно L, т. е. меняющий ориентацию квазиконформный автоморфизм g сферы Римана, который оставляет на месте каждую точку L, отображает ограниченную компоненту дополнения L на неограниченную и наоборот. Наряду с проблемой нахождения K_L имеемся другая важная задача — для заданной квазиокружности L найти или оценить минимальный коэффициент квазиконформности среди всех отражений g относительно L; обозначим этот коэффициент через QR_L. Это очень трудная проблема даже для полигональных кривых, она исследовалась в работах Р. Кюнау (см. [3], [1, с. 525-531]).

Приведем некоторые результаты, касающиеся квазиконформного отражения относительно полигональных кривых. Так как каждая такая кривая L в $\mathbb{C}$ определяет свою внутренность $\operatorname{int}(L)$ единственным образом, мы будем также говорить, что QR_L является коэффициентом для $\operatorname{int}(L)$. Если существует окружность, вписанная в полигон L, то $QR_L = 2/\alpha - 1$, где $\pi\alpha$ – это наименьший из внутренних углов L. В частности, для треугольников проблема нахождения QR_L решена. Для четырехугольников проблема открыта даже для случая прямоугольников. Значение QR_L известно только для прямоугольников $[0, a] \times [0, 1]$, близких к квадрату ([5], см. также [1,2]): если $1 \leq a < 1.037$, то $QR_L = 3$. Для достаточно длинных прямоугольников ($a > 2.76$) известно, что $QR_L > 3$. Более того, для любого $a > 1$ в [5] доказана оценка

$$\frac{\pi}{4}\, a < QR_L < \pi a.$$

Величина QR_L тесно связана с величиной

$$M_L := \sup \frac{\operatorname{Mod}(\boldsymbol{Q})}{\operatorname{Mod}(\boldsymbol{Q}^c)}$$

где $\boldsymbol{Q} = (Q; z_1, z_2, z_3, z_4)$, $\partial Q = L$ и супремум берется по всем четверкам точек (z_1, z_2, z_3, z_4) на L. Как заметил Кюнау [4],

$$QR_L \geq M_L,$$

таким образом, каждая нижняя оценка для M_L дает также нижнюю оценку для QR_L.

Мы исследуем задачу оценивания величин M_L и QR_L для равнобедренных трапеций. С помощью формулы Кристоффеля-Шварца и ее обобщений мы строим конформные отображения верхней полуплоскости на внутренность и внешность кривой L. Сравнение внутреннего и внешнего модуля для различных четверок точек z_1, z_2, z_3, $z_4 \in L$ позволяет получить нижнюю оценку для M_L и, следовательно, для QR_L.

Кроме того, используя достаточно простые методы, мы получаем оценки для QR_L и M_L в случае равнобедренных трапецеидальных ломаных L высоты 1 в терминах длин их сторон и углов.

Теорема. *Для каждой равнобедренной трапецеидальной ломаной L с острым углом $\pi\alpha$ и длинами оснований c и d, $c \leq d$, справедлива оценка*

$$M_L \geq \begin{cases} g(\lambda_0)(1 + C(\alpha))d, & \text{если } \frac{c}{d} \geq \lambda_0, \\ g(\lambda)(1 + C(\alpha))d, & \text{если } \frac{c}{d} < \lambda_0. \end{cases}$$

Здесь $g(\lambda) = \lambda \mathcal{K}\left(\sqrt{1-\lambda^2}\right)/\mathcal{K}(\lambda)$, $\mathcal{K}(\lambda)$ — это полный эллиптический интеграл первого рода, $\lambda_0 = 0.7373921\ldots$ — единственная точка минимума функции g на $(0,1)$, $g(\lambda_0) = 0.708434...$ и

$$C(\alpha) = \left(\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\pi\alpha)/4} - \operatorname{tg}(\pi\alpha)/2\right)^2, \quad 0 < \alpha \leq 1/2.$$

Кроме того, с использованием свойств строго звездообразных кривых можно получить оценку сверху для QR_L.

Данная работа основана на результатах совместных исследований с М. Вуориненом и Т. Сугавой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Kruskal S.* Quasiconformal Extensions and Reflections // Handbook of Complex Analysis: Geometric Function Theory, Vol. 2. Amsterdam: Elsevier, NorthHolland, 2005. P. 507–553.

[2] *Kühnau R.* The conformal module of quadrilaterals and of rings // Handbook of Complex Analysis: Geometric Function Theory, Vol. 2. Amsterdam: Elsevier, NorthHolland, 2005. P. 99–129.

[3] *Kühnau R.* Möglichst konforme Spiegelung an einer Jordankurve // Jahresber. d. Deutschen Math. 1988. Ver. 90. S. 90–109.

[4] *Kühnau R.* Drei Funktionale eines Quasikreises // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 2000. Vol. 25. P. 413–415.

[5] *Werner S.* Spiegelungskoeffizient und Fredholmscher Eigenwert für gewisse Polygone // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 1997. Vol. 22. P. 165–186.

УДК 517.53

Неравенства для первой и второй производных алгебраического многочлена на эллипсе[1]

Т. М. Никифорова (Екатеринбург, Россия)
t.m.nikiforova@yandex.ru

Доказана теорема о сохранении неравенств между функциями специального вида при дифференцировании на эллипсе. В частности, получены обобщения неравенств Даффина-Шеффера и Виденского для первой и второй производных алгебраического многочлена на эллипсе.

Ключевые слова: многочлен, производная, эллипс, мажоранта, неравенство Бернштейна, неравенство Виденского, неравенство Даффина-Шеффера.

Благодарности: работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российскои Федерации (номер соглашения 075-02-2021-1383).

Inequalities for the first and second derivatives of algebraic polynomials on an ellipse[1]

T. M. Nikforova (Yekaterinburg, Russia)
t.m.nikiforova@yandex.ru

We prove a theorem on the preservation of inequalities between functions of a special form after differentiation on an ellipse. In particular, we obtain generalizations of the Duffin-Schaeffer inequality and the Vidensky inequality for the first and second derivatives of algebraic polynomials to an ellipse.

Keywords: polynomial, derivative, ellipse, majorant, Bernstein inequality, Duffin-Schaeffer inequality, Vidensky inequality.

Acknowledgements: the work was performed as part of the research conducted in the Ural Mathematical Center with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement number 075-02-2021-1383).

Введение

Знаменита следующая теорема, называемая неравенством Бернштейна:

Теорема 1. *Пусть τ_n — тригонометрический полином степени n с комплексными коэффициентами, и*

$$|\tau_n(t)| \leq 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Тогда

$$|\tau_n'(t)| \leq n, \quad t \in \mathbb{R}.$$

В 1912 году С. Н. Бернштейн [1] получил неравенство для вещественных чётных и нечётных тригонометрических полиномов с константой n, значит, в общем случае с константой $2n$. Вскоре Э. Ландау обнаружил, как получить из результата Бернштейна неравенство с константой n. Позднее было получено большое количество различных доказательств теоремы 1. Одно из наиболее общих принадлежит М. Риссу [2].

Из этой теоремы легко получается следующее утверждение. Пусть алгебраический многочлен p_n степени n с комплексными коэффициентами удовлетворяет условию

$$|p_n(x)| \leq 1 = \left| T_n(x) + \frac{i}{n}\sqrt{1-x^2}T_n'(x) \right|, \quad x \in (-1,1),$$

где $T_n(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n}{2}$ есть многочлен Чебышёва первого рода. Тогда на $(-1,1)$ верно неравенство

$$|p_n'(x)| \leq \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} = \left| T_n'(x) + \left(\frac{i}{n}\sqrt{1-x^2}T_n'(x) \right)' \right|. \tag{1}$$

Этот результат также называют неравенством Бернштейна.

В 1938 году Р. Даффин и А. Шеффер [3] упростили доказательство неравенства Маркова для многочленов на отрезке. Важным в их доказательстве является обобщение неравенства (1) на случай старших производных. А именно, если многочлен p_n удовлетворяет условию теоремы 1, тогда для $k = 1, \ldots, n$ выполняется неравенство

$$|p_n^{(k)}(x)| \leq \left| T_n^{(k)}(x) + \left(\frac{i}{n}\sqrt{1-x^2}T_n'(x) \right)^{(k)} \right|, \quad x \in (-1,1).$$

Этот результат называют неравенством Даффина-Шеффера.

В 1951 году В. С. Виденский [4] ввёл мажоранты вида $K_n(x) + i\sqrt{1-x^2}L_{n-1}(x)$, где K_n и L_{n-1} — алгебраические многочлены степеней n и $n-1$ соответственно, причём все нули K_n и L_{n-1} лежат на $[-1,1]$ и взаимно чередуются. Виденский доказал следующее обобщение неравенства Даффина-Шеффера.

Теорема 2. *Пусть многочлен p_n степени n удовлетворяет неравенству*

$$|p_n(x)| \leq |K_n(x) + i\sqrt{1-x^2}L_{n-1}(x)|, \quad x \in (-1,1).$$

Тогда для $x \in (-1,1),\ k = 1, \ldots, n$

$$|p_n^{(k)}(x)| \leq \left| K_n^{(k)}(x) + i\left(\sqrt{1-x^2}L_{n-1}(x)\right)^{(k)} \right|.$$

Получим обобщение неравенств Даффина-Шеффера и Виденского для первой и второй производных алгебраического многочлена на эллипсе.

Обозначения

Рассмотрим функцию Жуковского

$$z = G(w) = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right).$$

Пусть

$$E_r = \left\{ z = \frac{1/r + r}{2}\cos t - i\frac{1/r - r}{2}\sin t, \quad t \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Заметим, что $G(rw),\ G(w/r) \in E_r,\ |w| = 1$.

Обозначим как $h(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$ обратную к функции Жуковского. Её непрерывные однозначные ветви отображают E_r на окружности $|z| = r$ и $|z| = 1/r$ в зависимости от выбора ветви $\sqrt{z^2-1}$. Выберем ветвь $\sqrt{z^2-1}$ так, чтобы функция h отображала E_r на $|z| = r$.

Рассмотрим функции вида

$$f_n(G(rw)) = \frac{Q_{2n}(w)}{w^n}, \quad |w| = 1 \quad (G(rw) \in E_r),$$

где Q_{2n} — алгебраический многочлен степени $2n$. В частности, в таком виде представимы

- алгебраические многочлены степени n на эллипсе E_r;
- функции вида $K_n(z) + i\sqrt{z^2-1}L_{n-1}(z)$, где K_n и L_{n-1} — алгебраические многочлены на E_r.

Теорема

Теорема 3. *Пусть*

$$M_n(G(rw)) = \frac{Q^M(w)}{w^n}, \quad |w| = 1,$$

где Q^M — алгебраический многочлен степени $2n$, все нули которого лежат в открытом единичном круге. Если

$$|p_n(z)| \le |M_n(z)|, \quad z \in E_r,$$

то для $k = 1,\, 2$

$$|p_n^{(k)}(z)| \le |M_n^{(k)}(z)|, \quad z \in E_r.$$

Нетрудно убедиться, что теорема обобщает неравенств Даффина-Шеффера для первой и второй производных на эллипсе. Пусть T_n — многочлен Чебышёва первого рода с единичной равномерной нормой на E_r, и

$$M_n(z) = \frac{G(r^n)}{r^n}\left(T_n(z) + \frac{1}{n}\sqrt{z^2-1}\, T_n'(z)\right), \quad z \in E_r.$$

Несложно доказать, что $M_n(G(rw)) = w^n = \frac{w^{2n}}{w^n}$. Тогда, по теореме, если алгебраический многочлен p_n удовлетворяет условию $|p_n(z)| \le 1,\ z \in E_r$, то

$$|p_n^{(k)}(z)| \le |M_n^{(k)}(z)|, \quad k = 1,\ 2.$$

Теперь покажем, что теорема обобщает неравенство Виденского на случай эллипса для первой и второй производных.

Рассмотрим функцию

$$f_n(z) = K_n(z) + i\sqrt{z^2-1}L_{n-1}(z), \quad z \in E_r,$$

где K_n, L_{n-1} — алгебраические многочлены точных степеней n и $n-1$ соответственно.

Используя свойства функции Жуковского, можно проверить, что

$$f_n(G(rw)) = \frac{1}{w^n}\sum_{j=0}^{2n} c_j w^j, \quad |w| = 1.$$

Кроме того, ясно, что

$$\tau(t) = f_n(G(re^{it})), \quad \operatorname{Re}\tau(t), \quad \operatorname{Im}\tau(t)$$

— тригонометрические полиномы порядка n. Пусть $\operatorname{Re}\tau_n(t)$ и $\operatorname{Im}\tau_n(t)$ имеют $2n$ различных нулей на периоде, которые взаимно чередуются. Отсюда, кривая $\tau_n(t)$ обходит начало координат n раз, когда t меняется от 0 до 2π. Положим $M_n(z) = f_n(z)$, если кривая $\tau_n(t)$ положительно ориентирована. Иначе пусть $M_n(z) = \overline{f_n(z)}$. Итак, кривая M_n совершает вокруг начала координат n оборотов. Используя принцип аргумента в плоскости w, несложно убедиться, что $M_n(G(rw))$ удовлетворяет условиям теоремы.

Далее нам понадобится понятие композиции Сегё многочленов. Для многочленов $h(z) =$

$= \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k h_k z^k$ и $g(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k g_k z^k$. она определяется как многочлен $[h * g](z) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k h_k g_k z^k$.

В 1922 году Г. Сегё [5] доказал следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть все нули многочлена h лежат в открытом единичном круге, и все нули g — в его замыкании. Тогда все нули $h * g$ лежат в открытом единичном круге.*

Теперь опишем доказательство следующей леммы, основной для доказательства нашей теоремы.

Лемма 1. *Пусть $f_n(G(rw)) = \frac{Q(w)}{w^n}$, $\quad |w| = 1$, где Q — алгебраический многочлен степени $2n$. Тогда справедливо представление*

$$f^{(k)}(z) = \frac{R(w)}{w^{n+k-1}(rw - 1/(rw))^{1+2(k-1)}}, \quad |w| = 1,\ z \in E_r,$$

где R — алгебраический многочлен степени $2n + 2(k-1)$. Кроме того, если все нули R лежат в открытом единичном круге, то $f_n^{(k+1)}(z) \neq 0, \quad z \in E_r$.

Первая часть леммы доказывается по индукции. Для доказательства второго утверждения нужно далее заметить, что $f_n^{(k+1)}(G(rw))$ является дробью, числитель которой в каждой точке единичной окружности равен композиции Сегё многочлена R с многочленом, все нули которого лежат внутри единичного круга. Значит, по теореме Сегё, верно второе утверждение леммы.

Перейдём к доказательству теоремы. Пусть

$$f_n(G(rw)) = \frac{Q^f(w)}{w^n}, \quad M_n(G(rw)) = \frac{Q^M(w)}{w^n}, \quad |w| = 1.$$

Если

$$|f_n(z)| \leq |M_n(z)|, \quad z \in E_r,$$

то

$$|Q^f(w)| \leq |Q^M(w)|, \quad |w| = 1.$$

Условие $Q^M(w) \neq 0,\ |w| = 1$ влечёт неравенство

$$|\alpha Q^f(w)| < |Q^M(w)|, \quad |\alpha| < 1,\ |w| = 1.$$

По теореме Руше, многочлены Q^M и $Q^M - \alpha Q^f$ имеют все нули в открытом единичном круге. Тогда, по лемме 1, $(M_n(z) - \alpha f_n(z))' \neq 0, \quad |\alpha| < 1,\ z \in E_r$. Теперь методом от противного несложно показать, что

$$|f_n'(z)| \leq |M_n'(z)|, \quad z \in E_r.$$

Рассмотрим случай второй производной. Легко проверить, что

$$M_n'(G(rw)) = \frac{2[Q^M * D_{2n}](w)}{w^n(rw - 1/(rw))},$$

где $D_{2n}(w) = n(w+1)^{2n-1}(w-1)$.

По теореме Сегё, многочлен $[Q^M * D_{2n}]$ имеет все нули в открытом единичном круге. Мы оказались в условиях случая первой производной. Теми же рассуждениями получаем, что

$$|f_n''(z)| \leq |M_n''(z)|. \quad \square$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Bernstein S. N.* Sur l'ordre de la mailleure approximation des fonctions continues par des polynômes de degré donné // Mémoires de l'Académie royale de Belgique, 1912. Vol. 4, № 2.

[2] *Riesz M.* Eine trigonometrische Interpolationsformel und einige Ungleichungen für Polynome // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 1914. Vol. 23. P.354-–368.

[3] *Duffin R. J., Schaeffer A. C.* On some inequalities of S. Bernstein and W. Markoff for derivatives of polynomials // Bull. Amer. Math. Soc. 1938. Vol. 44, № 4. P. 289–297.

[4] *Виденский В. С.* Об оценках производных многочлена // Изв. АН СССР. Сер.матем. 1951. Т. 15, вып. 5. С. 401–420.

[5] *Szegö G.* Bemerkungen zu einem Satz von J. H. Grace über die Wurzeln algebraischer Gleichungen // Math. Z. 1922, Vol. 13. P. 28—55.

УДК 517.9

Матрицы Мальцева и фреймы[1]

С. Я. Новиков, В. В. Севостьянова (Самара, Россия)
nvks@ssau.ru, victoria.sevostyanova@gmail.com

В 1947 году опубликована заметка А. И. Мальцева, в которой он построил матрицу, строки которой, как векторы (вещественного) евклидова пространства, ортогональны и имеют единичную длину, а столбцы этой матрицы, как векторы, имеют одинаковые нормы. Такие матрицы мы называем *матрицами Мальцева.* Фактически, впервые был построен *равномерный жесткий* фрейм.

Каждый равномерный жесткий фрейм является ценным инструментом в создании эффективных вычислительных алгоритмов. Основой построения таких фреймов для $\mathbb{C}^d$ была матрица дискретного преобразования Фурье, в $\mathbb{R}^d$ первые конструкции равномерных жестких фреймов появились только в начале 21 века.

Ключевые слова: матрица, фрейм, спарк.

Благодарности: работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2021-1393).

Maltsev matrix and frames[1]

S. Ya. Novikov, V. V. Sevostyanova (Samara, Russia)
nvks@ssau.ru, victoria.sevostyanova@gmail.com

In 1947 A. I. Maltsev published an article, in which he constructed a matrix, the rows of which, as vectors of the Euclidean space, are orthogonal, and the columns have unit norms. Such matrices we called Maltsev matrices. In fact, a uniform tight frame was built.

A uniform tight frame is a valuable tool in creating efficient computational algorithms. The basis of the construction of such frames in $\mathbb{C}^d$ is the matrix of the discrete Fourier transform, and in $\mathbb{R}^d$ such constructions appeared only in the beginning of the 21 century.

Keywords: matrix, frame, spark.

Acknowledgements: the work performed under the development program of Volga Region Mathematical Center (agreement no. 075-02-2021-1393).

Пусть n и d обозначают натуральные числа, $n \geq d$. Фрейм в пространстве $\mathbb{R}^d$ — это полное семейство, состоящее из n векторов в d-мерном евклидовом пространстве, обобщающее понятие базиса, в определении нет требования линейной независимости векторов. Подробнее, семейство векторов $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ называется *фреймом* пространства $\mathbb{R}^d$ если существуют константы $0 < a \leq b < \infty$, такие, что для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$,

$$a\|\mathbf{x}\|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} |\langle \mathbf{x}, \varphi_j \rangle|^2 \leq b\|\mathbf{x}\|^2.$$

Числа a и b называются фреймовыми границами, они определены неоднозначно, обычно имеют в виду оптимальные границы, то есть минимум b и максимум a.

Для конечномерного пространства понятие фрейма эквивалентно полноте системы векторов, то есть $\mathrm{span}\{\varphi_j\}_{j=1}^n = \mathbb{R}^d$. Этот и другие хорошо известные факты о фреймах можно посмотреть в [1].

Оператор синтеза конечного набора векторов $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ из $\mathbb{R}^d$ определяется как $\mathbf{\Phi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$, $\mathbf{\Phi x} := \sum\limits_{j=1}^n \mathbf{x}(j)\varphi_j$, где $\mathbf{x}(j)$ обозначает j-ю координату $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Сопряженным к оператору синтеза является *оператор анализа* $\mathbf{\Phi}^* : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$, определяемый как $(\mathbf{\Phi}^*\mathbf{y})(j) = \langle \varphi_j, \mathbf{y} \rangle$ для $j = 1, \ldots, n$.

Композиция операторов анализа и синтеза определяет матрицу Грама $\mathbf{\Phi}^*\mathbf{\Phi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \times n$-матрицу, (j, j')-й элемент которой $(\mathbf{\Phi}^*\mathbf{\Phi})(j, j') = \langle \varphi_j, \varphi_{j'} \rangle$. Композиция этих операторов в другом порядке определяет *фреймовый оператор* $\mathbf{\Phi\Phi}^* : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $\mathbf{\Phi\Phi}^*\mathbf{y} = \sum\limits_{j=1}^n \langle \varphi_j, \mathbf{y} \rangle \varphi_j$.

Матричное представление оператора синтеза $\mathbf{\Phi}$ выглядит как $d \times n$-матрица, столбцами которой являются координаты векторов фрейма $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$. В частности, если фреймовые границы равны между собой, то фреймовый оператор представляется диагональной матрицей $\mathbf{\Phi\Phi}^* = a\,\mathbf{I}_{\mathbb{R}^d}$ с $a > 0$, и это представление позволяет получить весьма простое фреймовое представление вектора или сигнала:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{a}\mathbf{\Phi\Phi}^*\mathbf{x} = \frac{1}{a}\sum_{j=1}^n \langle \varphi_j, \mathbf{x} \rangle \varphi_j, \ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^d.$$

Такой фрейм называется *жестким* или *a-жестким*. 1-жесткий фрейм называют *фреймом Парсеваля*.

Особый интерес представляют жесткие фреймы, векторы которых имеют одинаковые нормы. Такие фреймы называются *равномерными*. Подробнее, фрейм $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ называется *равномерным*, если существует $c > 0$, такое, что $\|\varphi_j\|^2 = c, \ j = 1, \ldots, n$.

Если a-жесткий фрейм является равномерным, то между введенными выше величинами d, c и a существуют зависимости:

$$da = \mathrm{trace}(a\,\mathbf{I}_{\mathbb{R}^d}) = \mathrm{trace}(\mathbf{\Phi\Phi}^*) = \mathrm{trace}(\mathbf{\Phi}^*\mathbf{\Phi}) = \sum_{j=1}^n \|\varphi_j\|^2 = nc.$$

В частности, для фрейма Парсеваля имеем $d = nc$, поэтому равномерный фрейм Парсеваля имеет нормы ≤ 1.

Следующий результат М.А. Наймарка [2] оказался основой для численных конструкций фреймов.

Теорема 1. *Если* $\mathbf{\Phi} = \{\varphi_j\}_{j=1}^n$ *— фрейм Парсеваля в* $\mathbb{R}^d$, *то существует ортонормированный базис* $\{\mathbf{b}_j\}_{j=1}^n$ *пространства* $\mathbb{R}^n$ *такой что* $\varphi_j = \mathbf{P}_{\mathbb{R}^d}\mathbf{b}_j$ *для всех* j, *где* $\mathbf{P}_{\mathbb{R}^d}$ *обозначает ортогональный проектор из пространства* $\mathbb{R}^n$ *на* $\mathbb{R}^d$.

Обратное утверждение также справедливо и легко доказывается.

Теорема 1 обобщена в работе [3] на фреймы общего вида, которые оказались проекциями базисов Рисса. Проекции общих ортогональных систем, вообще говоря, неполных, рассмотрены в [4].

Из теоремы 1 следует, что если $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ — жесткий фрейм, то координаты векторов φ_j являются первыми d координатами некоторых векторов, которые образуют ортогональный базис пространства $\mathbb{R}^n$.

Следовательно, матрица с ортонормированными строками и столбцами одинаковой длины представляет собой равномерный жесткий фрейм.

В пространствах $\mathbb{C}^d$ стандартным источником равномерных жестких фреймов оказалась матрица дискретного преобразования Фурье, в пространствах $\mathbb{R}^d$ существование таких матриц было далеко не очевидным.

В 1947 году опубликована заметка А. И. Мальцева [5], в которой он, отвечая на вопрос, поставленный А. Н. Колмогоровым, построил $d \times n$-матрицу, строки которой, как векторы (вещественного) евклидова пространства, ортогональны и имеют единичную длину, а столбцы этой матрицы, как векторы, имеют одинаковую длину. Такие матрицы мы называем *матрицами Мальцева.* Фактически, впервые построен *равномерный* фрейм Парсеваля. Таким образом, матрицы Мальцева дают основание для следующего заключения: в каждом пространстве $\mathbb{R}^d$ существует и может быть конструктивно построен равномерный жесткий фрейм с n векторами для произвольного $n \geq d$.

Современные конструкции равномерных жестких фреймов в $\mathbb{R}^d$ стали появляться только в начале 21 века [6].

Матрицы Мальцева были построены на основе матриц Сильвестра-Уолша, которые образуют подмножество множества матриц Адамара.

Построение матрицы Мальцева было проведено в два этапа. На первом строилась матрица с ортогональными строками из чисел ± 1 и нулей, а на втором, не нарушая ортогональности строк, проводилась требуемая условиями задачи нормировка.

Подробный анализ матриц Мальцева и фреймов, которые с её помощью получаются, будет опубликован в "Известиях РАН. Серия математическая".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Christensen O.* An Introduction to Frames and Riesz. Boston : Birkhäuser, 2002. 440 p.

[2] *Наймарк М. А.* Спектральные функции симметрического оператора // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1940. Т. 4, № 3. С. 217–318.

[3] *Кашин Б. С., Куликова Т. Ю.* Замечание об описании фреймов общего вида // Матем. заметки. 2002. Т. 72, № 6. С. 941–945.

[4] *Новиков С. Я.* Бесселевы последовательности как проекции ортогональных систем // Матем. заметки. 2007. Т. 81, № 6. С. 893–903.

[5] *Мальцев А. И.* Замечание к работе А. Н. Колмогорова, А. А. Петрова и Ю. М. Смирнова “Одна формула Гаусса из теории наименьших квадратов” // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1947. Т. 11, № 6. С. 567–568.

[6] *Casazza P. G., Leon M.* Existence and construction of finite tight frames // J. Concr. Appl. Math. 2006. Vol. 4, iss. 3. P. 277–289.

УДК 517.5

Сравнение скорости сходимости стандартного чисто жадного алгоритма и чисто жадного алгоритма по паре словарей[1]

А. С. Орлова (Москва, Россия)

Anastasia-Orlova1@ya.ru

В данной работе сравниваются скорости сходимости стандартного чисто жадного алгоритма и его модификации — чисто жадного алгоритма по паре словарей. Показано, что чисто жадный алгоритм по паре словарей в некоторых случаях "быстрее", а в некоторых — "медленнее" чисто жадного алгоритма по каждому словарю в отдельности. Если сравнивать чисто жадный алгоритм по паре словарей и чисто жадный алгоритм по их объединению, то также реализуемы обе вышеописанные ситуации.

Ключевые слова: чисто жадный алгоритм, чисто жадный алгоритм по паре словарей, сходимость.

The convergence rate comparison of a standard pure greedy algorithm and a pure greedy algorithm over a pair of dictionaries[1]

A. S. Orlova (Moscow, Russia)

Anastasia-Orlova1@ya.ru

In this paper the convergence rates of a standard pure greedy algorithm and its modification, a pure greedy algorithm over a pair of dictionaries, are compared. It is shown that a pure greedy algorithm over a pair of dictionaries is in some cases "faster" and in some cases it is "slower" than a pure greedy algorithm over each dictionary separately. If we compare a pure greedy algorithm over a pair of dictionaries and a pure greedy algorithm over union of them, then similarly both situations described above are realizable.

Keywords: pure greedy algorithm, pure greedy algorithm over a pair of dictionaries, convergence.

Введение.

В случае ортогонального словаря чисто жадные разложения [1] в гильбертовом пространстве H являются обобщением разложения вектора в ряд Фурье. В общем случае чисто жадные разложения совпадают с орторекурсивными разложениями, если векторы словаря дополнительно выбираются на каждом шаге локально оптимальным образом. Более точно, для вектора $x \in H$ определим чисто жадное разложение по нормированному словарю D следующим образом. Индуктивно определим последовательность остатков $\{r_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, последовательность коэффициентов

$\{\hat{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ и последовательность элементов словаря $\{e_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$:

$$r_0(x) = x;$$
$$e_n(x) \in D: \quad |(r_{n-1}(x), e_n(x))| = \sup_{d \in D} |(r_{n-1}(x), d)|,$$
$$\hat{x}_n = (r_{n-1}(x), e_n(x)), \quad r_n(x) = r_{n-1}(x) - \hat{x}_n e_n(x), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Тогда чисто жадным разложением вектора x по словарю D называется ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n e_n(x)$.

Чисто жадные алгоритмы по паре словарей, в свою очередь, являются одним из многих обобщений [2] чисто жадных алгоритмов. Чисто жадное разложение вектора по паре словарей D_1 и D_2 определяется аналогично, но на нечётных шагах в качестве словаря берётся D_1, а на чётных — D_2.

Стандартный чисто жадный алгоритм и чисто жадный алгоритм по паре словарей.

Сравнивая чисто жадные алгоритмы по паре словарей и по каждому в отдельности, получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Существуют два ортонормированных словаря D_1 и D_2 и вектор $x \in \mathcal{A}_1(D_1) \cap \mathcal{A}_1(D_2)$ такие, что*
1) чисто жадный алгоритм по словарю D_1 и чисто жадный алгоритм по словарю D_2 сходятся за конечное число шагов,
2) чисто жадный алгоритм по паре словарей D_1 и D_2 не сходится за конечное число шагов.

Но за счёт того, что при разложении по паре словарей множество векторов, по которому происходит разложение, больше, чем в случае разложения по одному словарю, чисто жадный алгоритм по паре словарей может быть "быстрее", чем стандартный алгоритм.

Теорема 2. *Существуют два ортонормированных словаря D_1 и D_2 и вектор $x \in \mathcal{A}_1(D_1) \cap \mathcal{A}_1(D_2)$ такие, что*
1) чисто жадный алгоритм по словарю D_1 и чисто жадный алгоритм по словарю D_2 не сходятся за конечное число шагов,
2) чисто жадный алгоритм по паре словарей D_1 и D_2 сходится за конечное число шагов.

Стандартный чисто жадный алгоритм по объединению словарей и чисто жадный алгоритм по паре словарей.

Дополнительно к рассмотрению разложения по словарям D_1 и D_2 в отдельности сравним чисто жадный алгоритм по паре словарей D_1 и D_2 с чисто жадным алгоритмом по их объединению $D = D_1 \cup D_2$. В этом случае верен аналог Теоремы 1:

Теорема 3. *Существуют два ортонормированных словаря D_1 и D_2 и вектор $x \in \mathcal{A}_1(D_1) \cap \mathcal{A}_1(D_2)$ такие, что*
1) чисто жадный алгоритм по словарю $D = D_1 \cup D_2$ сходится за конечное число шагов,
2) чисто жадный алгоритм по паре словарей D_1 и D_2 не сходится за конечное число шагов.

Но, с другой стороны, некоторое ограничение, которое даёт разделение словаря $D = D_1 \cup D_2$ на два и проведение алгоритма по паре словарей, в некоторых случаях оказывается “полезным”.

Теорема 4. *Существуют два нормированных словаря D_1 и D_2 и вектор $x \in \mathcal{A}_1(D_1) \cap \mathcal{A}_1(D_2)$ такие, что*
1) существует реализация чисто жадного алгоритма по словарю $D = D_1 \cup D_2$, которая не сходится за конечное число шагов,
2) чисто жадный алгоритм по паре словарей D_1 и D_2 сходится за конечное число шагов.

Вывод.

Сравнивая стандартный чисто жадный алгоритм и чисто жадный алгоритм по паре словарей, можно сделать вывод о том, что алгоритм по паре словарей может быть “быстрее” классического, с другой стороны реализуема и обратная ситуация.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *De Vore R. A., Temlyakov V. N.* Some remarks on greedy algorithms // Adv. Comput. Math. 1996. Vol. 38, № 1. P. 173–187.

[2] *Temlyakov V.* Greedy Approximation (Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics). Cambridge : Cambridge University Press, 2011. 432 p.

УДК 517.538.3,517.518.453,517.518.457

О рядах Фурье по ортогональным полиномам Соболева[1]

Б. П. Осиленкер (Москва, Россия)

b_osilenker@mail.ru

Рассматриваются задачи о сходимости, суммируемости и мультипликаторах рядов Фурье по ортогональным континуально-дискретным полиномам Соболева.

Ключевые слова: полиномы Соболева, ряд Фурье-Соболева, сходимость рядов Фурье-Соболева, суммируемость рядов Фурье, мультипликаторы рядов Фурье, весовые пространства Соболева.

Fourier series in Sobolev orthogonal polynomials[1]

B. P. Osilenker (Moscow, Russia)

b_osilenker@mail.ru

Some problems of the convergence, summability and multipliers of the Fourier series in orthogonal continual-discrete Sobolev's polynomials have been considered.

Keywords: Sobolev's polynomials, convergence of the Fourier-Sobolev series, summability of the Fourier-Sobolev series, multipliers of the Fourier-Sobolev series, weighted Sobolev spaces.

Рассмотрим весовое пространство Соболева $W^2_\mu(\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_N))$, в котором задано скалярное произведение

$$(f, g)_W = \sum_{k=0}^{N} \int_{\mathbb{R}} f^{(k)}(x) g^{(k)}(x) d\mu_k(x), \tag{1}$$

для натурального числа N, $\mu_k (k = 0, 1, \dots, N)$ – положительные борелевские меры. На множестве всех полиномов $\mathbb{P}$ полином $h, \deg h \geq 1$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такой, что выполняется

$$(hf, g)_W = (f, hg)_W \; (p, q \in \mathbb{P}), \tag{2}$$

существует тогда и только тогда, когда каждая из мер $\mu_k (k = 1, 2, \dots, N)$ чисто точечна. Пусть

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \omega(x) dx + \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{N_k} M_{k,i} f^{(i)}(a_k) g^{(i)}(a_k), \tag{3}$$

где $\omega(x)$–весовая функция; $-1 \le a_k \le 1; M_{k,i} > 0, k = 1, 2, \ldots, m;$ $i = 0, 1, \ldots, N_k$.

Введем континуально–дискретные полиномы Соболева $\widehat{q}_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; $x \in [-1, 1]$, ортонормированные в скалярном произведении (3):

$$(\widehat{q}_n, \widehat{q}_m) = \delta_{n,m}, n, m = 0, 1, 2, \ldots$$

Обозначим через $\mathfrak{R}$ множество функций

$$\mathfrak{R} = \left\{ \begin{matrix} f,\ \int\limits_{-1}^{1} |f(x)|\omega(x)dx < \infty;\ f^{(i)}(a_k) \text{ - существуют} \\ -1 \le a_k \le 1 (i = 0, 1, 2, \ldots, N_k, k = 1, 2, \ldots, m) \end{matrix} \right\}.$$

Каждой функции $f \in \mathfrak{R}$ поставим в соответствие ряд Фурье-Соболева

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)\widehat{q}_k(x)\ (x \in [-1, 1]), c_k(f) = (f, \widehat{q}_k)\,(k = 0, 1, 2, \ldots). \quad (4)$$

Рассмотрим треугольную матрицу вещественных чисел

$$\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}, k = 0, 1, \ldots, n, n+1; \lambda_0^{(n)} = 1, \lambda_{n+1}^{(n)} = 0; n = 0, 1, 2, \ldots\}. \quad (5)$$

Каждой функции $f \in \mathfrak{R}$ по её ряду Фурье-Соболева (4) с помощью регулярной по Теплицу матрицы (5) поставим в соответствие последовательность Λ–средних

$$U_n(f; x; \Lambda) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{(n)} c_k(f)\widehat{q}_k(x) (n = 0, 1, 2, \ldots; x \in [-1, 1]).$$

Получены результаты в задаче о Λ–суммируемости рядов Фурье-Соболева, т.е. при каких условиях на элементы матрицы Λ и ортонормированную систему полиномов $\widehat{q}_n(x), n = 0, 1, 2, \ldots,$ почти всюду, равномерно и по норме континуально-дискретного пространства Соболева выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty} U_n(f; x; \Lambda) = f(x). \quad (6)$$

Рассмотрим последовательность вещественных чисел

$$\Phi = \{\phi_k,\ k = 0, 1, \ldots;\ \phi_0 = 1,\ \{\phi_k\} \in 1^{\infty}\}. \quad (7)$$

Для каждой функции $f \in \mathfrak{R}$ по её ряду Фурье-Соболева (4) введем T - линейное отображение (мультипликаторный оператор), задаваемое формулой

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)\widehat{q}_k(x) \Rightarrow T(f; x; \Phi) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k c_k(f)\widehat{q}_k(x) (x \in [-1, 1]).$$

Изучается следующая задача: найти условия на систему $\{\widehat{q}_n(x)\}$ и элементы мультипликаторной последовательности (7), при которых справедлива оценка нормы мультипликаторного оператора в континуально-дискретных пространствах Соболева. Полученные результаты предполагают условие квазивыпуклости последовательности Ф. Скалярное произведение (3) и соответствующие системы ортогональных полиномов играют важную роль во многих проблемах теории функций, функционального анализа, квантовой механики, математической физики, механики и вычислительной математики.

Рассмотрим задачу о предельных значениях $U_n(f;x;\Lambda)$.

Пусть N_k^* натуральное число, определяемое следующим образом

$$N_k^* = \begin{cases} N_k + 1, \text{ если } N_k \text{ - нечетно}, \\ N_k + 2, \text{ если } N_k \text{ - четно}, \end{cases}$$

и

$$w_N(x) = \prod_{k=1}^{m} (x - a_k)^{N_k^*}, \ N = \sum_{k=1}^{m} N_k^*.$$

Если выполняется условие (2), то полиномы $\widehat{q}_n(x)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\pi_{N+1}(x)\widehat{q}_n(x) = \sum_{j=0}^{N+1} d_{n+j,j}\widehat{q}_{n+j}(x) + \sum_{j=1}^{N+1} d_{n,j}\widehat{q}_{n-j}(x)$$
$$(n = 0, 1.2, \ldots; \widehat{q}_{-j}(x) = 0, j = 1, 2, \ldots; d_{n,j} = 0, n > j),$$

где $\pi_{N+1}(x) = \int\limits_0^x w_N(t)dt$.

Введем обозначение:

$$\varepsilon_m := (-1, 1) \setminus \cup_{s=1}^{m} \{a_s\}.$$

Справедливо следующее утверждение. Пусть для ортонормированной полиномиальной системы $\{\widehat{q}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ выполняются предположения:

(i)

$$|\widehat{q}_k(x)| \leq h(x)(k = 0, 1, \ldots), \text{ где } h(x) \text{ положительная, непрерывная функция;} \quad (8)$$

(ii)

$$\sum_{j=1}^{N+1} j \sum_{l=0}^{N+1} \sum_{s=0}^{n} \left(|d_{s+j,j}d_{s+j+l,l} - d_{s+j+l,j}d_{s+l,l}| + |d_{s+j,j}d_{s+j,l} - d_{s+j-l,j}d_{s,l}|\right) \leq$$

$$\leq C\ (n = 0, 1, \ldots). \quad (9)$$

и элементы матрицы (5) удовлетворяют условию

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)(n-k+1)}{n+1}[1 + \frac{n+1}{n-k+1}]|\Delta^2 \lambda_k^{(n)}| \leq C(n = 0, 1, \ldots), \qquad (10)$$

где $\Delta^2 \lambda_k^{(n)}$–вторые разности для $\lambda_k^{(n)}$.
Тогда для Λ–средних $U_n(f; x; \Lambda)$ ряда Фурье-Соболева (4) в каждой точке Лебега $x \in \varepsilon_m$ функции $f \in \mathfrak{R}$, удовлетворяющей

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|\omega(x)h(x)dx < \infty, \int_{-1}^{1} h(x)\omega(x)dx < \infty, \qquad (11)$$

имеет место равенство (6). Если, кроме того, выполняется

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left|\widehat{q}_j^{(i)}(a_s)\right| < \infty\ (i = 0, 1, \ldots, N_s;\ s = 1, 2, \ldots, m), \qquad (12)$$

то справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{l=0}^{n} \lambda_l^{(n)} c_l(f) \widehat{q}_l^{(i)}(a_k) = f^{(i)}(a_k)\ (i = 0, 1, \ldots, N_k, k = 1, 2, \ldots, m).$$

Для непрерывной на $[-1, 1]$ функции f равенство (6) выполняется равномерно на всех компактных подмножествах K из ε_m. Отметим, что средние Чезаро $(C, \alpha), \alpha > 0$, удовлетворяют условию (10).

Приведем пример системы континуально–дискретных полиномов Соболева–симметричные дискретные полиномы Гегенбауэра–Соболева. Рассмотрим линейное пространство со скалярным произведением

$$(f, g)_\alpha = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\omega_\alpha(x)dx + M\,[f(1)g(1) + f(-1)g(-1)] +$$
$$N\,[f'(1)g'(1) + f'(-1)g'(-1)]$$
$$(M \geq 0,\ N \geq 0),$$

где

$$\omega_\alpha(x) = \frac{\Gamma(2\alpha)}{2^{2\alpha+1}\Gamma^2(\alpha+1)}(1 - x^2)^\alpha\ \left(\alpha > -\frac{1}{2}\right).$$

Пусть $\left\{\widehat{B}_n^{(\alpha)}(x) \equiv \widehat{B}_n^{(\alpha)}(x; M, N)\right\}$ система симметричных ортонормированных многочленов Гегенбауэра-Соболева

$$\int_{-1}^{1} \widehat{B}_n^{(\alpha)}(x)\widehat{B}_m^{(\alpha)}(x)\omega_\alpha(x)dx + M\left[\widehat{B}_n^{(\alpha)}(1)\widehat{B}_m^{(\alpha)}(1) + \widehat{B}_n^{(\alpha)}(-1)\widehat{B}_m^{(\alpha)}(-1)\right] +$$
$$+N\left[\left\{\widehat{B}_n^{(\alpha)}(1)\right\}'\left\{\widehat{B}_m^{(\alpha)}(1)\right\}' + \left\{\widehat{B}_n^{(\alpha)}(-1)\right\}'\left\{\widehat{B}_m^{(\alpha)}(-1)\right\}'\right] = \delta_{n,m}\,(n, m \in \mathbb{Z}_+).$$

При $\alpha = 0$ получаем систему симметричных ортонормированных многочленов Лежандра–Соболева.

Полиномы $\widehat{B}_n^{(\alpha)}(x; M, N)$ при $M > 0$, $N > 0$ обладают рядом свойств, отличных от соответствующих свойств классических многочленов Гегенбауэра $\widehat{P}_n^{(\alpha)}(x)$ (ультрасферических), ортонормированных по весу $\omega_\alpha(x)$(случай $M = 0$, $N = 0$).
Можно показать, что полиномы $\widehat{B}_n^{(\alpha)}(x)$ удовлетворяют условиям (8), (9), (12), и для функции f выполняются (11), при этом

$$h_\alpha(x) = (1 - x^2)^{-\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}\right)}\ \left(-1 < x < 1;\ \alpha > -\frac{1}{2}\right).$$

УДК 517.9

Об одном достаточном условии субгармоничности[1]

Р. А. Осин (Москва, Россия)
roman.osin99@mail.ru

Определяются расположения небольшого количества узлов, при которых достаточным условием субгармоничности непрерывных функций является выполнение неравенства среднего в простейшей дискретной форме.

Ключевые слова: субгармонические функции, неравенство среднего, среднее арифметическое.

On the sufficient condition of subharmonicity[1]

R. A. Osin (Mocsow, Russia)
roman.osin99@mail.ru

Defines the locations of a small number of nodal points that are suitable for the sufficient condition of subharmonicity of continuous functions with the inequality of mean value in the simplest discrete form.

Keywords: subharmonic functions, inequality of mean value, arithmetic mean.

Пусть функция $u(z)$ непрерывна в области $G \subset \mathbb{R}^2$. Достаточным условием субгармоничности является выполнение во всех точках области $z_0 \in G$, при любом сколь угодно малом радиусе r окружности с центром в этой точке, неравенства среднего

$$u(z_0) \leqslant \frac{1}{2\pi r} \int\limits_{C(z_0,r)} u(z)\, dl.$$

М.А. Крейнес предложил [1] достаточное условие субгармоничности, в котором неравенство среднего имеет дискретный вид. Непрерывная в области G функция $u(z)$ является субгармонической, если в любой окрестности каждой точки $z_0 \in G$ найдется окружность $C(z_0, r)$ сколь угодно малого радиуса r, в которую вписан правильный n-угольник с вершинами $z_j, j = 1, ..., n$ и

$$u(z_0) \leqslant \frac{u(z_1) + u(z_2) + \ldots + u(z_n)}{n}. \tag{1}$$

т.е. значение функции в центре окружности не превосходит среднего арифметического значений функции в узлах z_j.

В работе заранее не предполагается расположение узлов в вершинах правильного многоугольника. Определяется, при каких расположениях узлов z_j на окружности неравенство среднего в форме (1) дает достаточное условие субгармоничности непрерывных функций. Для этого требуется наложить дополнительные ограничения на расположения узлов, которые установил Д.С. Теляковский [2].

Теорема 1. *Пусть функция $u(z)$ непрерывна в области G и для каждой точки $z_0 \in G$ найдется окружность $C(z_0, r)$ сколь угодно малого радиуса, а так же набор узлов $z_j, j = 1, ..., n$ на ней, для которых выполнено неравенство (1). Функция $u(z)$ является в G субгармоничной если*

а) при $n = 3, 4, 5$ узлы z_j расположены в вершинах правильного n-угольника;

б) при $n = 6$ узлы z_j расположены в вершинах двух правильных треугольников, повернутых друг относительно друга.

Получены примеры расположения $n \geqslant 7$ узлов на окружности, удовлетворяющие (1) и не совпадающие с вершинами правильного многоугольника.

Замечание. В теореме 1 можно отказаться от предположения о непрерывности функции $u(z)$ и заменить его условием суммируемости и непрерывности по направлениям как это было сделано в [3].

Автор выражает глубокую благодарность к.ф.-м.н Д.С. Теляковскому за постановку задачи, постоянное внимание к работе и, в особенности, за рекомендации по оформлению данных тезисов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Привалов И. И.* Субгармонические функции. Москва; Ленинград : ОНТИ НКТП СССР, 1937. 199 с.

[2] *Telyakovskii D.* On discrete form of the mean value inequality for subharmonic functions // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf., 2019. Series 1205 012057.

[3] *Теляковский Д. С.* О достаточном условии гармоничности функций двух переменных, удовлетворяющих разностному уравнению Лапласа // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22, № 4. С. 269–283.

УДК 517.51

Неравенство Колмогорова для положительной срезки второй производной функции на оси и неравенство для выпуклых функций на отрезке[1]

Н. С. Паюченко (Екатеринбург, Россия)
aueiyo@gmail.com

Пусть K_+ точная константа в неравенстве Колмогорова на оси между L_r-нормой функции, L_q-нормой производной и L_p-нормой положительной срезки второй производной, а $\overline{K}$ — точная константа в неравенстве Колмогорова с теми же нормами, но на отрезке. При этом неравенство на отрезке рассматривается по классу выпуклых функций, имеющих абсолютно непрерывную производную, которая обращается в ноль на левом конце отрезка. При условиях $1 \le q, r, p < \infty$ и $1/r + 1/p = 2/q$ доказано равенство $K_+ = \overline{K}$. При $q = 2, r = 1, p = \infty$ найдена точная константа $K_+ = \overline{K} = \sqrt{8/3}$.

Ключевые слова: неравенство Колмогорова, неравенства между нормами функции и ее производных, положительная срезка второй производной, точные константы.

Благодарности: исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-31-90124.

Kolmogorov-type inequality for a non negative part of the second derivative of the function on the real line and an inequality for convex functions on an interval[1]

N. S. Payuchenko (Yekaterinburg, Russia)
aueiyo@gmail.com

Let K_+ be the exact constant in the Kolmogorov-type inequality on the real line between L_r-norm of the function, L_q-norm of the first derivative and L_p-norm of the non negative part of the second derivative. Let $\overline{K}$ be the exact constant in the Kolmogorov-type inequality with the same norms on $[0, 1]$. The inequality on the interval is considered on the class of convex functions with absolutely continuous derivative which is vanishing at $x = 0$. The equality $K_+ = \overline{K}$ is proved under following conditions $1 \le q, r, p < \infty$ and $1/r + 1/p = 2/q$. If $q = 2, r = 1, p = \infty$ the exact constant $K_+ = \overline{K} = \sqrt{8/3}$ is founded.

Keywords: Kolmogorov inequality, inequalities between norms of function and its derivatives, non-negative part of the second derivative, exact constant.

Acknowledgements: the reported study was funded by RFBR, project number 20-31-90124.

Введение

Введем обозначения норм $\|y\|_{L_p(a,b)} = \left(\int\limits_a^b |y(x)|^p dx\right)^{1/p}$, $\|y\|_{L_\infty(a,b)} = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in(a,b)} |y(x)|$, и положительной срезки $y_+(x) = \max\{y(x), 0\}$ функции.

Неравенства вида

$$\|y^{(k)}\|_{L_q(\mathbb{R})} \le K\|y\|^{\alpha}_{L_r(\mathbb{R})}\|y^{(n)}\|^{\beta}_{L_p(\mathbb{R})} \tag{1}$$

и их обобщения изучаются более века. Один из фундаментальных результатов получил в 1939 г. А.Н.Колмогоровым [1]. Он нашел точную константу K для $q = p = r = \infty$ и всех значениях n и k, $1 \le k < n$.

В 1976 г. В.Н. Габушин [2] доказал следующий критерий существования конечной константы в неравенствах (1) и в неравенствах с положительной срезкой старшей производной.

Теорема 1 [В.Н. Габушин] *Пусть* $0 \le k < n$, $0 < q, r, p \le \infty$ *и* $q \ne r$, *если* $k = 0$. *Предположим, что все производные функции* $y \in L_r(\mathbb{R})$ *до порядка* $n-1$ *локально абсолютно непрерывны и* $\Omega(y^{(n)}) = y^{(n)}$ *или* $\Omega(y^{(n)}) = (y^{(n)})_+$. *Тогда неравенство*

$$\|y^{(k)}\|_{L_q(\mathbb{R})} \le K\|y\|^{\alpha}_{L_r(\mathbb{R})}\|\Omega(y^{(n)})\|^{\beta}_{L_p(\mathbb{R})}$$

справедливо с константой K, *не зависящей от* f, *тогда и только тогда, когда*

$$p \ge 1, \quad \alpha = \frac{k - 1/q + 1/r}{n - 1/p + 1/r}, \quad \beta = 1 - \alpha \quad и \quad \frac{n-k}{r} + \frac{k}{p} \ge \frac{n}{q}. \tag{2}$$

Обозначим через $\mathcal{W}(r,p)$ множество функций $y \in L_r(\mathbb{R})$, имеющих локально абсолютно непрерывную производную и таких, что положительная срезка второй производной $y''_+ = (y'')_+ \in L_p(\mathbb{R})$. Через $\mathcal{U}$ обозначим множество выпуклых на отрезке $[0,1]$ функций u, имеющих абсолютно непрерывную производную на $[0,1]$ и обладающих свойством $u'(0) = 0$. Для функций $u \in \mathcal{U}$ выполняется равенство $u'' = u''_+$.

Е.А. Зернышкина в 2006 г. [3] нашла точную константу $K_{2,2,2}$ в следующем неравенстве с положительной срезкой второй производной:

$$\|y'\|_{L_2(\mathbb{R})} \le K_{2,2,2}\sqrt{\|y\|_{L_2(\mathbb{R})}\|y''_+\|_{L_2(\mathbb{R})}}, \quad y \in \mathcal{W}(2,2).$$

Для получения этого результата Е.А. Зёрнышкина доказала равенство $K_{2,2,2} = \overline{K}_{2,2,2}$, где $\overline{K}_{2,2,2}$ — это точная константа в неравенстве

$$\|u'\|_{L_2(0,1)} \le \overline{K}_{2,2,2}\sqrt{\|u\|_{L_2(0,1)}\|u''\|_{L_2(0,1)}}, \quad u \in \mathcal{U}, \tag{3}$$

затем нашла $\overline{K}_{2,2,2}$ и экстремальные функции в (3).

Целью исследования является выяснение связи между точными константами $K_+ = K_{+,q,r,p}$ и $\overline{K} = \overline{K}_{q,r,p}$ в неравенствах

$$\|y'\|_{L_q(\mathbb{R})} \leq K_+ \sqrt{\|y\|_{L_r(\mathbb{R})} \|y''_+\|_{L_p(\mathbb{R})}}, \quad y \in \mathcal{W}(r,p),$$

$$\|u'\|_{L_q(0,1)} \leq \overline{K} \sqrt{\|u\|_{L_r(0,1)} \|u''\|_{L_p(0,1)}}, \quad u \in \mathcal{U}.$$

Основные результаты

Теорема 2. *Если показатели $q, r, p \in [1, \infty)$ удовлетворяют равенству*

$$1/r + 1/p = 2/q, \tag{4}$$

то $K_+ = \overline{K}$.

Отметим, что в условиях теоремы неравенство (2) $(n-k)/r + k/p \geq n/q$ из критерия В.Н. Габушина обращается в равенство (4).

Теорема 3. *Если $q = 2, r = 1, p = \infty$ то справедливо равенство*

$$K_+ = \overline{K} = \sqrt{8/3}.$$

В доказательстве используется аналог теоремы 2, после чего находится значение $\overline{K}_{2,1,\infty}$ и экстремальная функция на отрезке, что позволяет построить экстремальную последовательность функций для неравенства на оси.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Колмогоров А. Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интегрвале // Избр. тр. Математика, механика. Москва : Наука, 1985. С. 252–263.

[2] *Габушин В. Н.* Неравенства между производными в метриках L_p при $0 < p \leq \infty$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1976. Т. 40, № 4. С. 869–892.

[3] *Zernyshkina E. A.* Kolmogorov type inequality in L_2 on the real line with one-sided norm // East J. Approx. 2006. Т. 12, № 2. С. 127–150.

УДК 517.9

О преобразовании Ганкеля функций из классов Никольского – Бесселя[1]

С. С. Платонов (Петрозаводск, Россия)

ssplatonov@yandex.ru

Пусть функция f принадлежит функциональному классу Никольского – Бесселя $H^r_{p,\alpha}(\mathbb{R}_+)$, $1 \le p \le 2$, $r > 0$, $\alpha > -1/2$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, и пусть $\widehat{f}$ — преобразование Ганкеля функции f. Основным результатом работы является ответ на вопрос: при каких значениях параметра q функция $\widehat{f}$ содержится в весовом пространстве Лебега $L_{q,\alpha} = L_q(\mathbb{R}_+, x^{2\alpha+1}\,dx)$? Полученная теорема является аналогом классической теоремы Е. Титчмарша о преобразовании Фурье функций из классов Липшица $Lip(r, p; \mathbb{R})$ при $0 < r \le 1$.

Ключевые слова: пространства Никольского – Бесселя, преобразование Ганкеля, гармонический анализ Фурье – Бесселя, теорема Титчмарша.

On the Hankel transform of functions from Nikol'skii – Bessel classes[1]

S. S. Platonov (Petrozavodsk, Russia)

ssplatonov@yandex.ru

Let a function f belongs to the Nikol'skii – Bessel function class $H^r_{p,\alpha}(\mathbb{R}_+)$, $1 \le p \le 2$, $r > 0$, $\alpha > -1/2$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, and let $\widehat{f}$ be the Hankel transform of f. The main result of the work is the answer to the question: at what values of the parameter q the function $\widehat{f}$ belongs to the Lebesgue weight classes $L_{q,\alpha} = L_q(\mathbb{R}_+, x^{2\alpha+1}\,dx)$? The resulting theorem is an analogue of the classical E. Titchmarsh theorem for the Fourier transform of functions from the Lipschitz classes $Lip(r, p; \mathbb{R})$ with $0 < r \le 1$.

Keywords: Nikol'skii – Bessel spaces, Hankel transform, Fourier – Bessel harmonic analysis, Titchmarsh's theorem.

По определению, функция $f(x)$ на $\mathbb{R}$ принадлежит классу Липшица $Lip(r, p; \mathbb{R})$, $0 < r \le 1$, $p \ge 1$, если $f \in L_p(\mathbb{R})$ и

$$\|f(x - t) - f(x)\|_{L_p(\mathbb{R})} = O(t^r)$$

при $t \to 0$.

Известна следующая классическая теорема Е. Титчмарша (см. [1], Теорема 84):

Теорема 1. *Пусть $f(x) \in Lip(r, p; \mathbb{R})$, $1 < p \le 2$, $0 < r \le 1$, и $\widehat{f}(\lambda)$ — преобразование Фурье функции f. Тогда $\widehat{f}$ принадлежит классам Лебега $L_q(\mathbb{R})$ при*

$$\frac{p}{rp + p - 1} < q \le \frac{p}{p - 1}.$$

В настоящей работе получен аналог теоремы 1 для преобразования Ганкеля функций из классов Никольского – Бесселя $H^r_{p,\alpha} = H^r_{p,\alpha}(\mathbb{R}_+)$ на полуоси $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$.

Пусть $\alpha > -\frac{1}{2}$, $d\mu(x) = x^{2\alpha+1}\,dx$ — мера на $\mathbb{R}_+$, $1 \le p \le \infty$, $L_{p,\alpha} := L_p(\mathbb{R}_+, d\mu)$, $\|\cdot\|_{p,\alpha}$ — норма в банаховом пространстве $L_{p,\alpha}$, $\mathcal{B}_x := \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\alpha+1}{x}\frac{d}{dx}$ — дифференциальный оператор Бесселя. Для любой функции $f(x) \in C^{(2)}(\mathbb{R}_+)$ обобщенный сдвиг Бесселя $u(x,y) = T^y f(x)$ $(x, y \in \mathbb{R}_+)$ определяется как решение следующей задачи Коши:

$$\mathcal{B}_x u(x,y) = \mathcal{B}_y u(x,y), \quad u(x,0) = f(x), \quad u'_y(x,0) = 0.$$

В явном виде обобщенный сдвиг Бесселя задается формулой

$$T^y f(x) = u(x,y) = c_\alpha \int\limits_0^\pi f\left(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos\varphi}\right)(\sin\varphi)^{2\alpha}\,d\varphi, \qquad (1)$$

где $c_\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+1/2)}$. По формуле (1), оператор T^y продолжается до непрерывного оператора в пространстве $L_{p,\alpha}$, $1 \le p \le \infty$.

Для $f \in L_{p,\alpha}$ разности $\Delta^k_h f(x)$ порядка k $(k = 1, 2, 3, \dots)$с шагом $h > 0$ и модуль гладкости $\omega_k(f, \delta)_{p,\alpha}$ порядка k определяются формулами

$$\begin{aligned}
&\Delta^1_h f(x) = \Delta_h f(x) := f(x) - T^h f(x),\\
&\Delta^k_h f(x) := \Delta_h(\Delta^{k-1}_h f(x)), \quad k > 1;\\
&\omega_k(f, \delta)_{p,\alpha} := \sup_{0<h\le\delta} \|\Delta^k_h f\|_{p,\alpha}, \quad \delta > 0.
\end{aligned}$$

Пусть $r > 0$ — вещественное число, k — натуральное число, такое что $2k > r$.

Определение 1. *Функция $f(x)$ принадлежит пространству $H^r_{p,\alpha}$, $p \in [1, \infty]$, если $f \in L_{p,\alpha}$ и для некоторой постоянной $A_f > 0$ справедливо неравенство*

$$\omega_k(f; \delta)_{p,\alpha} \le A_f\,\delta^r, \qquad \delta > 0.$$

Можно доказать, что $H^r_{p,\alpha}$ не зависит от k (см. [2]). Также в статье [2] другие описания пространств $H^r_{p,\alpha}$. Пространства $H^r_{p,\alpha}$ являются аналогами классических функциональных классов Никольского $H^r_p(\mathbb{R})$ на $\mathbb{R}$ (см. [3]).

Пусть $j_\alpha(x) = 2^\alpha \Gamma(\alpha+1)\,x^{-\alpha}\,J_\alpha(x)$, где $J_\alpha(x)$ — функция Бесселя первого рода и $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

Для любой функции $f \in L_{1,\alpha}$ преобразование Ганкеля определяется формулой

$$\mathcal{F} : f(x) \mapsto \widehat{f}(\lambda) = \int\limits_0^\infty f(x)\, j_\alpha(\lambda x)\, x^{2\alpha+1}\, dx, \qquad \lambda \in \mathbb{R}_+.$$

Для всякого $p \in [1, +\infty)$ пусть $p' := \frac{p}{p-1}$. Если $f \in L_{p,\alpha}$, $1 < p \le 2$, то ее преобразование Гакеля $\widehat{f}(\lambda)$ определяется как предел в пространстве $L_{p',\alpha}$ последовательности функций

$$\widehat{f}_n(\lambda) := \int\limits_0^n f(x)\, j_\alpha(\lambda x)\, x^{2\alpha+1}\, dx,$$

при $n \to \infty$. Преобразование Ганкеля $\mathcal{F} : f(x) \mapsto \widehat{f}(\lambda)$ является линейным непрерывным оператором из банахова пространства $L_{p,\alpha}$ в банахово пространство $L_{p',\alpha}$.

Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $f \in H^r_{p,\alpha}$, $1 \le p \le 2$, $r > 0$, и пусть $\widehat{f}$ — преобразование Ганкеля функции f. Тогда $\widehat{f}$ принадлежит классам $L_{q,\alpha}$ при*

$$\frac{p}{rp/(2\alpha+2)+p-1} < q \le \frac{p}{p-1},$$

и границы $\frac{p}{rp/(2\alpha+2)+p-1}$ и $\frac{p}{p-1}$ в этом неравенстве точные, т. е. промежуток значений параметра q не может быть расширен.

Результаты работы частично опубликованы в [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. Москва : ОГИЗ, 1948. 480 с.

[2] *Платонов С. С.* Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полупрямой // Известия РАН. Серия математическая. 2007. Т. 71, № 5. С. 149–196.

[3] *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. Москва : Наука, 1977. 456 с.

[4] *Platonov S. S.* On the Hankel transform of functionf from Hikol'sky type classes // Integral Transforms and Special Functions. 2021. Т. 32, № 10. С. 823–838.

УДК 517.5

Интерполяционно-ортогональные всплески на основе нескольких масштабирующих функций[1]

Е. А. Плещева (Екатеринбург, Россия)
eplescheva@gmail.com

В работе рассматривается построение интерполяционно-ортогональных базисов кратномасштабного анализа (КМА) и соответствующих всплесков на основе нескольких масштабирующих функций. В отличие от классического случая, в данной статье рассматривается не один, а несколько базисов пространства $L^2(\mathbb{R})$, каждый из которых образован сдвигами и сжатиями n функций $\psi^s,\ s=1,\dots,n$. Такая система строится на основе введенного нами ранее n-раздельного КМА. В данной статье приводится способ модификации масок n-раздельных масштабирующих функций широкого класса таким образом, чтобы система сдвигов новых масштабирующих функций, оставаясь ортогональной, стали еще и интерполяционной.

Ключевые слова: ортогональный всплеск, интерполяционный всплеск, масштабирующая функция, базис, кратномасштабный анализ, маска масштабирующей функции, n-раздельный всплеск.

Interpolating-orthogonal wavelets based on several scaling functions[1]

E. A. Pleshcheva (Ekaterinburg, Russia)
eplescheva@gmail.com

The paper considers the construction of interpolating-orthogonal bases of multiresolution analysis (MRA) and corresponding wavelets based on several scaling functions. We consider several bases of the space $L^2(\mathbb{R})$, which are formed by shifts and compressions of n functions $\psi^s,\ s=1,\dots,n$. These systems of wavelets are based on the n-separate MRA, which we introduced earlier. This article provides a method for modifying masks of n-separate scaling functions of a wide class. The shifts of new scaling functions will be interpolating, while remaining orthogonal.

Keywords: orthogonal wavelet, interpolating wavelet, scaling function, basis, multiresolution analysis, mask of scaling function, n-separate wavelet.

Введение

Всплеск традиционно определяется как функция $\psi(x)$, такая, что система ее сдвигов и сжатий $\{\psi_{j,k}(x) := 2^{j/2}\psi(2^j x - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ образует ортонормированный базис пространства $L^2(\mathbb{R})$. Начиная с работ Малла [1], Мейера [2] построение базисов всплесков начиналось с построения системы вложенных подпространств V_j пространства $L^2(\mathbb{R})$, называемой *кратномасштабным анализом пространства* $L^2(\mathbb{R})$. Базис каждого из этих пространств образован сдвигами одной сжатой в 2^j раз масштабирующей функции $\{\varphi_{j,k}(x) := 2^{j/2}\varphi(2^j x - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Дополняют пространства V_j до V_{j+1} подпространства W_j, базисы которых образованы также сдвигами одной функции $\{\psi_{j,k}(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Базис всего пространства $L^2(\mathbb{R})$ образуют функции $\{\psi_{j,k}(x) := 2^{j/2}\psi(2^j x - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

Необходимыми и достаточными условиями того, что $\{\varphi_{j,k}(x) := 2^{j/2}\varphi(2^j x - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — ортонормированная система, а система $\{2^{-j/2}\varphi_{j,k}(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — интерполяционная, являются следующие 2 условия:

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\omega - k)|^2 = 1, \quad \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(\omega - k) = 1. \tag{1}$$

В работе [3] показано, как изменить масштабирующую функцию Мейера таким образом, чтобы получилась масштабирующая функция, порождающая не только ортогональную, но и интерполяционную систему сдвигов.

Для случая n масштабирующих функций построение базисов пространства $L^2(\mathbb{R})$ в статье [4] было введено следующее определение:

Определение 1. *Рассмотрим n последовательностей вложенных друг в друга замкнутых подпространств пространства $L^2(\mathbb{R})$*

$$\ldots \subset V_{-1}^n \subset V_0^1 \subset V_1^2 \subset V_2^3 \subset \cdots \subset V_{n-1}^n \subset V_n^1 \subset V_{n+1}^2 \subset \cdots, \tag{2}$$

$$\cdots \subset V_{-1}^1 \subset V_0^2 \subset V_1^3 \subset V_2^4 \subset \cdots \subset V_{n-1}^1 \subset V_n^2 \subset V_{n+1}^3 \subset \cdots \tag{3}$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\cdots \subset V_{-1}^{n-1} \subset V_0^n \subset V_1^1 \subset V_2^2 \subset \cdots \subset V_{n-1}^{n-1} \subset V_n^n \subset V_{n+1}^1 \subset \cdots \tag{4}$$

Назовем эту конструкцию n-раздельным кратномасштабным анализом (n-КМА) пространства $L^2(\mathbb{R})$, если она удовлетворяет следующим условиям:
а) $\overline{\cup_j V_{nj}^1} = \overline{\cup V_{nj}^2} = \cdots = \overline{\cup V_{nj}^n} = L^2(\mathbb{R})$;
б) $\cap_j V_{nj}^1 = \cap V_{nj}^2 = \cdots = \cap V_{nj}^n = \{0\}$;
в) $f(x) \in V_j^s \Leftrightarrow f(x + l/2^j) \in V_j^s \ \ \forall j, l \in \mathbb{Z},\ s = 1, 2, \ldots, n$;
г) $f(x) \in V_0^s \Leftrightarrow f(2^j x) \in V_j^s \ \ \forall j \in \mathbb{Z},\ s = 1, 2, \ldots, n$;
д) найдутся такие функции $\varphi^s(x)$, $s = 1, 2, \ldots, n$, что множества их сдвигов $\{\varphi^s(x + k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ образуют ортонормированные базисы пространств V_0^s.

В данной работе приведен способ модификации базисов n-раздельного КМА, такой, что сдвиги и сжатия новых n-раздельных масштабирующих функций образуют ортогональную и при этом интерполяционную систему.

Необходимые и достаточные условия интерполяционности и ортогональности

Условия вложения (2)–(4) выполняются при выполнении следующих равенств, называемых масштабирующими соотношениями:

$$\varphi^s(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} h_\nu^{s,p_s} \varphi_{1,\nu}^{p_s}(x),\ s = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

где $p_s = s+1,\ s = 1, 2, \ldots, n-1$, $p_n = 1$, и ряды $\sum\limits_{\nu\in\mathbb{Z}} h_\nu^{s,p_s}\varphi_{1,\nu}^{p_s}(x)$ сходятся в $L^2(\mathbb{R})$.

После преобразования Фурье равенства (5) примут вид:

$$\widehat{\varphi^s}(\omega) = m^{s,p_s}(\frac{\omega}{2})\widehat{\varphi^{p_s}}(\frac{\omega}{2}), s = 1, \ldots, n,$$

где маски $m^{s,p_s}(\omega)$ масштабирующих функций определяются следующей формулой:

$$m^{s,p_s}(\omega) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} h_\nu^{s,p_s} e^{2\pi i\nu\omega}, \quad s = 1, \ldots, n.$$

Для выполнения условий ортогональности и интерполяционности для функций $\varphi^s(x)$ должны выполняться условия (1). Тогда $m^{s,p_s}(\omega), s = 1, \ldots, n$, будут удовлетворять равенствам:

$$|m^{s,p_s}(\omega)|^2 + |m^{s,p_s}(\omega + \frac{1}{2})|^2 = 1, s = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

$$m^{s,p_s}(\omega) + m^{s,p_s}(\omega + \frac{1}{2}) = 1, s = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Пусть маски $m^{s,p_s}(\omega)$ удовлетворяют условиям ортогональности (6). Тогда 1-периодическая функция

$$m_I^{s,p_s}(\omega) = |m^{s,p_s}(\omega)|^2 + i\ sign(\sin 2\pi\omega)|m^{s,p_s}(\omega)m^{s,p_s}(\omega + \frac{1}{2})|$$

будет удовлетворять обоим условиям (6), (7).

Обозначим через $M_I^s(\omega)$ следующие произведения:

$$M_I^1(\omega) = m_I^{1,2}(\omega) \cdot m_I^{2,3}(\frac{\omega}{2}) \cdot \ldots \cdot m_I^{n,1}(\frac{\omega}{2^{n-1}}),$$

$$M_I^2(\omega) = m_I^{2,3}(\omega) \cdot m_I^{3,4}(\frac{\omega}{2}) \cdot \ldots \cdot m_I^{1,2}(\frac{\omega}{2^{n-1}}),$$

$$\ldots,$$

$$M_I^n(\omega) = m_I^{n,1}(\omega) \cdot m_I^{1,2}(\frac{\omega}{2}) \cdot \ldots \cdot m_I^{n-1,n}(\frac{\omega}{2^{n-1}}).$$

Тогда n-раздельные масштабирующие функции можно восстановить по их преобразованиям Фурье

$$\widehat{\varphi_I^s}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} M_I^s(\frac{\omega}{2^{nj}}), s = 1, \ldots, n. \tag{8}$$

Справедлива теорема:

Теорема 1. *Пусть для масок* $m^{s,p_s}(\omega), s = 1, \ldots, n$, *выполняются условия:*

$$|m^{s,p_s}(\omega)| \leq 1 - \Omega(\omega)$$

в некоторой окрестности нуля, где функция $\Omega(\omega)$ *такова, что ряд*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \Omega(\frac{\omega}{2^{nj}})$$

сходится, и при этом функции $\widehat{\varphi_I^s}(\omega) := \prod_{j=1}^{\infty} M_I^s(\frac{\omega}{2^{nj}}) \in L(\mathbb{R}) \bigcap L^2(\mathbb{R})$. *Пусть, кроме того,* $m^{s,p_s}(\omega), s = 1, \ldots, n$, *удовлетворяют условиям* (6) *и* $|m^{s,p_s}(\omega)| \geq C_0 > 0$ *при* $|\omega| \leq 1/4$. *Тогда при целых* j *и* $s = 1, \ldots, n$ *системы функций* $\{\varphi_{I,j,k}^s\}_{k \in \mathbb{Z}}$, *где* $\widehat{\varphi_I^s}$ *определены формулой* (8), *являются ортонормированными в пространстве* $L^2(\mathbb{R})$ *и интерполяционными на сетке* $\{x_{j,r} = r/2^j : r \in \mathbb{Z}\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Mallat Stephane G.* Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$ // Transactions of the American Mathematical Society. 1989. Vol. 315. P. 69—87.

[2] *Meyer Yves* Ondelettes et operateurs: Ondelettes // Paris : Hermann. 1990. 215 p.

[3] *Субботин Ю. Н., Черных Н. И.* Интерполяционно-ортогональные системы всплесков // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 3. С. 153–161.

[4] *Плещева Е. А.* Новое обобщение ортогональных базисов всплесков // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 2. С. 264–271.

УДК 517.518

Восстановление интегрируемых функций на p-ичных группах[1]

М. Г. Плотников, В. Е. Богачева, Ю. А. Плотникова, В. А. Савин (Москва, Вологда, Россия)
MGPlotnikov@gmail.com

Рассмотрена задача о восстановлении интегрируемых функций по их значениям на множествах малой меры. Построены восстанавливающих множества для классов суммируемых функций на p-ичных группах со степенной и логарифмической скоростью убывания мажоранты коэффициентов Фурье–Виленкина–Крестенсона.

Ключевые слова: p-ичные группы, восстановление функций, коэффициенты Фурье– Виленкина–Крестенсона.

Recovery of integrable functions on p-adic groups[1]

M. G. Plotnikov, V. E. Bogacheva, Ju. A. Plotnikova, V. A. Savin (Moscow, Vologda, Russia)
MGPlotnikov@gmail.com

The problem of recovering integrable functions by their values on sets of small measure is considered. Recovering sets are constructed for classes of summable functions on p-adic groups with a power and logarithmic decreasing rate of the majorant of the Fourier–Vilenkin-Chrestenson coefficients.

Keywords: p-adic groups, recovery of function, Fourier–Vilenkin–Chrestenson coefficients.

В работе рассматриваются вопросы о восстановлении суммируемых функций по их значениям на множествах малой меры. Зададимся следующим вопросом. Пусть имеется пространство с мерой (X, μ), а на нем — некоторый класс функций $\Lambda \subset L_\mu(X)$. Можно ли построить множество $H \subset X$ малой меры, обладающее тем свойством, что почти все значения произвольной функции $f \in \Lambda$ однозначно восстанавливаются по ее значениям на H? В случае положительного ответа сразу возникает второй вопрос: каким может быть процесс восстановления значений f на X по ее значениям на H?

Эта задача решалась в [1] для классов Зигмунда на одномерном торе $\mathbb{T}$. В той работе было введено понятие восстанавливающего множество, которое мы приводим здесь в более общем виде. Пусть f_H означает сужение функции f на множество H.

Определение. Пусть X — некоторое множество, а μ — σ-аддитивная мера на X. Для заданного $\delta > 0$ назовем множество $H \subset X$ *δ-восстанавливающим множеством* для некоторого класса $\Lambda \subset L_\mu(X)$, если $\mu H < \delta$ и отображение $\mathrm{Compr}\colon \Lambda \to L_\mu(H)$, $\mathrm{Compr}(f) = f\big|_H$, является инъективным.

Другими словами, H является δ-восстанавливающим множеством для класса Λ, если каждая функция $g \in L_\mu(H)$ не может быть продолжена до функции из класса Λ более чем одним способом.

Здесь мы представим ряд результатов о восстанавливающих множествах для случая, когда X — p-ичная группа $\mathbb{G}_p$ с мерой Хаара μ, а Λ — классы суммируемых на $\mathbb{G}_p$ функций с фиксированной скоростью убывания мажоранты коэффициентов Фурье–Виленкина–Крестенсона.

Если задано натуральное $p \geq 2$, то *p-ичная группа* $\mathbb{G} = \mathbb{G}_p$ есть множество последовательностей $g = (g_0, g_1, \ldots)$ с $g_k \in \{0, \ldots, p-1\}$, снабженное операцией покоординатного сложением $\operatorname{mod} p$. Наглядно $\mathbb{G}$ можно представлять (с точностью до счетного множества) как отрезок $[0,1]$, если рассмотреть отображение

$$\phi\colon \mathbb{G} \to [0,1], \qquad g = (g_0, g_1, \ldots) \overset{\phi}{\mapsto} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k}{p^{k+1}}.$$

Это отображение сюръективно и переводит каждое множество

$$\Delta_k^m := \{g \in \mathbb{G}_p\colon\ g_j = m_j,\ j = 0, \ldots, k-1\}, \quad m = \sum_{j=0}^{k-1} m_{k-1-j} p^j, \quad (1)$$

в замкнутый интервал $\left[\frac{m}{p^k}, \frac{m+1}{p^k}\right]$. Множества (1) называются *p-ичными интервалами* (ранга k) и образуют счетную базу топологии в $\mathbb{G}_p$. Отметим, что Δ_k^0 является подгруппой $\mathbb{G}_p$, а любой p-ичный интервал ранга k является смежным классом по этой подгруппе, т.е. $\Delta_k^m = g \oplus \Delta_k^0$ при подходящем выборе элемента $g \in \mathbb{G}_p$.

Сама группа $\mathbb{G}_p$ является компактной абелевой группой. Пусть μ — нормализованная мера Хаара на этой группе; если $A \subset \mathbb{G}_p$ — борелевское множество, то μA совпадает с мерой Лебега множества $\phi(A) \subset [0,1]$. Группу характеров $\mathbb{G}_p$ образуют *функции Виленкина–Крестенсона* VC_n, $n = 0, 1, \ldots$. В нумерации Пэли

$$VC_n(g) = \prod_{k=0}^{\infty} \exp\left(\frac{2\pi i g_k n_k}{p}\right), \quad n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k p^k, \quad n_k \in \{0, \ldots, p-1\}. \quad (2)$$

Если $p = 2$, то VC_n есть *функции Уолша*. Подробнее о p-ичных группах и функциях Виленкина–Крестенсона см., напр., в [2], [3], [4]).

Для заданного $\gamma > 0$ рассмотрим классы функций

$$L_{\mu,\gamma}(\mathbb{G}_p) := \left\{ f \in L_\mu(\mathbb{G}_p) \;\middle|\; a_n(f) = O(n^{-\gamma}),\ n \to \infty \right\},$$

$$L_{\mu,\ln^\gamma}(\mathbb{G}_p) := \left\{ f \in L_\mu(\mathbb{G}_p) \;\middle|\; a_n(f) = O(\ln^{-\gamma} n),\ n \to \infty \right\}.$$

Пусть $\mathbf{Q} = \{q(s)\}_{s=1}^\infty$ и $\mathbf{K} = \{k(s)\}_{s=1}^\infty$ — возрастающие последовательности натуральных чисел, причем $q(s) < k(s)$ для всех s. Для каждого натурального q рассмотрим множества

$$H^q(\mathbf{Q},\mathbf{K}) = \bigcup_{s=q}^{\infty} H_{q(s),k(s)}, \quad H_{q(s),k(s)} = \left\{ \Delta_{k(s)}^m :\ m = 0 \ (\mathrm{mod}\ p^{q(s)-k(s)}) \right\},$$

$\Delta_{k(s)}^m$ — p-ичные интервалы в нумерации из (1). Множества сходной структуры рассматривались, напр., в [5], [6], [7], [8], [9], [10].

Приведем ряд результатов о восстанавливающих множествах для классов $L_{\mu,\gamma}(\mathbb{G}_p)$ и $L_{\mu,\ln^\gamma}(\mathbb{G}_p)$.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{Q} = \{q(s)\}$, $\mathbf{K} = \{k(s)\}$,

$$q(s) := \big[as\big], \quad k(s) := [bs],$$

$[*]$ *означает целую часть* $*$. *Для того, чтобы для любого* $\delta > 0$ *нашлось натуральное* q *такое, что множество* $H^q(\mathbf{Q},\mathbf{K})$ *являлось бы* δ*-восстанавливающим множеством для класса* $L_{\mu,\gamma}(\mathbb{G}_p)$, *достаточно выполнения хотя бы одного из следующих двух условий:*

- $\gamma \geq 1$, $\quad b > \dfrac{1}{\ln p}$ *и* $0 < a < b$;
- $0 < \gamma < 1$, $\quad b > \dfrac{1}{\gamma \ln p}$ *и* $0 < a < b$.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{Q} = \{q(s)\}$ *и* $\mathbf{K} = \{k(s)\}$,

$$q(s) := \big[s^b\big], \quad k(s) := \big[s^b + a\cdot \ln s - d \cdot \ln(\ln(s))\big],$$

$$1 < a \ln 2 < b\gamma, \quad b > \frac{1}{\gamma}, \quad d \geq 0.$$

Тогда для заданного $\delta > 0$ *найдется множество вида* $H^q(\mathbf{Q},\mathbf{K})$, *являющееся* δ*-восстанавливающим множеством для класса* $L_{\mu,\ln^\gamma}(\mathbb{G}_p)$.

Естественный способ восстановить п.в. значения произвольной функции f из класса $L_{\mu,\gamma}(\mathbb{G}_p)$ или $L_{\mu,\ln^\gamma}(\mathbb{G}_p)$ по значениям f на соответствующем δ-восстанавливающем множестве выглядит так. (Разумеется, существуют и другие способы сделать это.)

Шаг 1. Восстановление среднего значения f на произвольном p-ичном интервале $g \oplus \Delta_r^0$ по ее значениям на $H^q(\mathbf{Q}, \mathbf{K})$ при помощи формулы

$$\overline{f}_{g\oplus\Delta_r^0} = \lim_{s\to\infty} \overline{f}_{(g\oplus\Delta_r^0)\cap H_{q(s),k(s)}}.$$

Шаг 2. Нахождение п.в. значений функции f по найденным значениям $f_{g\oplus\Delta_r^0}$ с помощью формулы

$$f\,(g) = \lim_{r\to\infty} \overline{f}_{g\oplus\Delta_r^0}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Плотников М. Г.* Задачи восстановления интегрируемых функций и тригонометрических рядов // Матем. сб. 2021. Т. 212, № 6. С. 109–125.

[2] *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша: теория и применение. М. : Наука, 1987. 344 с.

[3] *Schipp F., Wade W. R., Simon P.* Walsh Series. An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis. Budapest : Académiai Kiadó, 1987. 560 p.

[4] *Skvortsov V.* Henstock–Kurzweil type integrals in $\mathcal{P}$-adic harmonic analysis // Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis. 2004. T. 20, № 2. P. 207–224.

[5] *Shapiro V. L.* $U(\varepsilon)$-sets for Walsh series // Proc. Amer. Math. Soc. 1965. Vol. 16, № 5. P. 867–870.

[6] *Harris D. C.* Sets of uniqueness and closed subgroups in Vilenkin groups // Anal. Math. 1990. Vol. 16, № 2. P. 115–122.

[7] *Yoneda K.* Perfect sets of uniqueness on the group 2^ω // Canad. J. Math. 1982. Vol. 34, № 3. P. 759–764.

[8] *Плотников М. Г.* Кратные ряды Уолша и множества Зигмунда // Матем. заметки. 2014. Т. 95, вып. 5. С. 750–762.

[9] *Plotnikov M.* V-sets in the products of zero-dimensional compact abelian groups // European J. Math. 2019. Vol. 5, № 1. P. 223–240.

[10] *Plotnikov M.* On the Vilenkin-Chrestenson systems and their rearrangements // J. Math. Anal. Appl. 2020. Vol. 492, iss. 1. Art. 124391. 13 pp.

УДК 517.518.4

Уточнение оценок сумм синус-рядов с монотонными и косинус-рядов с выпуклыми коэффициентами[1]

А. Ю. Попов (Москва, Россия)
elena.alferova@gmail.com

Уточняются известные оценки сумм синус-рядов с монотонными коэффициентами и косинус-рядов с выпуклыми коэффициентами.

Ключевые слова: ряды по синусам и косинусам, монотонные и выпуклые коэффициенты.

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00584).

Refinement of estimates of sums of sine series with monotone coefficients and cosine series with convex coefficients[1]

A. Yu. Popov (Moscow, Russia)
elena.alferova@gmail.com

The refinement of Estimates of Sums of Sine Series with Monotone Coefficients and Cosine Series with Convex Coefficients is specified.

Keywords: sine series, monotone and convex coefficients.

Acknowledgements: this work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 20-01-00584).

Рассматриваются ряды

$$f(a;x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos(kx),\qquad g(b;x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin(kx),\tag{1}$$

последовательности коэффициентов которых $a=\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$, $b=\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ монотонно стремятся к нулю. Суммы всех таких рядов непрерывны на интервале $(0,2\pi)$. Класс всех последовательностей $b=\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, для которых $b_1>0$, $b_{k+1}\le b_k$ $(\forall k\in\mathbb{N})$, $\lim_{k\to\infty}b_k=0$, обозначим $\mathfrak{M}$. В 20-м веке был получен ряд результатов о поведении сумм рядов общего вида (1) с коэффициентами из $\mathfrak{M}$ и выпуклыми коэффициентами при $x\to 0$ [1–4]. В последние два десятилетия появились двусторонние оценки сумм синус-рядов (1) с точными константами [5–9]. Здесь уточняются некоторые неравенства из [5] и [7].

Теорема 1. *При любом $x \in (\pi/2, \pi)$ верна оценка сверху*

$$g(b;x) \le \frac{b_1}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{4}\right) \quad \forall b \in \mathfrak{M}. \tag{2}$$

Теорема 2. *При любом $q \in \mathbb{N}$, $q \ge 2$, на интервале $2\pi/(q+1) < x < 2\pi/q$ верна оценка снизу*

$$g(b;x) \ge -\frac{b_q}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{4}\right) \quad \forall b \in \mathfrak{M}. \tag{3}$$

В точках вида $\{2\pi/q \mid \; q \in \mathbb{N},\ q \ge 2\}$ сумма любого синус-ряда с монотонными коэффициентами неотрицательна.

Доказано, что оценки (2) и (3) оптимальны на всюду плотном множестве.

Положим $m(x) = [\pi/x]$, $0 < x < \pi$. В [5] было доказано двойное неравенство

$$-\frac{b_1}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{4}\right) \le g(b;x) < 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=1}^{m(x)} k b_k \quad \forall x \in (0,\pi),\ \forall b \in \mathfrak{M}. \tag{4}$$

Теорема 1 уточняет верхнюю оценку (4) на $(\pi/2, \pi)$, а теорема 2 оценку снизу в (4). В [7] было замечено, что при $x \in (0, \pi/2]$ в правой части (4) можно заменить множитель k в сумме на $\min(k, m(x)+1-k)$. Этот результат допускает дальнейшее уточнение.

Теорема 3. *Для суммы синус-ряда (1) верны оценки*

$$g(b;x) < 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left(b_1 + \frac{\sqrt{3}b_2}{2}\right), \;\; g(b;x) \le \sin x\left(b_1 + \frac{2b_2}{\sqrt{3}}\right), \;\; x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$g(b;x) \le \sin x \sum_{k=1}^{m(x)} \min\left(k, m(x)+1-k\right) b_k, \;\; x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right].$$

В [1] была получена оценка для суммы косинус-ряда (1), если последовательность $a = \{a_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ выпукла, то есть : $\{\Delta a_k\} = \{a_k - a_{k+1}\} \in \mathfrak{M} \Leftrightarrow a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2} \ge 0\ \forall k \in \mathbb{N}$.

Было выведено неравенство

$$f(x) \le C \sum_{k=0}^{m(x)} \left(k + \frac{1}{2}\right)\Delta a_k,$$

где C — некоторая постоянная (насколько известно автору, значение C не указывалось). В [8] доказано, что при $x \in (0, \pi/2]$ можно положить $C = 1$.

Более точно, получены следующие результаты.

Теорема 4. *Для суммы произвольного косинус-ряда (1) с выпуклой последовательностью коэффициентов $a = \{a_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ верна оценка сверху*

$$f(x) \le \sum_{k=0}^{m(x)-1} \left(k + \frac{1}{2}\right)(a_k - a_{k+1}) \qquad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2}]. \tag{4.1}$$

При $x \in [\pi/3, \pi/2]$ верна более сильная оценка

$$f(x) \le \frac{a_0 - a_3}{2} + (a_1 - a_2)\cos x. \tag{4.2}$$

Замечание 1. Оценка (4.2) действительно сильнее, чем (4.1) при $x \in [\pi/3, \pi/2)$. Правая часть (4.1) при этих x (тогда верхний предел суммирования равен 1) имеет вид $(a_0 - a_1)/2 + 3(a_1 - a_2)/2$. Правая же часть (4.2) меньше

$$\frac{a_0 - a_3}{2} + \frac{a_1 - a_2}{2} = \frac{a_0 - a_1}{2} + (a_1 - a_2) + \frac{a_2 - a_3}{2} \le \frac{a_0 - a_1}{2} + \frac{3}{2}(a_1 - a_2).$$

Совпадение оценок (4.1) и (4.2) на интервале $(\pi/3, \pi/2)$ возможно только в «вырожденном» случае $f(x) \equiv a_0/2$.

На значения $x \in (\pi/2, \pi]$ неравенство (4.1) не переносится: в некоторых случаях неравенство $f(x) \le (a_0 - a_1)/2$ не имеет места. Требуется либо увеличить множитель перед разностью $(a_0 - a_1)$, либо добавить второе слагаемое.

Теорема 5. *При любом $x \in (0, \pi]$ верно неравенство*

$$f(x) \le \frac{a_0 - a_1}{2} + (a_1 - a_2)\operatorname{ctg}^2\left(\frac{x}{2}\right), \tag{5.1}$$

которое обращается в равенство на множестве точек

$$\{x_{n,\nu} = \frac{\pi(2\nu + 1)}{n} | \quad \nu, n \in \mathbb{N}, \quad 1 \le \nu \le \frac{n-1}{2}\}, \tag{5.2}$$

если в качестве f взять n-е ядро Фейера

$$F_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(1 - \frac{k}{n}\right)\cos(kx) \equiv \frac{1}{2n}\left(\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2,$$

последовательность коэффициентов Фурье которого

$$a_{k,n} = 1 - \frac{k}{n}, \quad 0 \le k \le n-1, \quad a_k = 0, \quad k \ge n$$

является выпуклой.

Замечание 2. Нетрудно убедиться в том, что множество точек (5.2) всюду плотно на $[0, \pi]$. Оценку (5.1) лучше всего применять при $x \in [\pi/2, \pi]$. На этом отрезке правая часть (5.1) не превосходит $0.5(a_0 - a_1)\operatorname{cosec}^2(x/2) \le a_0 - a_1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Salem R.* Determination de l'ordre de grandeur a l'origine de certaines series trigonometriques // C. R. Acad. Sci. Paris. 1928. Vol. 186. P. 1804–1806.

[2] *Izumi S.* Some trigonometrical series, XVII // Proc. Japan Acad. 1955. Vol. 31, № 4. P. 207–209.

[3] *Aljancic S., Boanic R., Tomic M.* Sur le comportement asymptotique au voisinage de zero des series trigonometriques de sinus a coefficients monotones // Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math. 1956. Vol. 10. P. 101–120.

[4] *Telyakovskii S. A.* On the behavior of sine series with convex coefficients near the origin // Dokl. Math. 1997. Vol. 5, № 3. P. 913–914.

[5] *Попов А. Ю.* Оценки сумм рядов по синусам с монотонными коэффициентами некоторых классов // Матем. заметки. 2003. Т. 74, № 6. С. 877–888.

[6] *Попов А. Ю., Солодов А. П.* Оценки с точными константами сумм некоторых классов рядов по синусам с монотонными коэффициентами через мажоранту Салема // Матем. заметки. 2018. Т. 104, № 5. С. 725–736.

[7] *Солодов А. П.* Точная оценка снизу суммы ряда по синусам с выпуклыми коэффициентами // Матем. сб. 2017. Т. 208, № 6. С. 146–169.

[8] *Попов А. Ю.* Уточнение оценок сумм синус-рядов с монотонными и косинус-рядов с выпуклыми коэффициентами // Матем. заметки. 2021. Т. 109, № 5. С. 768–780.

[9] *Солодов А. П.* Точные константы в двусторонней оценке С. А. Теляковского суммы ряда по синусам с выпуклой последовательностью коэффициентов // Матем. заметки. 2020. Т. 107, № 6. С. 906–921.

УДК 517.518.4

Равномерные по $a \in (0,1)$ двусторонние оценки функций $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-a}\cos(kx)$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-a}\sin(kx)$ через первые слагаемые их асимптотических рядов[1]

А. Ю. Попов, Т. В. Родионов (Москва, Россия)
rodionovtv@mail.ru

Для функций $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-a}\cos(kx)$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-a}\sin(kx)$ на $(0,\pi]$ получены равномерные по $0 < a < 1$ двусторонние оценки через первые слагаемые их асимптотических рядов.

Ключевые слова: специальные тригонометрические ряды, полилогарифм.

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00584).

Uniform with respect to $a \in (0,1)$ two-sided estimates of functions $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-a}\cos(kx)$ and $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-a}\sin(kx)$ by first members of their asymptotic series[1]

A. Yu. Popov, T. V. Rodionov (Moscow, Russia)
rodionovtv@mail.ru

For functions $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-a}\cos(kx)$ and $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-a}\sin(kx)$ on $(0,\pi]$ two-sided estimates by means of first members of their asymptotic series are obtained. These estimates are uniform with respect to $0 < a < 1$.

Keywords: special trigonometric series, polylogariphm.

Acknowledgements: this work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 20-01-00584).

Специальные тригонометрические ряды

$$f(x,a) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-a}\cos kx, \quad g(x,a) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-a}\sin kx, \quad a > 0,$$

часто встречаются в математической литературе. Известны следующие асимптотики [1, гл. II (13.11) и гл. V, § 2]:

$$f(x,a) \sim \sin\left(\frac{\pi a}{2}\right)\Gamma(1-a)x^{a-1}, \quad x \to 0+, \quad a \in (0,1), \tag{1}$$

$$g(x,a) \sim \cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)\Gamma(1-a)x^{a-1}, \quad x \to 0+, \quad a \in (0,2). \tag{2}$$

Равномерны ли они по $a \in (0,1)$? Мы доказали равномерность асимптотики (2) и равномерность видоизменённой асимптотики (1), добавив в её правую часть отрицательное слагаемое $\zeta(a)$ (ζ — дзета-функция Римана). Обозначим

$$f_0(x,a) = \sin\left(\frac{\pi a}{2}\right)\Gamma(1-a)x^{a-1} + \zeta(a), \quad g_0(x,a) = \cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)\Gamma(1-a)x^{a-1}.$$

Напомним, что функция $\zeta(a)$ убывает на полуинтервале $[0,1)$, $\zeta(0) = -1/2$, $\lim\limits_{a\to 1-} \zeta(a) = -\infty$.

Теорема. *При любых $x \in (0,\pi]$ и $a \in (0,1)$ верны двойные неравенства*

$$f_0(x,a) + \frac{\zeta(3)}{4\pi^3}\,x^2 \sin\frac{\pi a}{2} < f(x,a) < f_0(x,a) + \frac{x^2}{18}\sin\frac{\pi a}{2}, \tag{3}$$

$$g_0(x,a) - \frac{x}{2} < g(x,a) < g_0(x,a) - \frac{x}{12}. \tag{4}$$

Замечание 1. Нетрудно убедиться в справедливости равенства $\lim\limits_{a\to 1} g_0(x,a) = \pi/2$ (при любом $x > 0$), которое вместе с тождеством $g(x,1) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin kx}{k} = \dfrac{\pi - x}{2}$ показывает, что оценка снизу в (4) при $a = 1$ превратилась бы в равенство. Это означает, что функцию $g(x,a)$ (при всех $a \in (0,1)$ и $x \in (0,\pi]$) нельзя оценить снизу через $g_0(x,a) - kx$, где k — какое-либо число из интервала $(0, 1/2)$. В том же смысле неулучшаема и оценка сверху в (4).

Замечание 2. Константу $\dfrac{\zeta(3)}{4\pi^3}$ в левом неравенстве (3) увеличить нельзя: после её замены бóльшим числом неравенство при достаточно близких к нулю a и x перестало бы выполняться. Что же касается правого неравенства, то в нём нельзя заменить $1/18$ на число, меньшее $1/24$: тогда неравенство не будет выполняться при достаточно малых x и a, близких к 1. В действительности, мы вывели более сильное, но более громоздкое неравенство

$$f(x,a) < f_0(x,a) + \frac{x^2}{24}\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)^{-1} \sin\frac{\pi a}{2},\ 0 < a < 1,\ 0 < x \leqslant \pi,$$

в котором нельзя уменьшить постоянную $1/24$, но, возможно, удастся уменьшить множитель $\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)^{-1}$.

Доказательство основано на разложении в ряд

$$\mathrm{L}_a(z)-\Gamma(1-a)\left(\ln\frac{1}{z}\right)^{a-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta(a-n)}{n!}(\ln z)^n, \tag{5}$$

где L_a (полилогарифм) — аналитическое продолжение суммы степенного ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-a}z^k$ из круга $|z|<1$ в $\mathbb{C}\setminus[1,+\infty)$. Под $\ln z$ понимается $\ln(re^{i\varphi})=\ln r+i\varphi$, и в разложении (5) предполагается, что $z=re^{i\varphi}$ лежит на римановой поверхности $\{0<r<+\infty, -2\pi<\varphi<2\pi\}$. Ряд в (5) сходится в области $|\ln z|<2\pi$, лежащей на этом многообразии. После вычитания из $\mathrm{L}_a(z)$ функции $\Gamma(1-a)\left(\ln\frac{1}{z}\right)^{a-1}$ особенность в точке $z=1$ (при $a\in(0,1)$ она является точкой ветвления как у степенной функции w^p в точке $w=0$) “стирается”. Разложение (5) найдено довольно давно (см., например, [3] и [2, 1.11 (8)]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М. : Мир, 1965.

[2] *Erdélyi A. (ed.)* Higher Transcendental functions. New York : McGraw Hill, 1953.

[3] *Truesdell C.* On a function which occurs in the theory of the structure of polymers // Ann. Math. (2). 1945. Vol. 46, № 1. P. 144–157.

УДК 517.53

Линейные непрерывные функционалы пространств Привалова[1]

Е. Г. Родикова (Брянск, Россия)
evheny@yandex.ru

В работе получено дискретное описание линейных непрерывных функционалов пространств И. И. Привалова.

Ключевые слова: класс Привалова, плоский класс Привалова, линейные непрерывные функционалы.

Continuous linear functionals on the Privalov spaces[1]

E. G. Rodikova (Bryansk, Russia)
evheny@yandex.ru

The description of continuous linear functionals of the Privalov spaces in a disk is obtained in this paper.

Keywords: Privalov spaces, Privalov classes by area, linear continuous functionals.

Пусть $\mathbb{C}$ - комплексная плоскость, D - единичный круг на $\mathbb{C}$, $H(D)$ - множество всех функций, аналитических в D. При всех $0 < q < +\infty$ определим класс И.И. Привалова:

$$\Pi_q = \left\{ f \in H(D) : \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+ |f(re^{i\theta})| \right)^q d\theta < +\infty \right\},$$

где $\ln^+ |a| = \max(\ln |a|, 0)$, $\forall a \in \mathbb{C}$.

Отметим, что классы Π_q впервые были рассмотрены И. И. Приваловым в [3]. При $q = 1$ они совпадают с хорошо известным классом Р. Неванлинны (см. [2]).

При всех $0 < q < +\infty$ введем также в рассмотрение класс

$$\tilde{\Pi}_q = \left\{ f \in H(D) : \int\limits_0^1 \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+ |f(re^{i\theta})| \right)^q d\theta dr < +\infty \right\}.$$

Будем называть его плоским классом И. И. Привалова или классом И. И. Привалова по площади. При $q = 1$ плоский класс Привалова совпадает с хорошо известным плоским классом Р. Неванлинны, входящим в шкалу классов Неванлинны-Джрбашяна.

В данной работе получено описание множества непрерывных линейных функционалов на пространствах $\Pi_q\,(0<q<1)$, $\tilde{\Pi}_q\,(q>0)$. Отметим, что вопросы описания линейных функционалов на различных пространствах аналитических функций исследовались в работах А. Тейлора [7] - на пространствах Харди $H^p\,(p>1)$, П. Дюрена, Б. Ромберга и А. Шилдса [5] - на пространствах Харди $H^p\,(0<p<1)$, Н. Янагиара [8] - на пространствах Смирнова, Р. Мештровича и А.В. Субботина [1] - на пространствах $\Pi_q\,(q>1)$. Для доказательства основных результатов мы используем методы работ [8], [1]. Суть метода заключается в следующем: вопрос о нахождении общего вида линейного функционала на некотором пространстве аналитических в круге X функций сводится к отысканию вида произвольного коэффициентного мультипликатора, действующего из класса X в класс ограниченных аналитических функций H^∞.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. *Любой непрерывный линейный функционал Φ над пространством Привалова $\Pi_q\,(0<q<1)$ определяется формулой*

$$\Phi(f)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k, \tag{1}$$

где числа $\{b_k\}$ с условием

$$b_k=O\left(\exp\left(-c\cdot k^{\frac{1}{1+q}}\right)\right),\quad k\to+\infty,\quad c>0, \tag{2}$$

являются коэффициентами Тейлора некоторой аналитической функции в D, $\{a_k\}$ — коэффициенты Тейлора функции $f\in\Pi_q\,(0<q<1)$. При этом ряд в правой части (1) абсолютно сходится.

Обратно, каждая последовательность $\{b_k\}$ с условием (2) определяет по формуле (1) линейный непрерывный функционал Φ над пространством Привалова $\Pi_q\,(0<q<1)$.

Теорема 2. *Любой непрерывный линейный функционал Φ над плоским классом Привалова $\tilde{\Pi}_q\,(q>0)$ определяется формулой*

$$\Phi(f)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k, \tag{3}$$

где числа $\{b_k\}$ с условием

$$b_k=O\left(\exp\left(-c\cdot k^{\frac{2}{2+q}}\right)\right),\quad k\to+\infty,\quad c>0, \tag{4}$$

являются коэффициентами Тейлора некоторой аналитической функции в D, $\{a_k\}$ — коэффициенты Тейлора функции $f\in\tilde{\Pi}_q$. При этом ряд в правой части (3) абсолютно сходится.

Обратно, каждая последовательность $\{b_k\}$ *с условием* (4) *определяет по формуле* (3) *линейный непрерывный функционал* Φ *над плоским классом Привалова* $\tilde{\Pi}_q\,(q > 0)$.

При доказательстве теоремы 1 использовалось описание коэффициентных мультипликаторов из пространства И. И. Привалова, полученное в работе [6], а при доказательстве теоремы 2 - описание коэффициентных мультипликаторов из плоского класса И. И. Привалова [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Мештрович Р., Субботин А. В.* Мультипликаторы и линейные функционалы пространств И. И. Привалова голоморфных функций в круге // Докл. АН. 1999. Т. 365, № 4. С. 452–454.

[2] *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции. М.-Л. : ГИТТЛ, 1941. 388 с.

[3] *Привалов И. И.* Граничные свойства однозначных аналитических функций. М. : Изд. МГУ, 1941. 206 с.

[4] *Родикова Е. Г.* О коэффициентных мультипликаторах плоских классов Привалова // Уфимский матем. журн. 2021. Т. 13, № 4. P. 82–93.

[5] *Duren P., Romberg B., Shields A.* Linear functionals on H^p spaces with $0 < p < 1$ // J. Reine Angew. Math. 1969. Vol. 238. P. 32–60.

[6] *Rodikova E. G.* Coefficient multipliers for the Privalov class in a disk // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2018. Т. 11, вып. 6. С. 723–732.

[7] *Taylor A.Ė.* Banach spaces of functions analytic in the unit circle // II Studia Math. 1951. Vol. 12. P. 25-50.

[8] *Yanagihara N.* Multipliers and linear functionals for the class N^+ // Transactions of the Amer. Math. Soc. 1999. Vol. 180. C. 449–461.

УДК 517.958

Решение начально-граничной задачи для уравнения гиперболического типа со смешанной производной[1]

В. С. Рыхлов (Саратов, Россия)

rykhlovvs@yamdex.ru

Рассматривается начально-граничная задача для неоднородного гиперболического уравнения второго порядка на конечном отрезке с постоянными коэффициентами и смешанной производной. Рассматривается случай закрепленных концов. Предполагается, что корни характеристического уравнения простые и лежат на вещественной оси по разные стороны от начала координат. Определяются классическая и обощенная постановки начально-граничных задач. Формулируются теоремы единственности решения и существовании решений для двух частных случаев. Даются формулы для решений в этих частных случаях.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, второй порядок, начально-граничная задача, обощенная начально-граничная задача, конечный отрезок, смешанная производная в уравнении, постоянные коэффициенты, закрепленные концы, существование решения, единственность решения, формула для решения, расходящиеся ряды.

The solution of the initial boundary value problem for a hyperbolic equation with a mixed derivative[1]

V. S. Rykhlov (Saratov, Russia)

rykhlovvs@yandex.ru

An initial boundary value problem for a second-order inhomogeneous hyperbolic equation with constant coefficients and a mixed partial derivative is considered. The case of fixed ends is considered. It is assumed that the roots of the characteristic equation are simple and lie on the real axis on different sides of the origin. Classical and generalized statements of initial boundary value problems are determined. Theorems of the uniqueness of the solution and the existence of the solutions for two special cases are formulated. Formulas of the solutions for these special cases are given.

Keywords: hyperbolic equation, second order, initial boundary value problem, generalized initial boundary value problem, finite segment, mixed derivative in the equation, constant coefficients, fixed ends, existence of the solution, uniqueness of the solution, formula for the solution, divergent series.

Введение

Рассмотрим начально-граничную задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p_1\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + p_2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x,t), \quad x \in [0,1], \quad t \in [0,+\infty), \tag{1}$$

$$u(0,t) = 0, \qquad u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x), \tag{3}$$

где все функции, входящие в (1)–(3), комплекснозначные и $p_j\in\mathbb{R}$, $\varphi,\psi\in L_1[0,1]$, $f(x,t)\in L_1(Q_T)$, $Q_T=[0,1]\times[0,T]$ при любом $T>0$.

Рассматривается случай гиперболического уравнения (1), то есть выполняется условие $p_1^2-4p_2>0$. В этом случае корни ω_1,ω_2 характеристического многочлена вещественны. Предположим, что они удовлетворяют неравенствам

$$\omega_1<0<\omega_2. \tag{4}$$

При рассмотрении этой задачи используются метод из статьи [1]. В этой же статье дается история вопроса.

Аналогично [1] под классическим решением (или классическим решением почти всюду (п.в.), или более кратко решением п.в.) понимается функция $u(x,t)$, которая непрерывна вместе с $u_x(x,t)$ и $u_t(x,t)$ и при этом $u_x(x,t)$ и $u_t(x,t)$) абсолютно непрерывны по x и t, причем $u_{xt}(x,t)=u_{tx}(x,t)$ (в случае когда $u_{xt}(x,t)$ и $u_{tx}(x,t)$ не являются непрерывными функциями, это равенство может не выполняться на множестве положительной меры [2]), удовлетворяющая условиям (2)–(3) и п.в. уравнению (1).

В случае классического решения задачи (1)–(3) необходимо должны выполняться условия гладкости: $\varphi(x),\varphi'(x),\psi(x)$ абсолютно непрерывны и условия согласования: $\varphi(0)=\varphi(1)=\psi(0)=\psi(1)=0$.

Единственность классического решения

Обозначим через $L(\lambda)$ оператор-функцию (о.ф.), порожденную дифференциальным выражением

$$\ell(y,\lambda):=y''+\lambda p_1y'+\lambda^2p_2y,$$

и краевыми условиями

$$y(0)=y(1)=0.$$

Пусть R_λ есть резольвента этой о.ф., $G(x,\xi,\lambda)$ — функция Грина, а $R_{1\lambda}$ есть интегральный оператор с ядром $G_\xi(x,\xi,\lambda)$.

Собственные значения $L(\lambda)$, очевидно, простые и выражаются по формулам

$$\lambda=\frac{2k\pi i}{\omega_2-\omega_1},\quad k=\pm1,\pm2,\ldots.$$

Обозначим через γ_k окружности $\{\lambda:|\lambda-\lambda_k|=\delta\}$, где $\delta>0$ и настолько мало, что внутри γ_k находится по одному с.з.

Теорема 1. *Пусть $u(x,t)$ — классическое решение задачи (1)–(3) с дополнительным условием (4). Если $u_{tt} \in L_1(Q_T)$ при любом $T > 0$, то оно единственно и находится по формуле*

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int\limits_{\gamma_k} \Bigg(\int\limits_0^t e^{\lambda(t-\tau)} R_\lambda f(\cdot,\tau)\, d\tau - \\ -p_1 e^{\lambda t} R_{1\lambda}\varphi + p_2 e^{\lambda t} \lambda R_\lambda \varphi + p_2 e^{\lambda t} R_\lambda \psi \Bigg) d\lambda, \tag{5}$$

в которой ряд справа сходится равномерно по $x \in [0,1]$ при любом фиксированном $t > 0$.

Теорема 1 говорит о том, что формальный ряд (5) и начально-граничная задача (1)–(3) тесно связаны. Аналогично [1] расширим понятие этой связи.

Ряд справа в формуле (5) имеет смысл для любых интегрируемых на [0,1] функций $\varphi(x), \psi(x)$ и функции $f(x,t) \in L_1(Q_T)$ при любом $T > 0$, хотя он может быть и расходящимся. В этом случае естественно говорить, что (5) также является формальным решением начально-граничной задачи (1)–(3), понимаемой чисто формально. Так же, как и в [1], будем называть ее обобщенной начально-граничной задачей.

Существование решений в двух частных случаях

Введем следующие обозначения для функции $f(x) \in L_1[0,1]$:

$$f^*(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \in \left[0, \frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\right], \\ f\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_1}(\xi-1)\right), & \xi \in \left[\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}, 1\right]; \end{cases}$$

$$f_*(\xi) = \begin{cases} f\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_2}\xi\right), & \xi \in \left[0, \frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\right], \\ 0, & \xi \in \left[\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}, 1\right]. \end{cases}$$

Через $\tilde{f}(x)$ будем обозначать 1-периодическое продолжение функции $f(x)$, $x \in [0,1]$, то есть $\tilde{f}(x) := f(\{x\})$, $x \in \mathbb{R}$, где $\{\cdot\}$ обозначает дробную часть x.

Используя понятие расходящегося ряда в понимании Эйлера [3,4], формальному ряду (5) в случае $\psi(x) \equiv 0$, $f(x,t) \equiv 0$ назначаем следующую сумму

$$u_1(x,t) = \frac{\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\left(\tilde{\varphi}^*\Big(\frac{t+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\Big) - \tilde{\varphi}^*\Big(\frac{t+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\Big)\right) + \\ + \frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\left(\tilde{\varphi}_*\Big(\frac{t+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\Big) - \tilde{\varphi}_*\Big(\frac{t+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\Big)\right). \tag{6}$$

По определению считаем, что (6) есть решение обощенной смешанной задачи (1)–(3) в случае $\psi(x) \equiv 0$, $f(x,t) \equiv 0$.

Основанием правильности такого определения служит

Теорема 2. *Пусть выполняется условие* (4), *функции* $\varphi(x)$ *и* $\varphi'(x)$ *абсолютно непрерывны,* $\varphi''(x) \in L_1[0,1]$ *и* $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. *Тогда функция* $u_1(x,t)$ *из* (6) *является классическим решением задачи* (1)–(3) *в случае* $\psi(x) \equiv 0$, $f(x,t) \equiv 0$.

Обозначим

$$\Psi(x) = \int\limits_0^x \psi(\xi)\,d\xi.$$

Опять, используя понятие расходящегося ряда в понимании Эйлера [3,4], формальному ряду (5) в случае $\varphi(x) \equiv 0$, $f(x,t) \equiv 0$ назначаем следующую сумму

$$u_2(x,t) = -\frac{p_2}{\omega_2-\omega_1}\Bigg(\tilde{\Psi}^*\Big(\frac{t+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\Big) - \tilde{\Psi}^*\Big(\frac{t+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\Big) + \\ + \tilde{\Psi}_*\Big(\frac{t+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\Big) - \tilde{\Psi}_*\Big(\frac{t+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\Big)\Bigg). \tag{7}$$

По определению считаем, что (7) есть решение обощенной смешанной задачи (1)–(3) в случае $\varphi(x) \equiv 0$, $f(x,t) \equiv 0$.

Основанием правильности такого определения служит

Теорема 3. *Пусть выполняется условие* (4), *функция* $\psi(x)$ *абсолютно непрерывна,* $\psi'(x) \in L_1[0,1]$ *и* $\psi(0) = \psi(1) = 0$. *Тогда функция* $u_2(x,t)$ *из* (7) *является классическим решением задачи* (1)–(3) *в случае* $\varphi(x) \equiv 0$, $f(x,t) \equiv 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Хромов А. П., Корнев В. В.* Расходящиеся ряды в методе Фурье для волнового уравнения // Тр. ИММ УрО РАН. 2021. Т. 27, № 4. С. 215–238.

[2] *Толстов Г. П.* О второй смешанной производной // Матем. сб. 1949. Т. 24(66), № 1. С. 27–51.

[3] *Эйлер Л.* Дифференциальное исчисление. М.;Л. : ГИТТЛ, 1949. 580 с.

[4] *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и функциональные уравнения, связанные с аналогами геометрической прогрессии // Современные методы теории краевых задач: материалы междунар. конф: Воронежская весенняя матем. школа «Понтрягинские чтения – XXX» (Воронеж, 3–9 мая 2019). Воронеж : ИД ВГУ, 2019. С. 291–300.

УДК 517.9

Оценка наименьшего уклонения для периодических функций в метрике Хаусдорфа[1]

Е. Х. Садекова (Москва, Россия)

EKSadekova@mephi.ru

На вещественной оси рассматривается класс многозначных 2π–периодических ограниченных функций. Исследуется задача о приближении в хаусдорфовой метрике функций из этого класса тригонометрическими полиномами. Получена оценка сверху для величины наименьшего уклонения в терминах колебания функции. Основной результат работы проиллюстрирован на двух модельных примерах — функциях точечного всплеска и точечного колебания.

Ключевые слова: периодическая функция, метрика Хаусдорфа, тригонометрические полиномы, наименьшее уклонение, точечный всплеск, точечное колебание.

The estimation of the least deviation for periodic functions in the Hausdorff metric[1]

E. H. Sadekova (Moscow, Russia)

EKSadekova@mephi.ru

The class of multivalued 2π–periodic bounded functions is considered on the real axis. The problem of approximation in the Hausdorff metric of functions from this class by trigonometric polynomials is investigated. An upper bound is obtained for the value of the least deviation in terms of the fluctuation of the function. The main result of the paper is illustrated by two model examples — the functions of a point splash and a point oscillation.

Keywords: periodic function, Hausdorff metric, trigonometric polynomials, least deviation, point splash function, point oscillation function.

Рассмотрим метрическое пространство точек на плоскости с *расстоянием Минковского*

$$\rho\left((x_1,\, y_1),(x_2,\, y_2)\right) = \max\left\{|x_1 - x_2|,\, |y_1 - y_2|\right\}.$$

Пусть A и B — замкнутые множества на плоскости. *Хаусдорфовым расстоянием* между множествами A и B называется величина

$$H(A,B) = \inf\left\{\varepsilon \geqslant 0 :\ A \subset U_\varepsilon(B),\, B \subset U_\varepsilon(A)\right\},$$

где $U_\varepsilon(X) = \left\{(x,y) :\ \rho\left((x,y)\,,\, X\right) \leqslant \varepsilon\right\}$ — «ε-окрестность» множества X на плоскости относительно расстояния ρ.

Пусть $\mathcal{M}$ — класс 2π–периодических ограниченных (вообще говоря, многозначных) функций. Хаусдорфовым расстоянием $H(f,\, g)$ между двумя ограниченными функциями $f(x)$ и $g(x)$ из $\mathcal{M}$ называется хаусдорфово расстояние между их дополненными графиками, т. е.

$$H(f,\, g) = H\left(F(f),\, F(g)\right),$$

где $F(f)$ — дополненный график функции $y = f(x)$. Под *дополненным графиком* $F(f)$ такой функции f будем понимать наименьшее замкнутое множество плоскости, содержащее график этой функции и вместе с каждой парой точек $(x_1,\, y_1)$ и $(x_1,\, y_2)$ содержащее вертикальный отрезок с концами в этих точках.

Для ограниченной 2π–периодической функции наименьшее уклонение от тригонометрических полиномов T_n порядка не выше n в смысле хаусдорфова расстояния обозначим символом

$$HE_n^T(f) = \inf_{T_n} \left\{H(f,\, T_n)\right\}.$$

Пусть $\Omega(f)$ — колебание функции f из $\mathcal{M}$, т. е. величина

$$\Omega(f) = \sup_{x\in[0,2\pi]} f(x) - \inf_{x\in[0,2\pi]} f(x).$$

Наш первый результат состоит в следующем.

Теорема 1. *Для любой функции $f \in \mathcal{M}$, δ–окрестность дополненного графика которой содержит график некоторого тригонометрического полинома, при всех $n > n_0(f)$ справедлива оценка*

$$HE_n^T(f) \,<\, \frac{1}{n}\log\Big(e^4\, n\, \Omega(f)\Big).$$

В работе [1] Бл. Х. Сендов и В. А. Попов установили, что для любой функции $f \in \mathcal{M}$ выполняется неравенство

$$HE_n(f) \leqslant \Big(1 + \alpha_n(f)\Big)\,\frac{\log n}{n},$$

где $\alpha_n(f) \to 0$ при $n \to \infty$, причём множитель $1 + \alpha_n(f)$ нельзя заменить на множитель $C + \alpha_n(f)$ с константой $C < 1$.

Для $M > 0$ определим *функцию точечного всплеска*

$$\delta_M(x) = \begin{cases} [0, M], & x \in 2\pi\mathbb{Z}, \\ 0, & x \notin 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Как показано в [2], при достаточно больших n для наименьших уклонений $HE_n(\delta_M)$ верна оценка

$$HE_n(\delta_M) > \frac{1}{n}\Big(\log\left(2Mn\right) - \log\log n\Big),$$

которая демонстрирует точность теоремы 1.

Рассмотрим теперь *функцию точечного колебания*, определяемую по формуле

$$\chi_M(x) = \begin{cases} [-M, M], & x \in 2\pi\mathbb{Z}, \\ 0, & x \notin 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Для этого специального примера получено следующее утверждение.

Теорема 2. *При каждом значении $M > 0$ справедлива асимптотическая формула*

$$HE_n(\chi_M) = \frac{1}{n}\left(\log\left(4M\sqrt{e}\,n\right) - \frac{1}{2}\log\log n\right) + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Сендов Бл., Попов В. А.* Точная асимптотика наилучшего приближения алгебраическими и тригонометрическими многочленами в метрике Хаусдорфа // Матем. сб. 1972. Т. 89, № 1. С. 138–147.

[2] *Долженко Е. П., Севастьянов Е. А.* Аппроксимация со знакочувствительным весом (устойчивость, приложения к теории ужей и хаусдорфовым аппроксимациям) // Изв. РАН. Серия матем. 1999. Т. 63, № 3. С. 77–118.

УДК 517.5

Свойства частных модулей гладкости функций с лакунарными коэффициентами Фурье[1]

Б. В. Симонов, И. Э. Симонова, Л. В. Самофалова, В. П. Мишта (Волгоград, Россия)

dvr@vstu.ru

В данной работе уточняются некоторые свойства частных модулей гладкости функций с лакунарными коэффициентами Фурье в пространствах Лебега со смешанной нормой.

Ключевые слова: частный модуль гладкости, лакунарные коэффициенты Фурье, смешанная норма.

Properties of partial moduli of smoothness of functions with lacunary Fourier coefficients[1]

B. V. Simonov, I. E. Simonova, L. V. Samofalova, V. P. Mishta (Volgograd, Russia)

dvr@vstu.ru

In this paper certain properties for the partial moduli of smoothness of functions with lacunary Fourier coefficients in the Lebesgue space with the mixed norm are refined.

Keywords: partial modulus of smoothness, lacunary Fourier coefficients, mixed norm.

Для функций одного переменного В.И. Коляда [1] доказал неравенство, уточняющее известное неравенство П.Л. Ульянова [2, 3]. В данной работе получено аналогичное неравенство для частных модулей гладкости для функций с лакунарными коэффициентами Фурье в пространствах Лебега со смешанной нормой. Свойства частных модулей гладкости изучались в ряде работ (см., например, [4] - [7]).

Обозначим через

$-$ $L_{p_1p_2}, 1 < p_i < \infty, i = 1, 2$ $-$ множество измеримых функций двух переменных $f(x_1, x_2), 2\pi$ - периодических по каждому переменному, для которых

$$||f||_{p_1p_2} = \left(\int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^{2\pi} |f(x_1, x_2)|^{p_1} dx_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dx_2 \right)^{\frac{1}{p_2}} < \infty;$$

– $L^0_{p_1p_2}$ — множество функций $f \in L_{p_1p_2}$ таких, что $\int\limits_0^{2\pi} f(x_1,x_2)dx_2 = 0$; для почти всех x_1 и $\int\limits_0^{2\pi} f(x_1,x_2)dx_1 = 0$; для почти всех x_2;

– $S_{m_1,\infty}(f), S_{\infty,m_2}(f), S_{m_1,m_2}(f)$ — частичные суммы ряда Фурье функции $f(x_1,x_2)$, т.е.
$S_{m_1,\infty}(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x_1+t_1,x_2)D_{m_1}(t_1)dt_1$, $S_{\infty,m_2}(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x_1,x_2+t_2)\times$
$\times D_{m_2}(t_2)dt_2$, $S_{m_1,m_2}(f) = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x_1+t_1,x_2+t_2)D_{m_1}(t_1)D_{m_2}(t_2)dt_1dt_2$
$(m_i = 0,1,2,...,\ i = 1,2)$, где $D_m(t) = \frac{\sin(m+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}$ $(m = 0,1,2...)$ – ядро Дирихле;

– $f^{(\rho_1,\rho_2)}$ — производную в смысле Вейля функции $f(x_1,x_2)$ порядка $\rho_1(\rho_1 \geq 0)$ по переменной x_1 и порядка $\rho_2(\rho_2 \geq 0)$ по переменной x_2 ([8], гл. III, стр. 238),

– $E_{m_1\infty}(f)_{p_1p_2}$ — частное наилучшее приближение функции $f \in L_{p_1p_2}$ по переменной x_1, т. е. $E_{m_1\infty}(f)_{p_1p_2} = \inf\limits_{T_{m_1\infty}} \|f - T_{m_1\infty}\|_{p_1p_2}$, где функции $T_{m_1\infty}(x_1,x_2) \in L_{p_1p_2}$ и являются тригонометрическими полиномами порядка не выше, чем m_1, по переменной x_1;

– $E_{\infty m_2}(f)_{p_1p_2}$ — частное наилучшее приближение функции $f \in L_{p_1p_2}$ по переменной x_2,, т. е. $E_{\infty m_2}(f)_{p_1p_2} = \inf\limits_{T_{\infty m_2}} \|f - T_{\infty m_2}\|_{p_1p_2}$, где функции $T_{\infty m_2}(x_1,x_2) \in L_{p_1p_2}$ и являются тригонометрическими полиномами порядка не выше, чем m_2, по переменной x_2.

Для функции $f \in L_{p_1p_2}$ определим разности с шагами h_1 и h_2 положительных порядков α_1 и α_2 соответственно, по переменным x_1 и x_2, следующим образом:
$\Delta^{\alpha_1}_{h_1}(f) = \sum\limits_{\nu_1=0}^{\infty}(-1)^{\nu_1}\binom{\alpha_1}{\nu_1} f(x_1 + (\alpha_1 - \nu_1)h_1, x_2)$, $\Delta^{\alpha_2}_{h_2}(f) = \sum\limits_{\nu_2=0}^{\infty}(-1)^{\nu_2}\binom{\alpha_2}{\nu_2} f(x_1, x_2 + (\alpha_2 - \nu_2)h_2)$, где $\binom{\alpha}{\nu} = 1$ для $\nu = 0$, $\binom{\alpha}{\nu} = \alpha$ для $\nu = 1$, $\binom{\alpha}{\nu} = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-\nu+1)}{\nu!}$ для $\nu \geq 2$.

Обозначим через

– $\omega_{\alpha_1,0}(f,\delta_1)_{p_1p_2}$– частный модуль гладкости положительного порядка α_1 по переменной x_1, то есть

$$\omega_{\alpha_1,0}(f,\delta_1)_{p_1p_2} = \sup_{|h_1|\leq\delta_1} \|\Delta^{\alpha_1}_{h_1}(f)\|_{p_1p_2},$$

– $\omega_{0,\alpha_2}(f,\delta_2)_{p_1p_2}$– частный модуль гладкости положительного порядка α_2 по переменной x_2, то есть

$$\omega_{0,\alpha_2}(f,\delta_2)_{p_1p_2}=\sup_{|h_2|\le\delta_2}\|\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(f)\|_{p_1p_2}.$$

Для неотрицательных функционалов $F(f,\delta_1,\delta_2)$ и $G(f,\delta_1,\delta_2)$ будем писать, что $F(f,\delta_1,\delta_2)\ll G(f,\delta_1,\delta_2)$, если существует положительная постоянная C, не зависящая от f,δ_1 и δ_2, такая, что $F(f,\delta_1,\delta_2)\le CG(f,\delta_1,\delta_2)$. Если одновременно $F(f,\delta_1,\delta_2)\ll G(f,\delta_1,\delta_2)$ и $G(f,\delta_1,\delta_2)\ll F(f,\delta_1,\delta_2)$, то будем писать, что $F(f,\delta_1,\delta_2)\asymp G(f,\delta_1,\delta_2)$.

Скажем, что $f\in\Lambda_{p_1p_2},\ 1<p_i<\infty,\ i=1,2$, если $f\in L^0_{p_1p_2}$ и имеет ряд Фурье

$$\sum_{\mu_2=0}^{\infty}\sum_{\mu_1=0}^{\infty}a_{\mu_1,\mu_2}\varphi_1(2^{\mu_1}x_1)\varphi_2(2^{\mu_2}x_2),$$

где $\varphi_i(t)=\cos t$ или $\varphi_i(t)=\sin t,\ i=1,2.$

Сформулируем основные результаты.

Теорема 1. *Пусть* $f\in\Lambda_{p_1p_2},1<p_i<\infty,\beta_i>\alpha_i>0,n_i=0,1,2\cdots,\delta_i\in(0,\frac{1}{2}),i=1,2.$ *Тогда*

$$\omega_{\alpha_1,0}\Big(f,\frac{1}{2^{n_1}}\Big)_{p_1p_2}\asymp\frac{1}{2^{n_1\alpha_1}}\Bigg\{\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{\infty}a_{k_1k_2}^2 2^{2k_1\alpha_1}\Bigg\}^{\frac{1}{2}}+\Bigg\{\sum_{k_1=n_1+1}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}a_{k_1k_2}^2\Bigg\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\omega_{0,\alpha_2}\Big(f,\frac{1}{2^{n_2}}\Big)_{p_1p_2}\asymp\frac{1}{2^{n_2\alpha_2}}\Bigg\{\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{n_2}a_{k_1k_2}^2 2^{2k_2\alpha_2}\Bigg\}^{\frac{1}{2}}+\Bigg\{\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=n_2+1}^{\infty}a_{k_1k_2}^2\Bigg\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\omega_{\alpha_1,0}\left(f,\frac{1}{2^{n_1}}\right)_{p_1p_2}\asymp\frac{1}{2^{\alpha_1n_1}}\left(\sum_{\mu_1=0}^{n_1}2^{2\alpha_1\mu_1}E^2_{2^{\mu_1}-1\infty}(f)_{p_1p_2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\omega_{0,\alpha_2}\left(f,\frac{1}{2^{n_2}}\right)_{p_1p_2}\asymp\frac{1}{2^{\alpha_2n_2}}\left(\sum_{\mu_1=0}^{n_2}2^{2\alpha_2\mu_2}E^2_{\infty,2^{\mu_2}-1}(f)_{p_1p_2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\omega_{\alpha_1,0}\left(f,\frac{1}{2^{n_1}}\right)_{p_1p_2}\asymp\left(\sum_{\mu_1=n_1+1}^{\infty}2^{-2\alpha_1\mu_1}\|S^{(\alpha_1,0)}_{2^{\mu_1}\infty}(f)\|^2_{p_1p_2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\omega_{0,\alpha_2}\left(f,\frac{1}{2^{n_2}}\right)_{p_1p_2}\asymp\left(\sum_{\mu_2=n_2+1}^{\infty}2^{-2\alpha_2\mu_2}\|S^{(0,\alpha_2)}_{\infty2^{\mu_2}}(f)\|^2_{p_1p_2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\omega_{\alpha_1,0}(f,\delta_1)_{p_1p_2} \asymp \delta_1^{\alpha_1}\left(\int\limits_{\delta_1}^{1}\left[t_1^{-\alpha_1}\omega_{\beta_1,0}(f,t_1)_{p_1p_2}\right]^2\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\omega_{0,\alpha_2}(f,\delta_2)_{p_1p_2} \asymp \delta_2^{\alpha_2}\left(\int\limits_{\delta_2}^{1}\left[t_2^{-\alpha_2}\omega_{0,\beta_2}(f,t_2)_{p_1p_2}\right]^2\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 2. *Пусть* $f \in \Lambda_{p_1p_2}, \alpha_i > \theta_i, \delta_i \in (0,1), i = 1,2.$ *Тогда*

I. при $1 < p_1 < q_1 < \infty, \theta_1 = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}, 1 < p_2 < \infty$

$$\delta_1^{\alpha_1-\theta_1}\left(\int\limits_{\delta_1}^{1} t_1^{-p_1(\alpha_1-\theta_1)}\omega_{\alpha_1,0}^{p_1}(f,t_1)_{q_1p_2}\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} \ll \left(\int\limits_{0}^{\delta_1} t_1^{-q_1\theta_1}\omega_{\alpha_1,0}^{q_1}(f,t_1)_{p_1p_2}\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{1}{q_1}}, \tag{1}$$

II. при $1 < p_2 < q_2 < \infty, \theta_2 = \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}, 1 < p_1 < \infty$

$$\delta_2^{\alpha_2-\theta_2}\left(\int\limits_{\delta_2}^{1} t_2^{-p_2(\alpha_2-\theta_2)}\omega_{0,\alpha_2}^{p_2}(f,t_2)_{p_1q_2}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{p_2}} \ll \left(\int\limits_{0}^{\delta_2} t_2^{-q_2\theta_2}\omega_{0,\alpha_2}^{q_2}(f,t_2)_{p_1p_2}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{q_2}}. \tag{2}$$

Причем в соотношениях (1) и (2) знак $\ll$ *нельзя заменить на* $\asymp$ *.*

Теорема 3.

I. Пусть $f \in \Lambda_{p_1p_2}, 1 < p_1 < q_1 < \infty, \theta_1 = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}, 1 < p_2 < \infty, \alpha_1 > \theta_1, n_1 = 1,2,....$ *Тогда*

$$\left(\int\limits_{0}^{2^{-n_1}} t_1^{-q_1\theta_1}\omega_{\alpha_1,0}^{q_1}(f,t_1)_{p_1p_2}\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{1}{q_1}} \asymp$$

$$\asymp 2^{n_1(\theta_1-\alpha_1)}\Big(\sum_{\mu_2=0}^{\infty}\sum_{\mu_1=0}^{n_1}a_{\mu_1,\mu_2}^2 2^{2\mu_1\alpha_1}\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty}2^{\nu_1q_1\theta_1}\Big(\sum_{\mu_2=0}^{\infty}a_{\nu_1,\mu_2}^2\Big)^{\frac{q_1}{2}}\Big)^{\frac{1}{q_1}},$$

$$2^{-n_1(\alpha_1-\theta_1)}\left(\int\limits_{2^{-n_1}}^{1} t_1^{-p_1(\alpha_1-\theta_1)}\omega_{\alpha_1,0}^{p_1}(f,t_1)_{q_1p_2}\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} \asymp$$

$$\asymp 2^{-n_1(\alpha_1-\theta_1)}\Big(\sum_{\nu_1=0}^{n_1}2^{\nu_1p_1(\alpha_1-\theta_1)}\Big(\sum_{\mu_2=0}^{\infty}a_{\nu_1,\mu_2}^2\Big)^{\frac{p_1}{2}}\Big)^{\frac{1}{p_1}} + \Big(\sum_{\mu_2=0}^{\infty}\sum_{\mu_1=n_1+1}^{\infty}a_{\mu_1,\mu_2}^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

II. Пусть $f \in \Lambda_{p_1 p_2}, 1 < p_2 < q_2 < \infty, \theta_2 = \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}, 1 < p_1 < \infty, \alpha_2 > \theta_2, n_2 = 1, 2, ...$ *Тогда*

$$\left(\int\limits_0^{2^{-n_2}} t_2^{-q_2\theta_2} \omega_{0,\alpha_2}^{q_2}(f, t_2)_{p_1 p_2} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q_2}} \asymp$$

$$\asymp 2^{n_2(\theta_2-\alpha_2)} \big(\sum_{\mu_2=0}^{n_2} \sum_{\mu_1=0}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2}^2 2^{2\mu_2\alpha_2} \big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum_{\nu_2=n_2}^{\infty} 2^{\nu_2 q_2 \theta_2} \big(\sum_{\mu_1=0}^{\infty} a_{\mu_1,\nu_2}^2 \big)^{\frac{q_2}{2}} \Big)^{\frac{1}{q_2}},$$

$$2^{-n_2(\alpha_2-\theta_2)} \left(\int\limits_{2^{-n_2}}^{1} t_2^{-p_2(\alpha_2-\theta_2)} \omega_{0,\alpha_2}^{p_2}(f, t_2)_{p_1 q_2} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \asymp$$

$$\asymp 2^{-n_2(\alpha_2-\theta_2)} \Big(\sum_{\nu_2=0}^{n_2} 2^{\nu_2 p_2(\alpha_2-\theta_2)} \Big(\sum_{\mu_1=0}^{\infty} a_{\mu_1,\nu_2}^2 \Big)^{\frac{p_2}{2}} \Big)^{\frac{1}{p_2}} + \Big(\sum_{\mu_1=0}^{\infty} \sum_{\mu_2=n_2+1}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2}^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Аналогичные теоремы для функции одного переменного доказаны в работе [9], для смешанных модулей гладкости – в работах [10], [11].

Замечание. Из теоремы 2 следует следующая оценка частных модулей гладкости производной функции через частные модули гладкости самой функции.

Пусть $f \in \Lambda_{p_1 p_2}, \alpha_i > \theta_i, \delta_i \in (0, 1), i = 1, 2.$ *Тогда*

I. при $1 < p_1 < q_1 < \infty, \theta_1 = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}, 1 < p_2 < \infty, \rho_1 > 0$

$$\delta_1^{\alpha_1-\theta_1} \left(\int\limits_{\delta_1}^{1} t_1^{-p_1(\alpha_1-\theta_1)} \omega_{\alpha_1,0}^{p_1}(f^{(\rho_1,0)}, t_1)_{q_1 p_2} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \ll$$

$$\ll \left(\int\limits_0^{\delta_1} t_1^{-q_1(\rho_1+\theta_1)} \omega_{\alpha_1+\rho_1,0}^{q_1}(f, t_1)_{p_1 p_2} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{1}{q_1}},$$

II. при $1 < p_2 < q_2 < \infty, \theta_2 = \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}, 1 < p_1 < \infty, \rho_2 > 0$

$$\delta_2^{\alpha_2-\theta_2} \left(\int\limits_{\delta_2}^{1} t_2^{-p_2(\alpha_2-\theta_2)} \omega_{0,\alpha_2}^{p_2}(f^{(0,\rho_2)}, t_2)_{p_1 q_2} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \ll$$

$$\ll \left(\int\limits_0^{\delta_2} t_2^{-q_2(\theta_2+\rho_2)} \omega_{0,\alpha_2+\rho_2}^{q_2}(f, t_2)_{p_1 p_2} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q_2}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Коляда В. И.* О соотношениях между модулями непрерывности в разных метриках // Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1988. Т. 181. С. 117–136.

[2] *Ульянов П. Л.* Вложение некоторых классов функций H_p^ω // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968. Т. 32, № 3. С. 649–686.

[3] *Ульянов П. Л.* Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках // Матем. сб. 1970. Т. 81(123), № 1. С. 104–131.

[4] *Потапов М. К., Симонов Б. В., Тихонов С. Ю.* Дробные модули гладкости. М : МАКС Пресс, 2016. 338 с.

[5] *Потапов М. К., Симонов Б. В.* Свойства частного модуля гладкости положительного порядка в смешанной метрике // Современные проблемы математики и механики: Труды мех-мат. ф-та МГУ имени М.В. Ломоносова. Т. X. Математика, Вып. 1. К 60-летию семинара "Тригонометрические и ортогональные ряды". М. : Изд-во Попечительского совета при мех.-мат. ф-те МГУ им. М.В. Ломоносова, 2014. С. 58–71.

[6] *Потапов М. К., Симонов Б. В.* Усиленные неравенства Ульянова для частных модулей гладкости функций из пространств с различными смешанными метриками // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2019. № 3. С. 26–39.

[7] *Потапов М. К., Симонов Б. В.* Оценки частных модулей гладкости в метриках $L_{p_1,\infty}$ и L_{∞,p_2} через частные модули гладкости в метриках L_{p_1,p_2} // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2020. № 1. С. 3–17.

[8] *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М : Наука, 1975. 480 с.

[9] *Potapov M. K., Simonov B. V., Tikhonov S. J.* Relations for moduli of smoothness in various metrics: functions with restrictions on the Fourier coefficients // Jaen J. Approx. 2009. Vol. 1(2). P. 205–222.

[10] *Потапов М. К., Симонов Б. В.* Уточнение неравенства Ульянова для смешанных модулей гладкости функций с лакунарными коэффициентами // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2012. № 1. С. 18–24.

[11] *Потапов М. К., Симонов Б. В.* Свойства смешанных модулей гладкости функций с лакунарными коэффициентами // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2014. № 1. С. 6–17.

УДК 517.17+517.51

О кратном интеграле периодической функции нескольких переменных[1]

Г. К. Соколова, С. С. Орлов (Иркутск, Россия)
98gal@mail.ru, orlov_sergey@inbox.ru

Заметка посвящена исследованию свойства периодичности функций нескольких действительных переменных. Доказывается теорема о представлении кратного интеграла с переменными верхними пределами периодической функции многих действительных переменных, что является обобщением леммы о представлении интеграла периодической функции одной переменной в виде суммы линейной и периодической функций. Без ограничения общности, рассматриваются функции, имеющие в качестве множества периодов прямоугольную решётку.

Ключевые слова: периодическая функция многих действительных переменных, множество периодов, кратный интеграл.

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке Правительства Иркутской области и РФФИ (проект № 20-41-385002 р_Наставник).

On the multiple integral of a periodic multivariate function[1]

G. K. Sokolova, S. S. Orlov (Irkutsk, Russia)
98gal@mail.ru, orlov_sergey@inbox.ru

This note deals with the study of the periodicity property of a multivariate functions. Theorem on the representation of a multiple integral with variable upper boundaries of a periodic multivariate function is proved. This theorem is a generalization to the multidimensional case of the Lemma on the representation of the integral of a periodic function of one variable as a sum of linear and periodic functions. Without loss of generality, we consider functions with a rectangular lattice as the set of periods.

Keywords: periodic functions of several variables, set of periods, multiple integral.

Acknowledgements: this work was supported by the Russian Foundation for Basic Research and the Goverment of the Irkutsk Region (project No. 20-41-385002).

Ранее в заметке [1] была описана структура множества P_f периодов периодической функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, и показано, что, не ограничивая общности, всякую периодическую функцию $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ можно считать периодической по первым m_1 переменным и постоянной по следующим m_2 переменным. Всюду далее будем полагать, что функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является периодической по всем переменным с множеством периодов P_f решёткой $\Lambda(\bar{T}_1, \bar{T}_2, \ldots, \bar{T}_n)$, порождённой векторами $\bar{T}_i = T_i \bar{\mathrm{e}}_i$, система векторов $\{\bar{\mathrm{e}}\}_{i=1}^n$ означает классический базис Галеля, и $i = 1, 2, \ldots, n$.

Следующая теорема является обобщением леммы о представлении интеграла периодической функции одной переменной [2, стр. 57].

Теорема. *Пусть функция $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ непрерывна по совокупности всех переменных $x_1,x_2,\ldots,x_n$ и является периодической с множеством периодов P_f, тогда имеет место равенство*

$$\int\limits_{P_{J_n}} f(t_1,t_2,\ldots,t_n)\,dt_1dt_2\ldots dt_n =$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n}\ \prod_{i\in J_n\setminus\{i_1,\ldots,i_k\}} x_i \int\limits_{P_{i_1,\ldots,i_k}} S_{J_n\setminus\{i_1,\ldots,i_k\}}\,dt_{i_1}dt_{i_2}\ldots dt_{i_k}+$$

$$+(-1)^{n-1}\prod_{i\in J_n}x_i\ \ S_{J_n}+\varepsilon(\bar r),\ \ \bar r\in\mathbb{R}^n,\quad (1)$$

где $P_{i_1,\ldots,i_k}=[0,x_{i_1}]\times\ldots\times[0,x_{i_k}]$ обозначает k-мерный параллелепипед, $J_n=\{1,2,\ldots,n\}$ — множество индексов, а выражение

$$S_{i_1,\ldots,i_k}=\frac{1}{\mu(P_{\Lambda(\bar T_{i_1},\ldots,\bar T_{i_k})})}\int\limits_{P_{\Lambda(\bar T_{i_1},\ldots,\bar T_{i_k})}} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_{i_1}dx_{i_2}\ldots dx_{i_k}$$

определяет среднее значение функции f по переменным $x_{i_1},\ldots,x_{i_k}$ на фундаментальном параллелепипеде $P_{\Lambda(\bar T_{i_1},\ldots,\bar T_{i_k})}$ решётки $\Lambda(\bar T_{i_1},\ldots,\bar T_{i_k})$ меры Жордана $\mu(P_{\Lambda(\bar T_{i_1},\ldots,\bar T_{i_k})})$, функция $\varepsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ периодическая с множеством периодов P_ε таким, что $\mathrm{P}_f\subseteq\mathrm{P}_\varepsilon$.

При $n=1$ приведённая выше теорема играет сущестенную роль при построении периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений [2], а также интегральных уравнений, например, [3]. Несмотря на громоздкий вид, формула (1) имеет простую структуру и напоминает формулу включения-исключения из теории множеств.

Доказательство заключается в проверке периодичности функции $\varepsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ с периодами $\bar T_i=T_i\bar{\mathrm{e}}_i$, где, здесь и всюду далее, $i\in J_n$. Пусть функция $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ периодическая с множеством периодов P_f, и $j\in J_n$. Тогда имеет место соотношение

$$\varepsilon(\bar r+\bar T_j)-\varepsilon(\bar r)=\int\limits_{P_{J_n\setminus\{j\}}}\int\limits_0^{T_j} f(t_1,\ldots,t_n)\,dt_1dt_2\ldots dt_n-$$

$$-\sum_{k=1}^{n-2}(-1)^{k-1}\sum_{\substack{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n\\ i_\ell\neq j,\ \ell\in J_n}}\ \prod_{i\in J_n\setminus\{i_1,\ldots,i_k,j\}} x_i\int\limits_0^{T_j}\int\limits_{P_{i_1,\ldots,i_k}} S_{J_n\setminus\{i_1,\ldots,i_k,j\}}\,dt_{i_1}\ldots dt_{i_k}-$$

$$-\sum_{k=1}^{n-2}(-1)^k \sum_{\substack{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n\\ i_\ell\neq j,\ \ell\in J_n}} \prod_{i\in J_n\setminus\{i_1,\ldots,i_k,j\}} x_i \int_0^{T_j} \int_{P_{i_1,\ldots,i_k}} S_{J_n\setminus\{i_1,\ldots,i_k,j\}}\,dt_{i_1}\ldots dt_{i_k}-$$

$$-\int_0^{T_j}\int_{P_{J_n}\setminus\{j\}} f(t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n-(-1)^{n-2}\prod_{i\in J_n\setminus\{j\}} x_i\int_0^{T_j} S_{J_n\setminus\{j\}}\,dt_j-$$

$$-(-1)^{n-1}\prod_{i\in J_n\setminus\{j\}} x_i \int_0^{T_j} S_{J_n\setminus\{j\}}dt_j=0,$$

правая часть которого обращается в нуль, в силу выполнения равенства

$$\int_{P_{J_n\setminus\{j\}}}\int_{x_j}^{x_j+T_j} f(t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n=\int_{P_{J_n\setminus\{j\}}}\int_0^{T_j} f(t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n,$$

левая часть которого не зависит от переменной интегрирования x_j, что следует из периодичности с периодом T_j функции f по этой переменной и соотношения

$$\partial_{x_1x_2\ldots x_n}\int_{P_{J_n\setminus\{j\}}}\int_{x_j}^{x_j+T_j} f(t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n=f(\bar r+\bar T_j)-f(\bar r),$$

которое в силу непрерывности функции f по совокупности переменных $x_1,x_2,\ldots,x_n$ является верным. Таким образом, периоды $\bar T_i=T_i\bar{\mathrm e}_i$, $i\in J_n$, порождающие множество периодов $\mathrm P_f$ функции f являются периодами и функции ε, т. е. имеет место включение $\mathrm P_f\subseteq \mathrm P_\varepsilon$.

Отметим, что *представление* (1) *инвариантно относительно выбора периодов по переменным* x_i, $i\in J_n$ *функции* $f:\mathbb R^n\to\mathbb R$. Поскольку функция $f:\mathbb R^n\to\mathbb R$ непрерывна на $\mathbb R^n$ по совокупности переменных, то функция $\varepsilon:\mathbb R^n\to\mathbb R$ имеет непрерывную всюду на $\mathbb R^n$ смешанную производную $\partial_{x_1\ldots x_n}\varepsilon$ и является решением следующей задачи типа Гурса

$$\partial_{x_1\ldots x_n}\varepsilon=f(\bar r)-\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} S_{J_n\setminus\{i_1,\ldots,i_k\}}-(-1)^{n-1}S_{J_n},$$

$$\varepsilon|_{x_j=0}=\varepsilon|_{x_i=0}=0,\ i,j\in J_n,$$

которая является однозначно разрешимой [4, с. 298]. Отсюда немедленно следует, что *представление* (1) *единственно*. Если функция $f:\mathbb R^n\to\mathbb R$

тождественно постоянна или представима как сумма функций, которые зависят от каждой переменной с отдельности, т. е.

$$f(\bar{r}) = f_1(x_1) + \ldots + f_n(x_n),$$

тогда уравнение задачи типа Гурса окажется однородным $\partial_{x_1 \ldots x_n} \varepsilon = 0$, и рассматриваемая задача будет иметь тождественно нулевое решение. Иными словами, в этом случае, множество периодов функции $\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^n$.

Следующее утверждение является прямым следствием приведённой выше теоремы. Введём обозначение

$$F(\bar{r}) = \int\limits_{P_{J_n}} f(t_1, t_2, \ldots, t_n)\, dt_1 dt_2 \ldots dt_n, \;\; \bar{r} \in \mathbb{R}^n,$$

где P_{J_n} — n-мерный параллелепипед из теоремы 1.

Следствие. *Пусть* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *является непрерывной функцией по совокупности переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *и периодической с решёткой периодов* P_f. *Тогда для того чтобы кратный интеграл* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *был периодической функцией по всем переменным* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *необходимо и достаточно, чтобы для каждого* $i \in J_n$ *выполнялось соотношение*

$$\int\limits_0^{T_i} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, \ldots, x_n)\, dt = 0,$$

при всех $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$. *При этом* $\mathrm{P}_F = \mathrm{P}_f$.

Приведённые результаты планируется применить к изучению вопроса существования периодических решений дифференциальных уравнений в частных производных, в том числе, и к построению множеств периодов найденных решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Соколова Г. К.* О множестве периодов периодической функции нескольких переменных // Лобачевские чтения — 2018: Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского. Казань : Изд-во Казанского математического общества, Изд-во Академии наук РТ, 2018. Т. 56. С. 273–277.

[2] *Еругин Н. П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск: Наука и техника, 1979. 744 с.

[3] *Малютина М. В., Орлов С. С.* Периодическое решение обобщенного интегрального уравнения Абеля первого рода // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2017. № 4 (44). С. 58–69.

[4] *Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В. В.* Лекции по математической физике. М.: Изд-во МГУ, 1993. 352 с.

УДК 517.518.87

Об аппроксимации гиперсингулярного интеграла по действительной оси[1]

Ю. С. Солиев (Москва, Россия)
su1951@mail.ru

Построены и исследованы интерполяционные квадратурные формулы с узлами различной кратности для гиперсингулярного интеграла по действительной оси для плотностей из пространства целых функций экспоненциального типа.

Ключевые слова: гиперсингулярный интеграл, целые функции экспоненциального типа, интерполяция, квадратурные формулы.

On the approximation of the hypersingular integral along the real axis[1]

Yu. S. Soliev (Moscow, Russia)
su1951@mail.ru

Interpolation quadrature formulas with nodes of various multiplicities for a hypersingular integral along the real axis for densities from the space of integer functions of exponential type are constructed and investigated.

Keywords: hypersingular integral, exponential integer functions, interpolation, quadrature formulas.

Рассмотрим понимаемый в смысле конечного значения по Адамару сингулярный интеграл

$$A_q f = A_q(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{(t-x)^q}dt, q = 2, 3, ..., \qquad (1)$$

где $f(x)$ - плотность интеграла, ограниченная на вещественной оси R функция.

Пусть $L_p(R)$ $(1 < p < \infty)$ - пространство всех измеримых на R функций f с обычной нормой, $\omega_k(f,t)_p = \omega_k(f,t)_{L_p}$ - модуль гладкости k-го порядка f в $L_p(R)$, $L_p^r(R)$ - подпространство функций $f \in L_p(R)$, для которых производная $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна на R и $\|f^{(r)}\|_p = \|f^{(r)}\|_{L_p} < \infty$, $B_{p,\sigma}$ - множество целых функций экспоненциального типа $\le \sigma$, принадлежащих $L_p(R)$.

Для $f \in B_{p,\sigma}$ введем [1], [2] интерполяционный оператор

$$L_\sigma f = L_\sigma(f;x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right) \sin c\sigma(x-\frac{k\pi}{\sigma}), \sin cx = \frac{\sin x}{x}, \sigma > 0. \quad (2)$$

Аппроксимируя плотность интеграла (1) выражением (2), получим квадратурную формулу

$$A_q f = A_q(L_\sigma f; x) + R_{\sigma q} f, \quad (3)$$

где $R_{\sigma q} f = R_{\sigma q}(f;x)$ - остаточный член. Приведем явный вид формулы (3) при $q = 2$:

$$A_2 f = A_2(L_\sigma f; x) + R_{\sigma 2} f = \\ = \frac{\sigma}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right)\left(\sin c^2 \frac{\sigma x - k\pi}{2} - 2 \sin c(\sigma x - k\pi)\right) + R_{\sigma 2} f. \quad (4)$$

Теорема 1. *Пусть $f \in L_p^r(R) \cap B_{p,\sigma}$, $r = 1, 2, ...$, $1 \le p \le \infty$, $\sigma \ge 1$. Если $f(x) = O\left((\mid x \mid +1)^{-d}\right)$, $dp \ge 1$, $x \in R$, то для остаточного члена квадратурной формулы (3) справедлива оценка*

$$\|R_{\sigma q} f\|_p \le C_{r,p,q} \sigma^{-r+q} \omega_1 \left(f^{(r)}, \frac{1}{\sigma}\right)_p,$$

где $C_{r,p,q}$ - постоянная, зависящая только от r, p и q.

Из теоремы 1 и известных результатов по неравенствам разных метрик (см., напр., [3]) вытекает

Следствие. Пусть в условиях теоремы 1 $\omega_1(f,\delta)_p = 0(\delta^\alpha)$, $0 \le \alpha \le 1$. Тогда для $R_{\sigma q} f$ справедлива равномерная оценка

$$\|R_{\sigma q} f\|_C = O\left(\sigma^{-r-\alpha+q+\frac{1}{p}}\right), r + \alpha \ge q + \frac{1}{p}.$$

Заметим, что если $f \in B_{p,\sigma}$ и 2π - периодична, то квадратурная формула (4) точна для любого тригонометрического полинома вида $\sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$, $n \le [\sigma]$ ($[\sigma]$ - целая часть σ) (см. [4]). Далее, для целых функций экспоненциального типа , по теореме М. Картрайт [3], условие ограниченности $f(x)$ на R можно заменить на условие $|f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right)| \le M$ ($M \ge 0$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$) .

Рассмотрим квадратурную формулу с кратными узлами для интеграла (1).

По аналогии с [5] для $f \in B_{p,\sigma}$ введем интерполяционный оператор $H_\sigma f = H_\sigma(f;x)$, удовлетворяющий условиям $H_\sigma^{(v)}\left(f;\frac{k\pi}{\sigma}\right) = f^{(v)}\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right)$ $(v = \overline{0,m-1})$:

$$H_\sigma f = H_\sigma\left(f;x\right) =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sin c^m \sigma\left(x-\frac{k\pi}{\sigma}\right)\sum_{v=0}^{m-1}\frac{1}{v!}\left(x-\frac{k\pi}{\sigma}\right)^v f^{(v)}\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right).$$

Тогда

$$A_q f = A_q\left(H_\sigma f;x\right) + R_{\sigma m}^{(q)} f, \tag{5}$$

где $R_{\sigma m}^{(q)} f = R_{\sigma m}^{(q)}(f;x)$ - остаточный член.

При $q=2$ квадратурная формула (5) примет вид:

$$A_2 f = A_2\left(H_\sigma f;x\right) + R_{\sigma m}^{(2)} f =$$

$$= \frac{1}{2^{2n-1}\sigma^{2n}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{v=0}^{2n-1}\frac{1}{v!}f^{(v)}\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right)\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^{n-s+1}C_{2n}^{s}\left(x-\frac{k\pi}{\sigma}\right)^{-2n+v-1}$$

$$(\sum_{\mu=1}^{2n-v}\frac{1}{(\mu-1)!}(2n-v-\mu+1)\left(2\sigma(n-s)\left(x-\frac{k\pi}{\sigma}\right)\right)^{\mu-1}\cos\frac{\mu\pi}{2}+$$

$$+2\sigma(n-s)\left(x-\frac{k\pi}{\sigma}\right)\cos 2\sigma(n-s)\left(x-\frac{k\pi}{\sigma}\right)-(2n-v)\sin 2\sigma(n-s)$$

$$\left(x-\frac{k\pi}{\sigma}\right)) + R_{\sigma m}^{(2)} f, m=2n;$$

$$A_2 f = A_2\left(H_\sigma f;x\right) + R_{\sigma m}^{(2)} f =$$

$$\frac{1}{2^{2n-2}\sigma^{2n-1}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{v=0}^{2n-2}\frac{1}{v!}f^{(v)}\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right)\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^{n-s+1}C_{2n-1}^{s}\left(x-\frac{k\pi}{\sigma}\right)^{-2n+v}$$

$$(\sum_{\mu=1}^{2n-v-1}\frac{1}{(\mu-1)!}(2n-v-\mu)\left(\sigma(2n-2s-1)\left(x-\frac{k\pi}{\sigma}\right)\right)^{\mu-1}\sin\frac{\mu\pi}{2}-$$

$$-\sigma(2n-2s-1)\left(x-\frac{k\pi}{\sigma}\right)\sin\sigma(2n-2s-1)\left(x-\frac{k\pi}{\sigma}\right)-$$

$$(2n-v-1)\cos\sigma(2n-2s-1)\left(x-\frac{k\pi}{\sigma}\right)) + R_{\sigma m}^{(2)} f, m=2n-1;$$

где C_n^k - биноминальные коэффициенты.

Теорема 2. *Пусть* $f \in L_p^r(R) \cap B_{p,\sigma}$, $r = 1, 2, ...,$ $1 \le p \le \infty$, $\sigma \ge 1$, $\omega_k(f, \delta)_p = 0(\delta^\alpha)$, $0 \le \alpha \le 1$ *и* $f^{(\nu)}(x) = O\left((|\, x \,| + 1)^{-d_\nu}\right)$, $d_\nu p \ge 1$, $\nu = \overline{0, m-1}$, $x \in R$. *Тогда*

$$\|R_{\sigma m}^{(q)} f\|_p = O\left(\sigma^{-r-\alpha+q+m-1}\right), r + \alpha \geqq +m - 1.$$

Следствие. В условиях теоремы 2 для $R_{\sigma q}^{(q)} f$ справедлива равномерная оценка

$$\|R_{\sigma q}^{(q)} f\|_C = O\left(\sigma^{-r-\alpha+q+m-1+\frac{1}{p}}\right), r + \alpha \geqq +\frac{1}{p} + m - 1.$$

В заключение отметим, что аналогичные вопросы для интеграла $A_1 f$ рассматривались в работе [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Rahman Q. I., Vertesi P.* On the L^p convergence of Lagrange interpolating entire functions of exponential type // J. Approx. Theory. 1992. Vol. 69. P. 302–317.

[2] *Gensun F.* Whittaker-Kotelnikov-Shannon sampling theorem and aliasing error // J. Approx. Theory. 1996. Vol. 85. P. 115–131.

[3] *Ибрагимов И. И.* Теория приближения целыми функциями. Баку : Элм, 1979. 468 с.

[4] *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. Москва : Наука, 1965. 408 с.

[5] *Хургин Я. И., Яковлев В. П.* Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике. Москва : ГИФМЛ, 1962. 220 с.

[6] *Солиев Ю. С.* Об аппроксимации преобразования Гильберта
Материалы Международной конф. Воронежская зимняя матем. школа С.Г.Крейна - 2022. Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2022.

УДК 517.9

О сходимости порядкосохраняющего слабого жадного алгоритма для подпространств, порожденных ядром Сегё в пространстве Харди[1]

К. С. Сперанский, П. А. Терехин (Саратов, Россия)
konstantin.speransky@yahoo.com, terekhinpa@mail.ru

Мы рассматриваем представляющие свойства подпространств, порожденных ядром Сеге. Как основной результат мы доказываем критерий сходимости порядкосохраняющего слабого жадного алгоритма для подпространств порожденных ядром Сеге в пространстве Харди.

Ключевые слова: воспроизводящее ядро, ядро Сеге, пространство Харди, слабый жадный алгоритм.

On the convergence of the order-preserving weak greedy algorithm for subspaces generated by the Szego kernel in the Hardy space[1]

K. S. Speransky, P. A. Terekhin (Saratov, Russia)
konstantin.speransky@yahoo.com, terekhinpa@mail.ru

We consider representing properties of subspaces generated by the Szego kernel. As the main result we prove the convergence criteria of the Order-Preserving Weak Greedy Algorithm for subspaces generated by the Szego kernel in the Hardy space.

Keywords: reproducing kernel, Szego kernel, Hardy Space, weak greedy algorithm.

Построенный нами в работе [1] фрейм на основе дискретизированных ядер Сеге являлся безусловной системой представления в пространстве Харди, поэтому возникает вопрос об алгоритме нахождения коэффициентов разложения, который бы сохранил порядок элементов в естественной нумерации.

Определение 1. Пространством Харди H^2 называется пространство, состоящее из всех аналитических функций $f(z)$ в единичном диске $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ для которых конечна норма

$$\|f\|_{H^2} = \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{it}) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Определение 2. Воспроизводящее ядро K пространства H^2 называется ядром Сеге и имеет вид

$$K(z, \zeta) = K_\zeta(z) = \frac{1}{1 - \bar{\zeta} z}, \quad z, \zeta \in \mathbb{D}.$$

Для решения задачи нахождения коэффициентов системы представления широко применяются слабые жадные алгоритмы. В общем случае, слабый жадный алгоритм не дает ряда по естественно упорядоченной системе и, как правило, этот ряд не является безусловно сходящимся. Выходом из сложившейся ситуации может быть использование порядкосохраняющего слабого жадного алгоритма предложенного и изученного А. В. Сильниченко в работе [2].

В качестве подпространств L_k, $k = 1, 2, \dots$ по которым будет идти приближение в порядкосохраняющем слабом жадном алгоритме выберем пространства порожденные ядрами Сеге $K_{\lambda_{k,j}}$, $j = 0, \dots, n_k - 1$, которые дискретизированы в точках $\lambda_{k,j} \in \mathbb{D}$:

$$L_k := \left[K_{\lambda_{k,j}}\right]_{j=0}^{n_k-1} = \operatorname{span}\left\{K_{\lambda_{k,j}}\right\}_{j=0}^{n_k-1}, \quad k = 1, 2, \dots.$$

Выберем точки дискретизации ядер Сеге следующим образом

$$\lambda_{k,j} = r_k e^{\frac{2\pi i j}{n_k}}, \qquad j = 0, 1, \dots, n_k - 1, \tag{1}$$

где мы предполагаем, что

$$r_k \nearrow 1, \qquad n_k \nearrow \infty \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{2}$$

Теорема. (см. [3]) Пусть последовательность подпространств $\{L_k\}_{k=1}^{\infty}$ порождена ядрами Сеге дискретизированными в точках удовлетворяющих (1) и (2). Тогда порядкосохраняющий слабый жадный алгоритм сходится в пространстве H^2 тогда и только тогда, когда r_k и n_k удовлетворяют предельному соотношению

$$\limsup_{k\to\infty} n_k(1 - r_k) > 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Speransky K. S., Terekhin P. A.* A representing system generated by the Szegö kernel for the Hardy space // Indag. Math. 2018. Vol. 29(5). P. 1318–1325.

[2] *Сильниченко А. В.* О сходимости порядкосохраняющих слабых жадных алгоритмов // Матем. заметки. 2008. Т. 84(5). С. 795–800.

[3] *Speransky K. S.* On the convergence of the order-preserving weak greedy algorithm for subspaces generated by the Szego kernel in the Hardy space // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 3. С. 336–342.

УДК 517.538.52+517.538.53

О полиортогональных системах функций[1]

А. П. Старовойтов, Е. П. Кечко (Гомель, Беларусь)
svoitov@gsu.by, ekechko@gmail.com

В данной работе с помощью процесса полиортогонализации произвольной конечной подсистемы линейно независимой системы функций $\varphi = \{\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_n(x), ...\}$ в предгильбертовых функциональных пространствах, порождённых мерами $\mu_1, ..., \mu_k$, построены полиортогональные системы функций. Основным результатом является обобщение на многомерный случай теоремы Э. Шмидта об ортогонализации.

Ключевые слова: полиортогональне многочлены, нормальный индекс, совершенная система, определители Грама.

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь.

About polyorthogonal system of function[1]

A. P. Starovoitov, E. P. Kechko (Gomel, Belarus)
email@mail.ru

This article constructed polyorthogonal systems of functions using the process polyorthogonalization of an arbitrary of a finite subsystem of a linearly independent system of functions $\varphi = \{\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_n(x), ...\}$ in pre-Hilbert function spaces generated by measures $\mu_1, ..., \mu_k$. The main result is a generalization of E. Schmidt's theorem on orthogonalization to the multidimensional case.

Keywords: polyorthogonal polynomials, normal index, perfect system, Gram determinants.

Acknowledgements: this work was supported by the Ministry of Education of the Republic of Belarus.

Пусть $\mu_1, ..., \mu_k$ – положительные борелевские меры на вещественной прямой, носителями которых являются отрезки $\Delta_1, ..., \Delta_k$. Рассмотрим систему функций $\varphi = \{\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_n(x), ...\}$, каждая из которых измерима на отрезке Δ_j относительно меры μ_j при всех $j = 1, ..., k$. Будем считать, что система φ линейно независима на каждом из отрезков Δ_j и

$$\int\limits_{\Delta_j} |\varphi_p(x)|^2 d\mu_j(x) < +\infty,\ j = 1, ..., k;\ p = 0, 1, \dots . \qquad (1)$$

Если выполняются условия (1), то кратко будем писать, что $\varphi \in L^2_\mu$, $\mu = \{\mu_1, ..., \mu_k\}$. Скалярное произведение функций $f(x)$ и $g(x)$ в предгильбертовом пространстве, порожденном мерой μ_j, обозначим через

$$(f, g)^j = \int\limits_{\Delta_j} f(x)g(x)d\mu_j(x).$$

Везде в дальнейшем предполагаем, что $\varphi \in L^2_\mu$. Множество k–мерных мультииндексов (индексов) $n = (n_1, ..., n_k)$, т.е. упорядоченных k целых неотрицательных чисел, обозначим через $\mathbb{Z}^k_+$. Порядок мультииндекса $n = (n_1, ..., n_k)$ – это сумма $|n| := n_1 + ... + n_k$.

Определение 1. *Пусть $n = (n_1, ..., n_k) \in \mathbb{Z}^k_+$ – ненулевой мультииндекс. Тогда $\psi_n(x) = \alpha_0\varphi_0(x) + ... + \alpha_{|n|}\varphi_{|n|}(x)$, где $\alpha_j \in \mathbb{R}$ и $\alpha_0^2 + ... + \alpha_{|n|}^2 \neq 0$, будем называть n-ой полиортогональной функцией для набора мер μ, порожденной системой φ , если*

$$\int\limits_{\Delta_j} \psi_n(x)\varphi_p(x)d\mu_j(x) = 0,\ p = 0, 1, ..., n_j - 1;\ j = 1, ..., k. \tag{2}$$

Здесь предполагается, что $n_j \neq 0$. Если $n_{j_0} = 0$, то в (2) индекс j пробегает значения $\{1, ..., j_0-1, j_0+1, ..., k\}$, т.е. мера μ_{j_0} в определении полиортогональной функции $\psi_n(x)$ не учитывается.

Если в определении 1 положить $k = 1$ (или индекс $n = (n_1, 0, ..., 0)$), то отождествляя меру μ_1 с μ, а n_1 с $n \in \mathbb{Z}^1_+$, будем находится в условиях теоремы Э. Шмидта, т.е. n-ая полиортогональная функция является n-ой ортогональной функцией и для неё имеет место хорошо известная формула Шмидта (подробнее см., например, [1, гл. 3, § 1])

$$\psi_n(x) = \begin{vmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_0) & \dots & (\varphi_n, \varphi_0) \\ (\varphi_0, \varphi_1) & (\varphi_1, \varphi_1) & \dots & (\varphi_n, \varphi_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_0, \varphi_{n-1}) & (\varphi_1, \varphi_{n-1}) & \dots & (\varphi_n, \varphi_{n-1}) \\ \varphi_0(x) & \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \end{vmatrix}. \tag{3}$$

В представлении $\psi_n(x) = \alpha_0\varphi_0(x) + ... + \alpha_n\varphi_n(x)$, которое легко получить из формулы (3), коэффициент α_n равен определителю Грама [2]

$$G_n = \begin{vmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_0) & \dots & (\varphi_{n-1}, \varphi_0) \\ (\varphi_0, \varphi_1) & (\varphi_1, \varphi_1) & \dots & (\varphi_{n-1}, \varphi_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_0, \varphi_{n-1}) & (\varphi_1, \varphi_{n-1}) & \dots & (\varphi_{n-1}, \varphi_{n-1}) \end{vmatrix}$$

для системы функций $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_{n-1}(x)\}$. Хорошо известно (см., например, [1, гл. 3, § 1]), что для системы $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_{n-1}(x)\}$ определитель Грама G_n отличен от нуля тогда и только тогда, когда эта система линейно независима на отрезке Δ.

Полиортогональная функция условиями (2) определяется не однозначно, а с точностью до числового множителя. Эта неединственность может быть и более существенной (см., например, [3]– [4]).

Определение 2. *Будем говорить, что n-я полиортогональная функция $\psi_n(x)$ однозначно определяется условиями (2), если для любых двух таких функций $\psi_n(x)$, $\psi_n^*(x)$ найдётся действительное число λ, что $\psi_n(x) \equiv \lambda\psi_n^*(x)$ на всех отрезках Δ_j.*

Нашей целью является нахождение необходимых и достаточных условий на индекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ и систему $\mu = \{\mu_1, ..., \mu_k\}$, при которых n-я полиортогональная функция определяется однозначно. В одномерном случае однозначность вытекает из линейной независимости системы φ.

Пусть $n \in \mathbb{Z}_+^k$ – ненулевой мультииндекс. Для $n_j \neq 0$ определим матрицы порядка $n_j \times (|n|+1)$

$$F^j = \begin{vmatrix} (\varphi_0,\varphi_0)^j & (\varphi_1,\varphi_0)^j & \dots & (\varphi_{|n|},\varphi_0)^j \\ (\varphi_0,\varphi_1)^j & (\varphi_1,\varphi_1)^j & \dots & (\varphi_{|n|},\varphi_1)^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_0,\varphi_{n_j-1})^j & (\varphi_1,\varphi_{n_j-1})^j & \dots & (\varphi_{|n|},\varphi_{n_j-1})^j \end{vmatrix},$$

а затем матрицу порядка $|n| \times (|n|+1)$

$$F_n = \begin{bmatrix} F^1 \ F^2 \ \dots \ F^k \end{bmatrix}^T := \begin{bmatrix} F^1 \\ \vdots \\ F^k \end{bmatrix}.$$

При $n_j = 0$ матрица F_n не содержит блок-матрицу F^j. Если, например, мультииндекс $n = (n_1, 0, ..., 0)$, то матрица F_n состоит только из одного блока F^1 и является матрицей Грама: она состоит из элементов определителя (3), стоящих выше последней строки этого определителя.

Если к матрице F_n добавить в качестве последней строки строку

$$E(x) = \left(\varphi_0(x) \ \ \varphi_1(x) \ ... \ \varphi_{|n|}(x) \right),$$

то получим квадратную матрицу. Определитель этой матрицы имеет вид

$$det \begin{bmatrix} F_n \\ E(x) \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} (\varphi_0,\varphi_0)^1 & (\varphi_1,\varphi_0)^1 & \dots & (\varphi_{|n|},\varphi_0)^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_0,\varphi_{n_1-1})^1 & (\varphi_1,\varphi_{n_1-1})^1 & \dots & (\varphi_{|n|},\varphi_{n_1-1})^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_0,\varphi_0)^k & (\varphi_1,\varphi_0)^k & \dots & (\varphi_{|n|},\varphi_0)^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_0,\varphi_{n_k-1})^k & (\varphi_1,\varphi_{n_k-1})^k & \dots & (\varphi_{|n|},\varphi_{n_k-1})^k \\ \varphi_0(x) & \varphi_1(x) & \dots & \varphi_{|n|}(x) \end{vmatrix}.$$

Определение 3. *Индекс* $n \in \mathbb{Z}_+^k$ *будем называть слабо нормальным для* μ, *если ранг матрицы* F_n *максимальный, т.е. равен* $|n|$.

Определение 4. *Систему мер* $\mu = \{\mu_1, ..., \mu_k\}$ *будем называть слабо совершенной, если все ненулевые индексы* $n \in \mathbb{Z}_+^k$ *являются слабо нормальными для* μ.

Теорема 1. *Для того, чтобы для ненулевого индекса* $n \in \mathbb{Z}_+^k$ *и системы мер* $\mu = \{\mu_1, ..., \mu_k\}$ n*-ая полиортогональная функция* $\psi_n(x)$ *определялась условиями (2) однозначно, необходимо и достаточно, чтобы индекс* n *был слабо нормальным для* μ, *т.е.* $rang\, F_n = |n|$.

Если $rang\, F_n = |n|$, *то при определённом выборе нормирующего множителя* n*-ая полиортогональная функция представима в виде*

$$\psi_n(x) = det \begin{bmatrix} F_n \\ E(x) \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Следствие. *Полиортогональная функция* $\psi_n(x)$ *определена однозначно для всех ненулевых мультииндексов* $n \in \mathbb{Z}_+^k$ *тогда и только тогда, когда система* μ *является слабо совершенной.*

Заметим, что компонента n_j мультииндекса $n = (n_1, \ldots, n_k)$ определяет насколько значима мера μ_j в определении полиортогональной функции: чем больше n_j, тем больше условий в (2) с участием меры μ_j. Таким образом, число n_j количественно характеризует вклад меры μ_j в построение n-ой полиортогональной функции $\psi_n(x)$. В частности, если, например, $n = (n_1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}_+^k$, то мы находимся в условиях теоремы Шмидта, и формула (4) в точности совпадает с классической формулой (3).

В случае, когда $\varphi = \{1, x, x^2, ...\}$, n-ая полиортогональная функция $\psi_n(x)$ является n-ым полиортогональным многочленом. Для так называемых совершенных наборов мер μ полиортогональные многочлены хорошо изучены и нашли применение в различных областях алгебры, анализа, теоретической физики (см., например, [5]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. М.- Л. : ГИТТЛ, 1949. 688 с.

[2] *Gram J. P.* Ueber die Entwicklung reeller Funktionen in Reihen mittels der Methode der kleinsten Quadrate // Journ. für Math. 1883. Vol. 94. P. 41–73.

[3] *Старовойтов А. П., Рябченко Н. В.* О явном виде полиортогональных многочленов // Известия вузов. Математика. 2021. № 4. С. 80–89.

[4] *Старовойтов А. П., Рябченко Н. В.* Аналоги формулы Шмидта для полиортогональных многочленов первого типа // Математические заметки. 2021. Т. 110, № 3. С. 424–433.

[5] *Никишин Е. М., Сорокин В. Н.* Рациональные аппроксимации и ортогональность. М. : Наука, 1988. 256 с.

УДК 517.521

Некоторые свойства смещённых рядов Фурье – Соболева[1]

М. С. Султанахмедов (Махачкала, Россия)
Sultanakhmedov@gmail.com

Рассматриваются ряды Фурье по системам функций, ортогональных в смысле скалярного произведения типа Соболева следующего вида

$$\langle f, g\rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(c)g^{(\nu)}(c) + \int_a^b f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)\rho(t)dt.$$

Доказан ряд свойств этих рядов, таких как почленное интегрирование, дифференцирование, совпадение частичных сумм с приближаемой функцией в точке c. Кроме того, исследуется их равномерная сходимость.

Ключевые слова: ортогональность в смысле Соболева, ряды Фурье, ряды Фурье – Соболева, равномерная сходимость.

Some properties of shifted Fourier – Sobolev series[1]

M. S. Sultanakhmedov (Makhachkala, Russia)
Sultanakhmedov@gmail.com

We consider Fourier series by functions orthogonal with respect to the Sobolev type inner product of the following form

$$\langle f, g\rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(c)g^{(\nu)}(c) + \int_a^b f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)\rho(t)dt.$$

A number of properties of these series are proved, such as term-by-term integration, differentiation, coincidence of their partial sums with the approximated function at the point c. In addition, their uniform convergence is investigated.

Keywords: orthogonality in the Sobolev sense, Fourier series, Fourier – Sobolev series, uniform convergence.

Введение

Пусть система функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ ортонормирована на (a, b) с весом $\rho(x)$, т.е.

$$\int_a^b \varphi_k(x)\varphi_l(x)\rho(x)dx = \delta_{kl}, \tag{1}$$

где δ_{kl} – символ Кронекера. Через $L^p_\rho(a,b)$ обозначим пространство функций $f(x)$, измеримых на (a,b), для которых $\int\limits_a^b |f(x)|^p\rho(x)dx < \infty$.

Из (1) следует, что $\varphi_k(x) \in L^2_\rho(a,b)$ $(k = 0,1,\ldots)$. Мы добавим к этому условию ещё одно, считая, что $\varphi_k(x) \in L(a,b)$ $(k = 0,1,\ldots)$.

Тогда для произвольно заданной точки $c \in [a,b]$ мы можем определить новую систему функций:

$$\varphi^c_{r,k}(x) = \frac{(x-c)^k}{k!}, \quad k = 0,1,\ldots,r-1, \tag{2}$$

$$\varphi^c_{r,r+k}(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_c^x (x-t)^{r-1}\varphi_k(t)dt, \quad k = 0,1,\ldots. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует, что

$$(\varphi^c_{r,k}(x))^{(\nu)} = \begin{cases} \varphi_{r-\nu,k-\nu}(x), & \text{если } 0 \le \nu \le r-1,\ r \le k, \\ \varphi_{k-r}(x), & \text{если } \nu = r \le k, \\ \varphi^c_{r,k-\nu}(x), & \text{если } \nu \le k < r, \\ 0, & \text{если } k < \nu \le r. \end{cases} \tag{4}$$

Через $W^{r,c}_{L^p_\rho(a,b)}$ обозначим пространство Соболева, состоящее из функций $f(x)$, $r-1$ раз непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$, причём $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на $[a,b]$ и $f^{(r)}(x) \in L^p_\rho(a,b)$. Скалярное произведение в пространстве $W^{r,c}_{L^2_\rho(a,b)}$ определим с помощью равенства

$$\langle f,g\rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(c)g^{(\nu)}(c) + \int_a^b f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)\rho(t)dt. \tag{5}$$

Ранее в работах Шарапудинова И.И. и др. исследователей (см., напр., [1–7] и цитированную там литературу) подробно исследовался случай, когда $c = a$. Причём исследования проводились как в общем, так и для конкретных весов $\rho(x)$ и систем функций $\{\phi(x)\}_{k=0}^\infty$.

Рассматриваемое нами скалярное произведение типа Соболева является обобщением в том смысле, что c не обязательно совпадает a. Мотивацией к такому исследованию послужила гипотеза о том, что ряды Фурье по соответствующим ортогональным функциям при определённом выборе точки c могут давать лучшее приближение к исходным функциям в смысле равномерной метрики. Гипотеза находит подтверждение в ряде компьютерных экспериментов.

Скалярное произведение вида (5), соответствующие ортогональные функции, а также ряды Фурье по ним мы будем называть *смещёнными* с тем, чтобы отличить их от рассмотренных ранее (для которых $c = a$).

Ортогональность смещённых функций и ряды Фурье – Соболева по ним

Доказано следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть функции* $\varphi_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ *образуют полную в* $L^2_\rho(a,b)$ *ортонормированную с весом* $\rho(x)$ *систему на отрезке* $[a,b]$. *Тогда система* $\{\varphi^c_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$, *порождённая системой* $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^\infty$ *посредством равенств* (2) *и* (3), *полна в* $W^{r,c}_{L^2_\rho(a,b)}$ *и ортонормирована относительно скалярного произведения* (5).

Для функции $f(x) \in W^{r,c}_{L^2_\rho(a,b)}$ определим смещённый ряд Фурье – Соболева с помощью равенства

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(c)\frac{(x-c)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} f_{r,k}(t)\varphi^c_{r,k}(t)\rho(t)dt, \tag{6}$$

где

$$f_{r,k}(t) = \int_a^b f^{(r)}(t)\varphi_{k-r}(t)\rho(t)dt. \tag{7}$$

Отметим некоторые важные свойства ряда (6).

1. Если $r > 1$, то в результате почленного дифференцирования ряда (6) для $f(x)$, мы получим ряд для производной $f'(x)$, соответствующий случаю, когда вместо r фигурирует $r-1$. Другими словами

$$f'(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} f'_{r-1,k-1}\varphi^c_{r-1,k-1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(f_{r,k}\varphi^c_{r,k}(x))'. \tag{8}$$

2. Почленное интегрирование с переменным верхним пределом:

$$\int_c^x f'(t)dt \sim \sum_{k=1}^{\infty} f'_{r-1,k-1}\int_c^x \varphi^c_{r-1,k-1}(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} f_{r,k}\varphi^c_{r,k}(x). \tag{9}$$

3. Важное значение имеет свойство смешанного ряда (6), которое заключается в том, что его частичная сумма вида

$$\Phi^c_{r,N}(f,x) = \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(c)\frac{(x-c)^k}{k!} + \sum_{k=r}^{N} f_{r,k}\varphi^c_{r,k}(x) \tag{10}$$

при $N \geq r$, r-кратно совпадает с исходной функцией $f(x)$ в точке $x = c$, т.е.

$$(\Phi_{r,N}^c(f,x))_{x=c}^{(\nu)} = f^{(\nu)}(c), \quad 0 \leq \nu \leq r-1. \tag{11}$$

4. Из (4) и (10) при $0 \leq \nu \leq r-1$ следует, что

$$\left(\Phi_{r,N}^c(f,x)\right)^{(\nu)} = \sum_{n=0}^{r-1-\nu} f^{(n+\nu)}(c)\frac{(x-c)^n}{n!} +$$

$$+ \sum_{n=r-\nu}^{N-\nu} f_{r-\nu,n}^{(\nu)} \varphi_{r-\nu,n}^c(x) = \Phi_{r-\nu,N-\nu}^c(f^{(\nu)},x). \tag{12}$$

В свою очередь отсюда при $0 \leq \nu \leq r-2$ выводим

$$f^{(\nu)}(x) - \left(\Phi_{r,N}^c(f,x)\right)^{(\nu)} =$$

$$= \frac{1}{(r-\nu-2)!}\int\limits_c^x (x-t)^{r-\nu-2}\left[f^{(r-1)}(t) - \Phi_{1,N-r+1}(f^{(r-1)},t)\right]dt. \tag{13}$$

Кроме того, доказано также следующее утверждение о равномерной сходимости смещённого ряда Фурье – Соболева.

Теорема 7. *Пусть* $\frac{1}{\rho(x)} \in L(a,b)$, *а функции* $\varphi_k(x)$ $(k = 0,1,\ldots)$ *образуют полную в* $L^2_\rho(a,b)$ *ортонормированную с весом* $\rho(x)$ *систему на отрезке* $[a,b]$; $\{\varphi_{r,k}^c(x)\}_{k=0}^\infty$ *– система, ортонормированная в* $W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ *относительно скалярного произведения* (5), *порождённая системой* $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^\infty$ *посредством равенств* (2) *и* (3). *Тогда, если* $f(x) \in W^r_{L^2_\rho(a,b)}$, *то смещённый ряд Фурье – Соболева* (6) *сходится к функции* $f(x)$ *равномерно относительно* $x \in [a,b]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Шарапудинов И. И.* Системы функций, ортогональные по Соболеву, ассоциированные с ортогональной системой // Изв. РАН. Сер. матем. 2018. Т. 82, вып. 1. С. 225–258.

[2] *Шарапудинов И. И.* Ортогональные по Соболеву системы функций и некоторые их приложения // Успехи математических наук. 2019. Т. 74, вып. 4(448). С. 87–164.

[3] *Шарапудинов И. И.* Ортогональные по Соболеву системы функций и задача Коши для ОДУ // Изв. РАН. Сер. матем. 2019. Т. 83, вып. 2. С. 204–226.

[4] *Магомед-Касумов М. Г.* Система функций, ортогональная в смысле Соболева и порожденная системой Уолша // Матем. заметки. 2019. Т. 105, вып. 4. С. 545–552.

[5] *Гаджимирзаев Р. М.* О равномерной сходимости ряда Фурье по системе полиномов, порожденной системой полиномов Лагерра // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 4. С. 416–423.

[6] *Sultanakhmedov M. S.* Recurrence relations for Sobolev orthogonal polynomials // Пробл. анал. Issues Anal. 2020. Т. 9(27), вып. 2. С. 97–118.

[7] *Sultanakhmedov M. S.* Some Properties of Sobolev Orthogonal Polynomials Associated with Chebyshev Polynomials of the Second Kind // In: Kusraev A. G., Totieva Z. D. (eds) Operator Theory and Differential Equations. Trends in Mathematics. 2021. Birkhauser, Cham. P. 259–273.

УДК 517.984

Структура существенного спектра и дискретный спектр оператора энергии шести электронных систем в модели Хаббарда. Первое синглетное состояние[1]

С. М. Ташпулатов (Ташкент, Узбекистан)
sadullatashpulatov@yandex.ru, toshpul@mail.ru

Рассматривается оператор энергии шести электронных систем в модели Хаббарда и исследуется структура существенного спектра и дискретный спектр системы в одно из синглетных состояний. Показано, что в одномерном случае, существенный спектр системы в рассматриваемом случае, состоит из объединений семьи отрезков, а дискретный спектр системы состоит из не более одного собственного значение. В трехмерном случае, либо существенный спектр системы состоит из объединений семьи отрезков, а дискретный спектр системы состоит из не более одного собственного значения, либо существенный спектр системы есть объединений четырех отрезков, а дискретный спектр системы пуст, либо существенный спектр системы есть объединений двух отрезков, а дискретный спектр системы пуст, либо существенный спектр системы состоит из единственного отрезка, а дискретный спектр системы пуст.

Ключевые слова: модель Хаббарда, шести электронная система, существенный спектр, дискретный спектр, синглетное состояние.

Structure of essential spectra and discrete spectrum of the energy operator of six-electron systems in the Hubbard model. First Singlet state[1]

S. M. Tashpulatov (Tashkent, Uzbekistan)
sadullatashpulatov@yandex.ru, toshpul@mail.ru

We consider of the energy operator of six electron systems in the Hubbard model and investigated the structure of essential spectra and discrete spectrum of the system in the first singlet state. Show to in the one-dimensional case, the essential spectra of the system is consists of the union of seven segments, and discrete spectrum of the system is consists of no more than one eigenvalue. In the three-dimensional case, or the essential spectra of the system is consists of the union of seven segments, and discrete spectrum of the system is consists of no more than one eigenvalue, or the essential spectra of the system is consists of the union of four segments, and discrete spectrum of the system is empty set, or the essential spectra of the system is consists of the union of two segments, and discrete spectrum of the system is empty set, or the essential spectra of the system is consists of single segment, and discrete spectrum of the system is empty set.

Keywords: Hubbard model, six-electron system, essential spectra, discrete spectrum, singlet state.

Introduction

In the early 1970s, paper [1], where a simple model of a metal was proposed that has become a fundamental model in the theory of strongly correlated electron systems. The model proposed in [1] was called the Hubbard model after John Hubbard, who made a fundamental contribution to studying the statistical mechanics of that system. The Hubbard model is currently one of the most extensively studied multielectron models of metals [2]. Therefore, obtaining exact results for the spectrum and wave functions of the crystal described by the Hubbard model is of great interest. The spectrum and wave functions of the system of two electrons in a crystal described by the Hubbard Hamiltonian were studied in [2]. The spectrum and wave functions of the system of three and four electrons in a crystal described by the Hubbard Hamiltonian were studied in [3] and [4]. The spectrum and wave functions of the system of five electrons in a crystal described by the Hubbard Hamiltonian were studied in [5].

Hamiltonian of considering system has the form

$$H = A\sum_{m,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m,\gamma} + B\sum_{m,\tau,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m+\tau,\gamma} + U\sum_{m} a^+_{m,\uparrow}a_{m,\uparrow}a^+_{m,\downarrow}a_{m,\downarrow}.$$

Here, A is the electron energy at a lattice site, B is the transfer integral between neighboring sites (we assume that $B > 0$ for convenience), τ which means that summation is taken over the nearest neighbors, U is the parameter of the on-site Coulomb interaction of two electrons, γ is the spin index, and $a^+_{m,\gamma}$ and $a_{m,\gamma}$ are the respective electron creation and annihilation operators at a site $m \in Z^\nu$. In the six-electron systems exists singlet and triplet and quintet and octet states. The Hamiltonian H acts in the antisymmetric Fo'ck space $\mathcal{H}_{as}$. Let φ_0 be the vacuum vector in the space $\mathcal{H}_{as}$.

Main results

The first singlet state corresponds the basis functions ${}^1s^0_{m,n,p,q,r,t} = a^+_{m,\uparrow}a^+_{n,\uparrow}a^+_{p,\uparrow}a^+_{q,\downarrow}a^+_{r,\downarrow}a^+_{t,\downarrow}\varphi_0$. The subspace ${}^1\widetilde{\mathcal{H}}^s_0$, corresponding to the first singlet state is the set of all vectors of the form ${}^1\psi^s_0 = \sum_{m,n,p,q,r,t\in Z^\nu} \widetilde{f}(m,n,p,q,r,t)\,{}^1s^0_{m,n,p,q,r,t}$, $\widetilde{f} \in l^{as}_2$, where l^{as}_2 is the subspace of antisymmetric functions in the space $l_2((Z^\nu)^6)$.

Theorem 1. *The subspace ${}^1\widetilde{\mathcal{H}}^s_0$ is invariant under the operator H, and the restriction ${}^1H^s_0$ of H to the subspace ${}^1\widetilde{\mathcal{H}}^s_0$ is a bounded self-adjoint operator. It generates a bounded self- adjoint operator ${}^1\overline{H}^s_0$, acting in the space l^{as}_2.*

In the quasimomentum representation, the operator ${}^1\overline{H}^s_0$ acts in the Hilbert space $L^{as}_2((T^\nu)^6)$ as $({}^1\widetilde{H}^s_0\widetilde{f})(\lambda,\mu,\gamma,\theta,\eta,\xi) = \{6A+2A\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\lambda_i+$

$\cos\mu_i+\cos\gamma_i+\cos\theta_i+\cos\eta_i+\cos\xi_i]\}\widetilde{f}(\lambda,\mu,\gamma,\theta,\eta,\xi)+U\int_{T^\nu}[\widetilde{f}(s,\mu,\gamma,\lambda+\theta-s,\eta,\xi)+\widetilde{f}(s,\mu,\gamma,\theta,\lambda+\eta-s,\xi)+\widetilde{f}(s,\mu,\gamma,\theta,\eta,\lambda+\xi-s)+\widetilde{f}(\lambda,s,\gamma,\mu+\theta-s,\theta,\xi)+\widetilde{f}(\lambda,s,\gamma,\theta,\mu+\eta-s,\xi)+\widetilde{f}(\lambda,s,\gamma,\theta,\eta,\mu+\xi-s)+\widetilde{f}(\lambda,\mu,s,\gamma+\theta-s,\eta,\xi)+\widetilde{f}(\lambda,\mu,s,\theta,\gamma+\eta-s,\xi)+\widetilde{f}(\lambda,\mu,s,\theta,\eta,\gamma+\xi-s)]ds$, where L_2^{as} is the subspace of antisymmetric functions in $L_2((T^\nu)^6)$.

Theorem 2. *Let $\nu=1$ and $U<0$. Then the essential spectrum of operator ${}^1\widetilde{H}_0^s$ is the union of seven segments: $\sigma_{ess}({}^1\widetilde{H}_0^s)=[a+c+e,b+d+f]\cup[a+c+z_3,b+d+z_3]\cup[a+e+z_2,b+f+z_2]\cup[a+z_2+z_3,b+z_2+z_3]\cup[c+e+z_1,d+f+z_1]\cup[c+z_1+z_3,d+z_1+z_3]\cup[e+z_1+z_2,f+z_1+z_2]$, and the discrete spectrum of operator ${}^1\widetilde{H}_0^s$ is consists of no more one eigenvalue: $\sigma_{disc}({}^1\widetilde{H}_0^s)=\{z_1+z_2+z_3\}$, or $\sigma_{disc}({}^1\widetilde{H}_0^s)=\emptyset$, here and hereafter $a=2A-4B\cos\frac{\Lambda_1}{2}$, $b=2A+4B\cos\frac{\Lambda_1}{2}$, $c=2A-4B\cos\frac{\Lambda_2}{2}$, $d=2A+4B\cos\frac{\Lambda_2}{2}$, $e=2A-4B\cos\frac{\Lambda_3}{2}$, $f=2A+4B\cos\frac{\Lambda_3}{2}$, and $z_1=2A-\sqrt{9U^2+16B^2\cos^2\frac{\Lambda_1}{2}}$, $z_2=2A+\sqrt{9U^2+16B^2\cos^2\frac{\Lambda_2}{2}}$, $z_3=2A-\sqrt{U^2+16B^2\cos^2\frac{\Lambda_3}{2}}$.*

Let $\nu=3$, $\Lambda_1=\lambda+\mu$, $\Lambda_2=\gamma+\theta$, $\Lambda_3=\eta+\xi$, and $\Lambda_i=(\Lambda_i^0,\Lambda_i^0,\Lambda_i^0), i=1,2,3$;

Theorem 3. *a). If $U<0$, and $U<-\frac{4B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}, \cos\frac{\Lambda_1^0}{2}>\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}$, and $\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}>3\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}$, or $U<-\frac{4B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W}$, $\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}<\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}$, and $\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}>3\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}$, or $U<-\frac{12B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W}$, and $\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}<3\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}$, then the essential spectrum of operator ${}^1\widetilde{H}_0^s$ is consists of the union of seven segments: $\sigma_{ess}({}^1H_0^s)=[a_1+c_1+e_1,b_1+d_1+f_1]\cup[a_1+c_1+z_3^{'},b_1+d_1+z_3^{'}]\cup[a_1+e_1+z_2^{'},b_1+f_1+z_2^{'}]\cup[a_1+z_2^{'}+z_3^{'},b_1+z_2^{'}+z_3^{'}]\cup[c_1+e_1+z_1^{'},d_1+f_1+z_1^{'}]\cup[c_1+z_1^{'}+z_3^{'},d_1+z_1^{'}+z_3^{'}]\cup[e_1+z_1^{'}+z_2^{'},f_1+z_1^{'}+z_2^{'}]$, and discrete spectrum of operator ${}^1\widetilde{H}_0^s$ of no more one eigenvalue: $\sigma_{disc}({}^1H_0^s)=\{z_1^{'}+z_2^{'}+z_3^{'}\}$, or $\sigma_{disc}({}^1H_0^s)=\emptyset$. Here, and hereafter $a_1=2A-12B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}$, $b_1=2A+12B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}$, $c_1=2A-12B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}$, $d_1=2A+12B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}$, $e_1=2A-12B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}$, $f_1=2A+12B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}$, and $z_1^{'}, z_2^{'}$, and $z_3^{'}$ are the eigenvalue, correspondingly, of the operators $\widetilde{H}_{2\Lambda_1}^1$, $\widetilde{H}_{2\Lambda_2}^2$, and $\widetilde{H}_{2\Lambda_3}^3$.*

b). *If $-\frac{4B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}\leq U<-\frac{4B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W}$, $\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}>\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}$, and $\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}>3\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}$, or $-\frac{4B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W}\leq U<-\frac{4B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}$, $\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}<\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}$, and $\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}>3\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}$, or $-\frac{12B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W}\leq U<-\frac{4B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}$, $\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}<3\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}$, and $\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}>\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}$, or $-\frac{12B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W}\leq U<-\frac{4B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W}$, $\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}<3\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}$, and $\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}<\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}$, or $-\frac{4B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}\leq U<-\frac{12B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W}$, $\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}>3\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}$, and $\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}>\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}$, or*

$-\frac{4B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W} \le U < -\frac{12B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W}$, $\cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > 3\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}$, *and* $\cos\frac{\Lambda_1^0}{2} < \cos\frac{\Lambda_2^0}{2}$, *then the essential spectrum of the operator* ${}^1\widetilde{H}_0^s$ *is consists of the union of four segments:* $\sigma_{ess}({}^1H_0^s) = [a_1+c_1+e_1, b_1+d_1+f_1] \cup [a_1+c_1+z_3^{'}, b_1+d_1+z_3^{'}] \cup [c_1+e_1+z_1^{'}, d_1+f_1+z_1^{'}] \cup [c_1+z_1^{'}+z_3^{'}, d_1+z_1^{'}+z_3^{'}]$, *or* $\sigma_{ess}({}^1H_0^s) = [a_1+c_1+e_1, b_1+d_1+f_1] \cup [a_1+c_1+z_3^{'}, b_1+d_1+z_3^{'}] \cup [a_1+e_1+z_2^{'}, b_1+f_1+z_2^{'}] \cup [a_1+z_2^{'}+z_3^{'}, b_1+z_2^{'}+z_3^{'}]$, *or* $\sigma_{ess}({}^1H_0^s) = [a_1+c_1+e_1, b_1+d_1+f_1] \cup [a_1+e_1+z_2^{'}, b_1+f_1+z_2^{'}] \cup [c_1+e_1+z_1^{'}, d_1+f_1+z_1^{'}] \cup [e_1+z_1^{'}+z_2^{'}, f_1+z_1^{'}+z_2^{'}]$, *and the discrete spectrum of the operator* ${}^1\widetilde{H}_0^s$ *is empty set.*

c).*If* $-\frac{4B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W} \le U < -\frac{12B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W}, \cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_2^0}{2}$, *and* $\cos\frac{\Lambda_2^0}{2} > 3\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}$, *or* $-\frac{4B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W} \le U < -\frac{12B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W}, \cos\frac{\Lambda_1^0}{2} < \cos\frac{\Lambda_2^0}{2}$, *and* $\cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > 3\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}$, *or* $-\frac{4B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W} \le U < -\frac{4B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W}$, $\cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_2^0}{2}$, *and* $\cos\frac{\Lambda_1^0}{2} < 3\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}$, *or* $-\frac{4B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W} \le U < -\frac{4B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}$, $\cos\frac{\Lambda_1^0}{2} < \cos\frac{\Lambda_2^0}{2}$, *and* $\cos\frac{\Lambda_2^0}{2} < 3\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}$, *or* $-\frac{12B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W} \le U < --\frac{4B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W}$, $\cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > 3\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}$, *and* $\cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_2^0}{2}$, $\cos\frac{\Lambda_2^0}{2} < 3\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}$, *or* $-\frac{12B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W} \le U < -\frac{4B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}$, $\cos\frac{\Lambda_1^0}{2} < \cos\frac{\Lambda_2^0}{2}$, $\cos\frac{\Lambda_2^0}{2} > 3\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}$, $\cos\frac{\Lambda_1^0}{2} < 3\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}$, *then the essential spectrum of operator the operator* ${}^1\widetilde{H}_0^s$ *is the union of two segments:* $\sigma_{ess}({}^1H_0^s) = [a_1+c_1+e_1, b_1+d_1+f_1] \cup [a_1+c_1+z_3^{'}, b_1+d_1+z_3^{'}]$, *or* $\sigma_{ess}({}^1H_0^s) = [a_1+c_1+e_1, b_1+d_1+f_1] \cup [a_1+e_1+z_2^{'}, b_1+f_1+z_2^{'}]$, *or* $\sigma_{ess}({}^1H_0^s) = [a_1+c_1+e_1, b_1+d_1+f_1] \cup [c_1+e_1+z_1^{'}, d_1+f_1+z_1^{'}]$, *and discrete spectrum of the operator* ${}^1\widetilde{H}_0^s$ *is empty set.*

d). *If* $-\frac{12B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W} \le U < 0, \cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_2^0}{2}$ *and* $\cos\frac{\Lambda_2^0}{2} > 3\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}$, *or* $\cos\frac{\Lambda_1^0}{2} < \cos\frac{\Lambda_2^0}{2}$ *and* $\cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > 3\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}$, *or* $-\frac{4B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W} \le U < 0, \cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_2^0}{2}$ *and* $\cos\frac{\Lambda_1^0}{2} < 3\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}$, *or* $\cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_2^0}{2}$, $\cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > 3\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}$, *or* $-\frac{4B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W} \le U < 0, \cos\frac{\Lambda_1^0}{2} < \cos\frac{\Lambda_2^0}{2}$ *and* $\cos\frac{\Lambda_2^0}{2} < 3\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}$, *or* $\cos\frac{\Lambda_1^0}{2} < \cos\frac{\Lambda_2^0}{2}$, *and* $\cos\frac{\Lambda_2^0}{2} > 3\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}$, *then the essential spectrum of the operator* ${}^1\widetilde{H}_0^s$ *is consists of a single segment:* $\sigma_{ess}({}^1H_0^s) = [a_1+c_1+e_1, b_1+d_1+f_1]$, *and discrete spectrum of the operator* ${}^1\widetilde{H}_0^s$ *is empty set:* $\sigma_{disc}({}^1\widetilde{H}_0^s) = \emptyset$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Hubbard J.* Electron correlations in narrow energy bands // Proc. Roy. Soc. A. 1963. Vol. 276. P. 238–257.

[2] *Karpenko B. V., Dyakin V. V., Budrina G. L.* Two electrons in the Hubbard Model // Phys. Met. Metallogr. 1986. Vol. 61. P. 702–706.

[3] *Tashpulatov S. M.* Spectral Properties of three-electron systems in the Hubbard Model // Theoretical and Mathematical Physics. 2014. Vol. 179, № 3. P. 712–728.

[4] *Tashpulatov S. M.* The structure of essential spectra and discrete spectrum of four-electron systems in the Hubbard model in a singlet state // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2017. Vol. 38, № 3. P. 530–541.

[5] *Tashpulatov S. M.* series "Trends in Mathematics "Operator Theory and Differential Equations"Structure of Essential Spectrum and Discrete Spectra of the Energy Operator of Five-Electron Systems in the Hubbard Model. Doublet State // 2021, Springer Nature, Switzerland AG Gewerbestrasse 11, 6330 Cham, Switzerland, P. 275–301.

УДК 517.9

Об условиях моногенности[1]

Д. С. Теляковский (Россия, Москва)

dtelyakov@mail.ru

Доказана голоморфность функций одного комплексного переменного, удовлетворяющих ослабленным условиям комплексной дифференцируемости и некоторым условиям суммируемости.

Ключевые слова: голоморфность, моногенность, условия Коши–Римана, асимптотическая моногенност.

On monogeneity conditions[1]

D. S. Telýakovskij (Russia, Moscow)

dtelyakov@mail.ru

We prove that functions of one complex variable that satisfy weakened monogeneity conditions and some summability conditions are holomorphic.

Keywords: holomorphic functions, monogenic functions, Cauchy–Riemann conditions, asymptotically monogenic functions.

Получены достаточные условия голоморфности функций $f(z)$, $z \in G \subset \mathbb{C}$, которые удовлетворяют некоторым ослабленным условиям моногенности (комплексной дифференцируемости).

Согласно теореме Гурса–Принсгейма, если функция $f(z)$ в каждой точке области G имеет конечную производную, то $f(z)$ голоморфна в G. В этой теореме предположение о существовании производной можно ослаблять, но при этом на функцию обычно надо накладывать те или иные метрические условия. Доказательству голоморфности непрерывных функций, удовлетворяющих различным условиям моногенности, посвящён цикл работ Д.Е. Меньшова, выполненный в 20–30-х годах 20 века.

Сначала определим условия моногенности, которые рассматриваются в этой работе.

Пусть ζ — предельная точка множества $A_\zeta \subset G$. Будем говорить, что $f(z)$ *моногенна в* ζ *относительно множества* A_ζ, если существует конечный предел

$$\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta} \quad \text{при } z \to \zeta,\ z \in A_\zeta.$$

Наиболее известным условием моногенности вдоль множества являются условия Коши–Римана. Выполнение условий Коши–Римана в точке ζ означает моногенность $f(z)$ в точке ζ относительно крестика с центром в ζ (*крестиком* K_ζ *с центром в точке* ζ будем называть объединение двух пересекающихся в ζ неколлинеарных интервалов), причем один из интервалов крестика параллелен оси Ox, а другой — оси Oy. Д.Е. Меньшов рассмотрел также функции, моногенные в точках области относительно крестиков, без ограничений на расположение образующих крестики интервалов.

Функция $f(z)$ называется *асимптотически моногенной в точке* ζ, если $f(z)$ моногенна в ζ относительно множества A_ζ у которого точка ζ является точкой плотности (в смысле плоской меры Лебега).

Существование у $f(z)$ конечной ненулевой производной эквивалентно условиям сохранения углов и постоянства растяжений при отображении $w = f(z)$. Эти условия можно рассматривать по отдельности. Д. Е. Меньшов рассмотрел функции у которых существует конечный предел

$$\left|\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right| \quad \text{при } z\to\zeta,\ z\in T_\zeta,$$

где T_ζ — объединение трёх попарно неколлинеарных лучей, исходящих из точки ζ. Это условие Д.Е. Меньшов назвал *условием* K''.

Д. Е. Меньшов доказал следующие достаточные условия голоморфности.

Теорема 1 [1,2]**.** *Непрерывная в области G функция $f(z)$ моногенная в каждой точке $\zeta\in G$ вдоль некоторого крестика K_ζ, является в G голоморфной.*

Теорема 2 [2]**.** *Непрерывная в области G функция $f(z)$ асимптотически моногенная в каждой точке из G, является в G голоморфной.*

Теорема 3 [3]**.** *Пусть непрерывная и однолистная в области G функция $f(z)$ в каждой точке из G удовлетворяет условию K''. Тогда либо функция $f(z)$, либо функция $\overline{f(z)}$ является в G голоморфной.*

Как отметил сам Д. Е. Меньшов, пример Х. Бора функции $f(z)=z$ при $\operatorname{Im} z\geq 0$ и $f(z)=\overline{z}$ при $\operatorname{Im} z<0$ показывает, что в последней теореме условие однолистности является существенным. Условие однолистности настолько сильно, насколько это вообще возможно, ослабил Ю. Ю. Трохимчук [4], который заменил предположение об однолистности предположением о том, что в точках ζ области отображение $w=f(z)$ является прямым, т.е. сохраняющим направления углов вдоль некоторых сходящихся к ζ последовательностей. При этом, если отображение $w=f(z)$ прямое, то функция $\overline{f(z)}$ голоморфной быть не может.

Примеры показывают, что ни в одной из теорем 1–3 полностью отказаться от условия непрерывности нельзя. Однако это условие можно существенно ослабить. Для функций, удовлетворяющих условиям Коши–Римана в классической форме (один из интервалов крестика параллелен оси Ox, а другой — оси Oy) Г. П. Толстов [5] заменил условие непрерывности функции условием её ограниченности, Г. Х. Синдаловский [6] — условием суммируемости $|f(z)|$, а Д. С. Теляковский [7] — условием суммируемости $\log^+|f(z)|$. Далее Д. С. Теляковский [8–10] показал, что во всех теоремах 1–3 условие непрерывности можно заменить некоторым условием суммируемости $\log^+|f(z)|$, причём в обобщениях теорем 1 и 3 наложенное условие суммируемости $\log^+|f(z)|$ существенно ослабить нельзя, а в теореме 3 вместо условия однолистности используется условие прямизны отображения $w = f(z)$ и на расположение лучей в тройках T_ζ необходимо наложить некоторые ограничения.

В настоящей работе ослабляется условие моногенности. Предположение о моногенности функции $f(z)$ в точках $\zeta \in G$ относительно множеств A_ζ той или иной структуры заменено предположением о выполнении следующих двух условий:

1° в каждой точке $z \in A_\zeta$, лежащей достаточно близко к точке ζ, при некотором значении L_ζ выполнено неравенство

$$\bigl|f(z) - f(\zeta)\bigr| \le L_\zeta \bigl|z - \zeta\bigr|;$$

2° если предел в условии 1° не равен нулю, то найдутся сходящиеся к ζ вдоль двух неколлинеарных лучей последовательности точек $\{z'_n\}$ и $\{z''_n\}$, относительно которых функция $f(z)$ моногенна в ζ.

Если функция $f(z)$ удовлетворяет в точке ζ условию 1°, будем говорить, что $f(z)$ *удовлетворяет в ζ условию Липшица вдоль множества A_ζ*.

Ясно, что условие 1° выполнено, если $f(z)$ моногенна в точке ζ относительно множества A_ζ. Выполнение условия прямизны Трохимчука следует из выполнения условия 2°.

Получены следующие обобщения теорем 1–3 Меньшова.

Теорема 1′. *Пусть функция $f(z)$ в каждой точке $\zeta \in G$ удовлетворяет условию Липшица вдоль некоторого крестика K_ζ и условию 2°. Если $(\log^+|f(z)|)^p$ локально суммируем в G при всех положительных $p < 2$, то функция $f(z)$ голоморфна в G.*

Теорема 2′. *Пусть функция $f(z)$ в каждой точке $\zeta \in G$ удовлетворяет условию Липшица относительно некоторого множества A_ζ, у которого ζ является точкой плотности, и условию 2°. Если $\log^+|f(z)|$ локально суммируем в G, то функция $f(z)$ голоморфна в G.*

Для того, чтобы в теореме 3 было можно ослабить условие непрерывности, будем предполагать, что тройки лучей T_ζ являются растопыренными, т.е. с каждой стороны от любой проходящей через ζ прямой лежит по крайней мере по одному лучу из T_ζ.

Теорема 3$'$. *Пусть функция $f(z)$ в каждой точке $\zeta \in G$ удовлетворяет условию Липшица вдоль некоторой растопыренной тройки лучей T_ζ и условию 2°. Если $(\log^+ |f(z)|)^p$ локально суммируем в G при всех положительных $p < 2$, то функция $f(z)$ голоморфна в G.*

Предположение о том, что функция $f(z)$ в каждой точке ζ удовлетворяет условию Липшица вдоль соответствующего множества A_ζ, существенно ослабить нельзя. Это показывает следующий пример. Пусть $h(t)$ — произвольная функция типа модуля непрерывности у которой $\dfrac{h(t)}{t} \to +\infty$ при $t \searrow 0$. Существует такая непрерывная недифференцируемая ни в одной точке функция $\varphi_h(z)$ у которой для каждой точки ζ во всех точках z выполнено неравенство $|\varphi_h(z) - \varphi_h(\zeta)| \le h(|z-\zeta|)$, и производная которой в точке ζ вдоль некоторых двух последовательностей, одна из которых стремится к ζ вдоль оси Ox, а другая — вдоль оси Oy, равна нулю.

В достаточных условий гармоничности условия на непрерывность существенно слабее. В работе Теляковского [11] была доказана гармоничность функции $u(z)$ двух переменных, удовлетворяющих уравнению Лапласа, записанному в дискретной форме. Полностью отказаться от условия непрерывности в этом утверждении нельзя, но достаточно предполагать, что для некоторой функции $h(t)$ типа модуля непрерывности для каждой точки ζ при некотором значении L_ζ во всех точках $z \in A_\zeta$ выполнено неравенство $|u(z) - u(\zeta)| \le L_\zeta h(|z-\zeta|)$.

Заметим, что в каждой из теорем $1'$–$3'$ вместо выполнения условия 2° достаточно предполагать, что для всех точек области вдоль соответствующих последовательностей $\{z_n'\}$ и $\{z_n''\}$ существует конечный предел $\left|\dfrac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right|$ и, если этот предел не равен нулю, то отображение $w = f(z)$ является прямым в смысле Трохимчука.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Menchoff D.* Sur la généralisation des conditions de Cauchy–Riemann // Fundamenta Mathematicae. 1935. Vol. 25. P. 59–97.

[2] *Меньшов Д. Е.* Об асимптотической моногенности // Матем. сб. 1936. Т. 1(43), С. 189–210.

[3] *Menchoff D.* Sur les fonctions monogénes // Bulletin de la Société Mathématique de France. 1931. Vol. 59. P. 146–188.

[4] *Трохимчук Ю. Ю.* Непрерывные отображени я и условия моногенности. Москва, 1963.

[5] *Tolstoff G.* Sur la fonctions bornees verifiant les conditions de Cauchy–Riemann // Матем. сб. 1942. Т. 10 (52). С. 79–86.

[6] *Синдаловский Г.Х.* Об условиях Коши–Римана в классе функций с суммируемым модулем и некоторых граничных свойствах аналитических функций //

Матем. сб. 1985. Т. 128 (170), вып. 3 (11), с. 364–382.

[7] *Теляковский Д.С.* Об одном обобщении теоремы Лумана–Меньшова // Матем. зам. 1986ю. Т. 39, вып. 4. С. 539–549.

[8] *Теляковский Д.С.* Обобщение одной теоремы Меньшова о моногенных функциях // Известия АН СССР. 1989. Т. 53, вып. 4. С. 886–896.

[9] *Теляковский Д.С.* Об асимптотически моногенных функциях // Труды МИ РАН. 1992. Т. 198, вып. 4. С. 186–193.

[10] *Теляковский Д.С.* Обобщение теоремы Меньшова о функциях, удовлетворяющих условию K'' // Матем. зам. 2004. Т. 76, вып. 4. С. 578–591.

[11] *Теляковский Д.С.* Достаточное условие гармоничности функций двух переменных, удовлетворяющих разностному уравнению Лапласа // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22, вып. 4. С. 269–283.

УДК 517.547.2, 517.95, 517.983.23

О некоторых трансцендентных уравнениях, важных для математической физики[1]

И. В. Тихонов, В. Б. Шерстюков, М. Алмохамед
(Москва, Россия)
ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com, mssrmtz@gmail.com

Обсуждаются трансцендентные уравнения вида $\sin z = z$ и $\operatorname{sh} z = z$, исследование которых восходит к работе Харди (1902). Приводятся уточненные результаты о распределении корней на множестве $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Отмечается связь с теорией целых функций типа Миттаг-Леффлера. Интерес к тематике был вызван вопросом о кратных нулях одной целой функции порядка $\rho = 1/2$. Эта последняя возникла из спектральных соотношений в обратных задачах математической физики.

Ключевые слова: трансцендентные уравнения, распределение корней, целые функции типа Миттаг-Леффлера, целые функции порядка 1/2, кратные нули, обратные задачи математической физики..

Благодарности: работа выполнена при частичной финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621.

On some transcendental equations that matter for mathematical physics[1]

I. V. Tikhonov, V. B. Sherstyukov, M. Almohamed
(Moscow, Russia)
ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com, mssrmtz@gmail.com

The transcendental equations of the form $\sin z = z$ and $\operatorname{sh} z = z$ are discussed. Their study goes back to Hardy's paper (1902). We present more precise results on the distribution of roots on the set $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. A connection with the theory of entire functions of Mittag-Leffler type is noted. Our interest in the subject was prompted by a question on multiple zeros of one entire function of the order $\rho = 1/2$. This function was obtained from spectral relations in inverse problems of mathematical physics.

Keywords: transcendental equations, distribution of roots, Mittag-Leffler entire functions, entire functions of the order 1/2, multiple zeros, inverse problems of mathematical physics..

Acknowledgements: the work was partially supported by Ministry of Education and Science of Russian Federation as part of a program of Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics by agreement No. 075-15-2019-1621.

В 1902 г. опубликована работа [1], посвященная корням уравнения

$$\sin z = z \tag{1}$$

на множестве $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Там же, в [1], введено обобщенное уравнение

$$\sin z = az \tag{2}$$

с параметром $a \neq 0$. На заложенной теоретической основе проводились дальнейшие исследования по численному анализу корней трансцендентных уравнений (1), (2), их обобщений и аналогов (см. [2]–[7]). Отметим, что подобные уравнения возникают в математической физике при рассмотрении спектральных задач механики сплошной среды (см. [8]–[11]). Их также используют как важный иллюстративный материал в теории целых функций (см. [12, с. 64–68]).

Наряду с (1) встречается «гиперболическое» уравнение вида

$$\operatorname{sh} z = z. \tag{3}$$

Исходная версия (1) получается из (3) при замене z на iz. Поэтому множества корней этих уравнений связаны простым поворотом на угол $\pi/2$. По причинам технического характера нам удобнее сейчас иметь дело с уравнением (3). Будем рассматривать его на множестве $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Отметим сначала факты общего характера. Легко проверяется, что уравнение (3) не имеет корней $z \neq 0$ на осях Re и Im. При этом корней бесконечно много, и они образуют счетный набор на плоскости. Учитывая естественные симметрии, корни уравнения (3) можно представить в виде

$$\pm z_n, \qquad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \qquad z_{-n} = \overline{z}_n. \tag{4}$$

Здесь основная серия корней

$$z_1, \ z_2, \ \dots, \ z_n, \ \dots \tag{5}$$

расположена в первом квадранте $\mathbb{C}_{++} \equiv \{z = x + iy \colon \ x > 0, \ y > 0\}$ и упорядочена по возрастанию модулей. Понятно, что нужно дать описание лишь для этой основной серии (5).

При анализе уравнения (3) полезно учитывать связь

$$\frac{\operatorname{sh} z - z}{z^3} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{2m}}{(2m+3)!} = E_{1/2}(z^2; 4) \tag{6}$$

с соответствующей функцией типа Миттаг-Леффлера. Напомним, что это классическое семейство (см. [13]) образуют целые функции

$$E_\rho(z; \mu) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\Gamma(\rho^{-1} m + \mu)}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

с параметрами $\rho > 0$, $\mu \in \mathbb{C}$ (и Γ-функцией в знаменателе). Тем самым, к исследованию множества (4) можно привлекать общие результаты монографии [14]. Например, из указанной там теоремы 4.3.1 следует, что основная серия корней (5) локализуется в правой полуплоскости

$$\operatorname{Re} z > \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1) = 2.2955\ldots\ . \tag{7}$$

Затем, применяя теорему 2.1.1, после несложных вычислений получим для основной серии (5) следующую асимптотическую формулу

$$z_n = \ln(4n\pi) + \frac{1}{4n} + i\left(2n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\ln(4n\pi)}{2n\pi}\right) + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right), \quad n \to \infty. \tag{8}$$

Формула (8) согласуется с результатом [12, с. 67] (если переделать ответ из книги [12] на уравнение (3) вместо разобранного там уравнения (2)).

Отметим близкий шаблон асимптотики из работы [9] (см. также [1]), откуда извлекается приближенная формула

$$z_n = \ln((4n+1)\pi) + \delta_n + i\left(2n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{2\ln((4n+1)\pi)}{(4n+1)\pi} + \varepsilon_n\right) \tag{9}$$

при $n \in \mathbb{N}$ со значениями $\delta_n, \varepsilon_n \in \mathbb{R}$, такими, что $\delta_n \to 0$ и $\varepsilon_n \to 0$, когда $n \to \infty$. На первый взгляд, вариант (8) кажется проще и даже чуть сильнее, но именно представление (9) позволяет вывести по-настоящему точный результат.

Теорема 1. *В формуле* (9) *для основной серии* (5) *корней уравнения* (3) *при всех номерах* $n \in \mathbb{N}$ *действуют оценки*

$$0 < \delta_n < \frac{2\ln^2\big((4n+1)\pi\big)}{(4n+1)^2\pi^2}, \qquad |\varepsilon_n| < \frac{4\ln^3\big((4n+1)\pi\big)}{(4n+1)^3\pi^3}. \tag{10}$$

Такое сочетание формулы (9) с оценками (10) дает весьма полное представление о поведении корней уравнения (3). Как видим, итоговый ответ оказывается *неасимптотическим*, фактически применимым при всех номерах $n \in \mathbb{N}$. Укажем еще один неасимптотический результат несколько иного характера.

Теорема 2. *Для уравнения* (3) *рассматриваем основную серию корней* (5) *в первом квадранте* $\mathbb{C}_{++} \equiv \{z = x + iy\colon\ x > 0,\ y > 0\}$. *Тогда справедливы утверждения.*

- *Все корни* (5) *находятся на кривой* $\gamma \subset \mathbb{C}_{++}$ *с уравнением*

$$y = \operatorname{cth} x\,\sqrt{\operatorname{sh}^2 x - x^2} \quad \sim \quad y = \operatorname{ch} x\,\sqrt{1 - \frac{x^2}{\operatorname{sh}^2 x}}\,. \tag{11}$$

- *Корень* z_n *при фиксированном* $n \in \mathbb{N}$ *попадает в область*

$$\operatorname{ch} x - 1 < y < \operatorname{ch} x, \quad 2n\pi + \frac{\pi}{3} < y < 2n\pi + \frac{\pi}{2}\,. \tag{12}$$

- *Все корни* (5) *расположены в полуплоскости*

$$\operatorname{Re} z > \ln 5\pi = 2.7541\ldots\ , \tag{13}$$

что точнее прежней оценки (7).

Перечисленные факты, связанные с формулами (9)–(13), получаются аналитическим путем. Их, в целом, достаточно для основных приложений, использующих корни уравнения (3) при $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Кроме того, имеются таблицы первых корней уравнения (1), т. е. уравнения $\sin z = z$ (см., например, [2], [8], [9]). Отсюда при замене значений $a + bi$ значениями $b + ai$ получаем первые корни уравнения (3). (Понятно, что в наши дни более естественно обратиться к системам компьютерной математики, с помощью которых находится любое разумное количество корней с высокой степенью точности.)

Как уже отмечалось, трансцендентные уравнения вида (1)–(3) встречаются в математической физике. Помимо прежних работ [8]–[11], связанных с механикой сплошной среды, укажем одну новую ситуацию, вызвавшую наш особый интерес к уравнению (3).

Некоторое время назад при изучении одной обратной задачи для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка (см. [15], [16]) возник вопрос о нулях элементарной целой функции

$$H(\lambda) = H(\lambda; p) = \frac{2}{\sqrt{\lambda}}\,\operatorname{sh}\frac{\sqrt{\lambda}}{2} + p\,\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\lambda}}{2} \tag{14}$$

переменной $\lambda \in \mathbb{C}$ порядка $\rho = 1/2$ с параметром $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Здесь, кроме общего исследования нулей, требовалось узнать, существуют ли значения $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, при которых целая функция (14) имеет кратные нули. Несмотря на внешнюю однородность конструкции по параметру p, ситуация с кратными нулями оказалась весьма неординарной.

Как выяснилось, практически всегда все нули функции (14) являются простыми, но, в то же время, существует счетное множество исключительных значений $p = p_n$, при каждом из которых функция (14) обладает еще и одним нулем кратности два. Окончательный результат формулируется в терминах корней уравнения (3), попадающих в правую полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$. Нужное подмножество корней получается из основной серии (5) в форме $z = z_n$ при $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, где $z_{-n} = \overline{z}_n$.

Теорема 3. *Рассматриваем целую функцию* $H(\lambda; p)$ *вида* (14) *с параметром* $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. *Определим счетное множество значений*

$$p_n = -\frac{2}{1 + \operatorname{ch} z_n}, \qquad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \qquad p_{-n} = \overline{p}_n, \tag{15}$$

где z_n — корни уравнения (3), *попадающие в полуплоскость* $\operatorname{Re} z > 0$. *Тогда справедливы утверждения.*

- *При каждом* $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, *не входящем в множество* (15), *целая функция* $H(\lambda; p)$ *имеет только простые нули.*

- *При каждом* $p = p_n$ *из множества* (15) *с выбранным значением корня* z_n *целая функция* $H(\lambda; p_n)$, *помимо бесконечного числа простых нулей, имеет в точности один кратный нуль* $\lambda = z_n^2$ *кратности два.*

Добавим еще, что при $n \in \mathbb{N}$ все значения p_n из формулы (15) попадают в прямоугольник

$$-0.11 < \operatorname{Re} p < 0, \qquad 0 < \operatorname{Im} p < 0.22, \tag{16}$$

причем $p_n \to 0$ при $n \to \infty$. Границы (16) вместе с изображением последовательности p_n нетрудно получить компьютерными расчетами.

Теорема 3 полезна при построении присоединенных элементарных решений исходной обратной задачи в некоторых специальных ситуациях (см. заметку М. Алмохамеда и И. В. Тихонова в настоящем сборнике).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Hardy G. H.* On the zeroes of the integral function $x - \sin x = \sum_1^\infty (-)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1!}$ // The Messenger of Mathematics. 1902. Vol. 31, № 11. P. 161–165.

[2] *Hillman A. P., Salzer H. E.* Roots of $\sin z = z$ // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. Series 7. 1943. Vol. 34, № 235. P. 575.

[3] *Robbins C. I., Smith R. C. T.* A table of roots of $\sin z = -z$ // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. Series 7. 1948. Vol. 39, № 299. P. 1004–1005.

[4] *Burniston E. E., Siewert C. E.* Exact analytical solutions of the transcendental equation $\alpha \sin \zeta = \zeta$ // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1973. Vol. 24, № 4. P. 460–466.

[5] *Fettis H. E.* Complex roots of $\sin z = az$, $\cos z = az$, $\cosh z = az$ // Mathematics of Computation. 1976. Vol. 30, № 135. P. 541–545.

[6] *Misici L.* Numerical solutions of two transcendental equations // Mathematics of Computation. 1984. Vol. 42, № 166. P. 589–595.

[7] *Hansen E. B.* Root structure and numerical solution of the equation $\sin z = cz$ // Applied Mathematics Letters. 1997. Vol. 10, № 2. P. 33–38.

[8] *Fadle J.* Die Selbstspannungs-Eigenwertfunktionen der quadratischen Scheibe // Ingenieur-Archiv ($\equiv$ Archive of Applied Mechanics). 1940. Bd. 11. S. 125–149.

[9] *Buchwald V. T.* Eigenfunctions of plane elastostatics. I. The strip // Proceedings of the Royal Society of London. Ser. A. Mathematical and Physical Sciences. 1964. Vol. 277. P. 385–400.

[10] *Joseph D. D.* The convergence of biorthogonal series for biharmonic and Stokes flow edge problems. Part I // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1977. Vol. 33, № 2. P. 337–347.

[11] *Katopodes F. V., Davis A. M. J., Stone H. A.* Piston flow in a two-dimensional channel // Physics of Fluids. 2000. Vol. 12, № 5. P. 1240–1243.

[12] *Маркушевич А. И.* Целые функции. Элементарный очерк. Изд. 2-е. М. : Наука, 1975. 120 с.

[13] *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М. : Наука, 1966. 672 с.

[14] *Попов А. Ю., Седлецкий А. М.* Распределение корней функций Миттаг-Леффлера // Современная математика. Фундаментальные направления. 2011. Т. 40. С. 3–171.

[15] *Алмохамед М., Тихонов И. В.* Об обратной задаче для эволюционного уравнения второго порядка с финальным переопределением третьего рода // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Воронеж: Изд-во ВГУ, 2021. С. 35–37.

[16] *Алмохамед М., Тихонов И. В.* Единственность решения в модельной обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка // Дифференциальные уравнения, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы. Белгород: ИД «БелГУ» НИУ «БелГУ», 2021. С. 19–21.

УДК 517.518.82

О поведении полиномов Канторовича на комплексной плоскости в модельном примере симметричного модуля[1]

И. В. Тихонов, В. Б. Шерстюков, И. В. Окорочков
(Москва, Россия)
ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com, ivan.okorochkov@yandex.ru

Как известно, один из содержательных разделов конструктивного анализа связан с изучением полиномов, аппроксимирующих простые негладкие функции. В настоящей заметке дан краткий обзор наших недавних результатов о поведении на плоскости $\mathbb{C}$ полиномов Канторовича, взятых от симметричного модуля. Указано точное множество сходимости таких полиномов и найдена их скорость сходимости к соответствующей предельной функции. Отдельно обсуждается вопрос распределения нулей полиномов Канторовича. Центральную роль в исследовании играет специфика порождающей функции, благодаря которой удается установить прямую связь между полиномами Канторовича и более простыми полиномами Бернштейна.

Ключевые слова: полиномы Канторовича, полиномы Бернштейна, симметричный модуль, сходимость на комплексной плоскости, скорость сходимости, распределение нулей.

On the behavior of Kantorovich polynomials on the complex plane in a model example of a symmetric module function[1]

I. V. Tikhonov, V. B. Sherstyukov, I. V. Okorochkov
(Moscow, Russia)
ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com, ivan.okorochkov@yandex.ru

The question of approximation of simple continuous non-smooth functions by classical systems of polynomials plays a special role in the constructive analysis. The note gives a short review of our recent results on the behavior of Kantorovich polynomials on $\mathbb{C}$ for a symmetric module function. The exact set of convergence of such polynomials is indicated, and the rate of convergence to the corresponding limit function is found. The problem of the distribution of zeros of Kantorovich polynomials is discussed. The central role in the study is played by the specificity of the generating function, which allows to establish a direct connection between Kantorovich polynomials and simpler Bernstein polynomials.

Keywords: Kantorovich polynomials, Bernstein polynomials, symmetric module function, convergence on the complex plane, rate of convergence, distribution of zeros.

Возьмем стандартный отрезок $[0,1]$ и на нем симметричный модуль

$$f(x) = |2x-1|, \quad x \in [0,1]. \tag{1}$$

Рассмотрим полиномы Бернштейна

$$B_n(f,z) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k\, z^k (1-z)^{n-k} \tag{2}$$

с нумерацией $n \in \mathbb{N}$ и полиномы Канторовича

$$K_n(f,z) = (n+1) \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{k/(n+1)}^{(k+1)/(n+1)} f(u)\,du \cdot C_n^k\, z^k (1-z)^{n-k} \qquad (3)$$

с нумерацией $n \in \mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}$. Здесь C_n^k — обычные биномиальные коэффициенты. Переменную z считаем комплексной. Общую теорию полиномов Бернштейна и некоторые базовые сведения о полиномах Канторовича см. в [1]–[3]. Используем сейчас определения (2), (3) применительно к конкретной порождающей функции (1) — модельному примеру в теории аппроксимации.

Полиномы Бернштейна для функции (1) изучены в работах [4]–[8]. Исследование соответствующих полиномов Канторовича только начинается. Приведем характерные результаты о поведении полиномов $K_n(f,z)$ на плоскости $\mathbb{C}$, основанные на специальной связи между полиномами Бернштейна и Канторовича при выборе $f(x) = |2x-1|$.

Напомним (см. [4], [5]), что полиномы Бернштейна от симметричного модуля обладают следующим свойством попарного склеивания

$$B_{2m}(f,z) = B_{2m+1}(f,z), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Для полиномов Канторовича прямого аналога такого свойства нет: здесь возникают две серии $K_{2m}(f,z)$ и $K_{2m+1}(f,z)$, по-разному выражающиеся через полиномы Бернштейна.

Теорема 1. *Для функции $f(x) = |2x-1|$, взятой на $[0,1]$, полиномы Бернштейна и Канторовича связаны соотношениями*

$$K_{2m}(f,z) = \frac{2m}{2m+1}\, B_{2m+1}(f,z) + \frac{1}{2(2m+1)}\, 2^{-2m} C_{2m}^{m} (4z(1-z))^m,$$

$$K_{2m+1}(f,z) = \frac{2m+1}{2m+2}\, B_{2m+1}(f,z),$$

действующими при всех $m \in \mathbb{N}_0$.

Используя данное утверждение вместе с известными свойствами полиномов Бернштейна, можно в примере (1) весьма полно охарактеризовать поведение полиномов Канторовича на комплексной плоскости.

Теорема 2. *Для функции $f(x) = |2x-1|$, взятой на $[0,1]$, последовательность $K_n(f,z)$ при $n \to \infty$ сходится равномерно на компакте*

$$D \equiv \{z \in \mathbb{C}\colon\ |4z(1-z)| \leqslant 1\} \qquad (4)$$

к функции

$$\varphi(z)=\begin{cases}1-2z, & z\in D_1=D\cap\{\operatorname{Re} z\leqslant 1/2\},\\ 2z-1, & z\in D_2=D\cap\{\operatorname{Re} z\geqslant 1/2\}.\end{cases}\tag{5}$$

Во внешних точках $z\in\mathbb{C}\setminus D$ последовательность $K_n(f,z)$ расходится при $n\to\infty$, точнее, независимо расходятся обе подпоследовательности $K_{2m}(f,z)$ и $K_{2m+1}(f,z)$.

Множество (4) называется *компактом Канторовича* — оно такое же, как множество сходимости полиномов Бернштейна (2) в примере (1) (см. [7], [8]). Однако характер сходимости полиномов Бернштейна и Канторовича к общей предельной функции (5) будет существенно разным.

Как показывают исследования, для полиномов Бернштейна на множестве D надо различать три случая: а) в особой точке $z=1/2$ скорость сходимости низкая, степенная, порядка $n^{-1/2}$; б) в других граничных точках из множества $|4z(1-z)|=1$ скорость сходимости более высокая, порядка $n^{-3/2}$; в) во внутренних точках из D, т.е. при $|4z(1-z)|<1$, скорость сходимости экспоненциальная, порядка $n^{-3/2}\,|4z(1-z)|^n$ (за некоторыми подробностями мы отсылаем к [7], [8]).

Для полиномов Канторовича получаем такое утверждение.

Теорема 3. *В ситуации теоремы* 2 *во всех точках $z\in D\setminus\{1/2\}$ справедлива асимптотика уклонения полиномов Канторовича от их предельной функции*

$$K_n(f,z)-\varphi(z)\sim -\frac{1}{n}\,\varphi(z),\quad n\to\infty.\tag{6}$$

В особой точке $z=1/2$ действует более медленный степенной закон

$$K_n(f,1/2)-\varphi(1/2)=K_n(f,1/2)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi n}},\quad n\to\infty.\tag{7}$$

Асимптотические формулы (6), (7) дают общее представление о сходимости полиномов Канторовича на компакте D и допускают дальнейшие уточнения. Отметим, в частности, что важные значения $K_n(f,1/2)$ из формулы (7) находятся в явном виде:

$$K_{2m}(f,1/2)=\frac{4m+1}{4m+2}\,2^{-2m}\,C_{2m}^{m},\quad K_{2m+1}(f,1/2)=2^{-2m-2}\,C_{2m+2}^{m+1},\tag{8}$$

где $m\in\mathbb{N}_0$. Соотношения (8) легко следуют из теоремы 1 с учетом того, что $B_{2m+1}(f,1/2)=2^{-2m}\,C_{2m}^{m}$ при $m\in\mathbb{N}_0$.

Отдельный интерес представляет вопрос распределения нулей полиномов Канторовича. Укажем здесь следующий отправной результат.

Теорема 4. *Для функции* $f(x) = |2x - 1|$, *взятой на* $[0, 1]$, *все нули полиномов* $K_n(f, z)$ *при* $n \geqslant 2$ *являются простыми и расположены вне компакта* D *из формулы* (4). *Полиномы* $K_0(f, z)$ *и* $K_1(f, z)$ *тождественно равны константе* $1/2$ *и нулей не имеют.*

Доказательство данного утверждения основано на теореме 1 и некоторых известных результатах о нулях полиномов Бернштейна (см. [6], [7]).

Отметим, что теория распределения нулей полиномов Бернштейна была инициирована работой [9] и существенно развита в [10]–[12]. Есть основания полагать, что многие прежние подходы допускают перенос на полиномы Канторовича.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Lorentz G. G.* Bernstein Polynomials. Toronto : University of Toronto Press, 1953. x+130 p.

[2] *DeVore R. A., Lorentz G. G.* Constructive Approximation. Berlin, Heidelberg, N.Y. : Springer-Verlag, 1993. x+450 p.

[3] *Виденский В. С.* Многочлены Бернштейна. Учебное пособие к спецкурсу. Л. : ЛГПИ имени А. И. Герцена, 1990. 64 с.

[4] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Приближение модуля полиномами Бернштейна // Вестник Челябинского гос. ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 15, № 26. С. 6–40.

[5] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Полиномы Бернштейна: старое и новое // Матем. форум. Т. 8, ч. 1. Исследования по матем. анализу. Владикавказ : ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014. С. 126–175.

[6] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г.* Задача о нулях полиномов Бернштейна на модельном примере симметричного модуля // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 18-й международной Саратовской зимней школы. Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2016. С. 271–275.

[7] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г.* Обобщенные разложения Поповичу для полиномов Бернштейна от рационального модуля // Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее прилож. Тематич. обзоры ВИНИТИ. 2019. Т. 170. С. 71–117.

[8] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Приближение модуля полиномами Бернштейна: новые продвижения и возможные обобщения // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 20-й международной Саратовской зимней школы. Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2020. С. 409–414.

[9] *Новиков И. Я.* Асимптотика корней полиномов Бернштейна, используемых в построении модифицированных всплесков Добеши // Матем. заметки. 2002. Т. 71, № 2. С. 239–253.

[10] *Тихонов И. В., Цветкович Д. Г., Шерстюков В. Б.* Компьютерное исследование аттракторов нулей для классических полиномов Бернштейна // Фундаментальная и прикладная математика. 2016. Т. 21, № 4. С. 151–173.

[11] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г.* Как выглядят аттракторы

нулей для классических полиномов Бернштейна // Дифференц. уравнения и процессы управления. 2017. № 2. С. 59–73.

[12] *Цветкович Д. Г.* Подробный атлас аттракторов нулей для классических полиномов Бернштейна // Челябинский физ.-матем. журнал. 2018. Т. 3, № 1. С. 58–89.

УДК 517.984

О полноте системы собственных функций оператора Шредингера с комплексным степенным потенциалом[1]

С. Н. Туманов (Москва, Россия)

sergey.tumanov@yahoo.com

Для $\alpha \in (0, 2)$ система собственных функций комплексного оператора Шрёдингера $\mathcal{L}_c = -d^2/dx^2 + cx^\alpha$ в $L_2(\mathbb{R}_+)$ с краевым условием Дирихле полна при всех c: $|\arg c| < 2\pi\alpha/(\alpha + 2) + \Delta t(\alpha)$ для некоторого $\Delta t(\alpha) > 0$.

Ключевые слова: спектральная теория; полнота системы собственных функций; несамосопряженный оператор Шрёдингера.

Благодарности: работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант 20-11-20261).

On the completeness of the system of eigenfunctions of the Schroedinger operator with the complex power potential[1]

S. N. Tumanov (Moscow, Russia)

sergey.tumanov@yahoo.com

For $\alpha \in (0, 2)$ the system of eigenfunctions of the complex Schrödinger operator $\mathcal{L}_c = -d^2/dx^2 + cx^\alpha$ in $L_2(\mathbb{R}_+)$ with the Dirichlet boundary conditions is complete for all c: $|\arg c| < 2\pi\alpha/(\alpha + 2) + \Delta t(\alpha)$ with some $\Delta t(\alpha) > 0$.

Keywords: spectral theory; completeness of eigenfunctions; non-selfadjoint Schrödinger operators.

Acknowledgements: the article is done with the financial support of Russian Science Foundation (grant 20-11-20261).

Рассматривается оператор

$$\mathcal{L}_{c,\alpha} = -\frac{d^2}{dx^2} + cx^\alpha$$

в $L_2(\mathbb{R}_+)$ с граничным условием Дирихле при $c \in \mathbb{C}$, $|\arg c| < \pi$, $\alpha > 0$.

Оператор $\mathcal{L}_{c,\alpha}$ имеет компактный обратный, спектр его дискретный, корневые подпространства одномерны [1].

При $0 < |\arg c| < \pi$ он не самосопряжён, более того, обладает плохими спектральными свойствами: норма резольвенты экспоненциально растёт при удалении от спектра [2]; растут нормы спектральных проекторов [3]. В этих условиях оператор не может быть подобным самосопряжённому, его собственные функции не образуют базиса Рисса в $L_2(\mathbb{R}_+)$.

Тем не менее, вопрос полноты его системы собственных функций (с.с.ф.) в $L_2(\mathbb{R}_+)$, вообще говоря, открыт.

Для $\alpha \geq 2$ задача о полноте с.с.ф. $\mathcal{L}_{c,\alpha}$ вполне исследована [2, 4]: система полна при всех $c \in \mathbb{C}$: $|\arg c| < \pi$.

При $\alpha \in (0,2)$ полнота доказана для $|\arg c| < t_0(\alpha) = 2\pi\alpha/(\alpha+2)$ [4]. В то же время, при $t_0(\alpha) \leq |\arg c| < \pi$ вопрос почти не изучен, так как является гораздо более сложной задачей. Соответствующие аргументы приводятся в работах [1, 4].

Нам удалось доказать доказать полноту системы собственных функций при более слабых условиях на $\arg c$.

Сформулируем основной результат работы.

Для комплексных чисел $\zeta = |\zeta| e^{i\arg\zeta}$, $-\pi < \arg\zeta \leq \pi$ и вещественных β, через ζ^β будем обозначать главную ветвь: $\zeta^\beta = |\zeta|^\beta e^{i\beta\arg\zeta}$.

Для $\theta \in [t_0(\alpha), \pi) \cap [t_0(\alpha), \pi\alpha)$, положим

$$\zeta_0(\theta) = e^{i(t_0(\alpha)-\theta)/\alpha}, \quad Z_0(\theta) = (\sin t_0(\alpha)/\sin\theta)^{1/\alpha},$$

и определим функцию

$$\rho(\theta) = \operatorname{Re}\Big\{\int\limits_0^{Z_0(\theta)} \sqrt{e^{i\theta}\zeta^\alpha - e^{it_0(\alpha)}}\, d\zeta - 2\int\limits_0^{\zeta_0(\theta)} \sqrt{e^{i\theta}\zeta^\alpha - e^{it_0(\alpha)}}\, d\zeta\Big\} =$$

$$= \operatorname{Re}\Big\{\int\limits_{\zeta_0(\theta)}^{Z_0(\theta)} \sqrt{e^{i\theta}\zeta^\alpha - e^{it_0(\alpha)}}\, d\zeta - \int\limits_0^{\zeta_0(\theta)} \sqrt{e^{i\theta}\zeta^\alpha - e^{it_0(\alpha)}}\, d\zeta\Big\},$$

где интегрирование ведётся по отрезкам, а ветви корня выбрана так, чтобы

$$\operatorname{Re}\int\limits_0^{Z_0(\theta)} \sqrt{e^{i\theta}\zeta^\alpha - e^{it_0(\alpha)}}\, d\zeta > 0, \quad \operatorname{Re}\int\limits_0^{\zeta_0(\theta)} \sqrt{e^{i\theta}\zeta^\alpha - e^{it_0(\alpha)}}\, d\zeta > 0.$$

Теорема 1. *Для любого $\alpha \in (0,2)$ функция $\rho(\theta)$ имеет единственный ноль $\theta_0(\alpha)$ внутри интервала: $(t_0(\alpha), \pi) \cap (t_0(\alpha), \pi\alpha)$*

$$\theta_0(\alpha) = t_0(\alpha) + \Delta t(\alpha), \quad \Delta t(\alpha) > 0.$$

Функция $\theta_0(\alpha)$ непрерывна при $\alpha \in (0,2)$.

При $|\arg c| < \theta_0(\alpha)$ с.с.ф. оператора $\mathcal{L}_{c,\alpha}$ полна в $L_2(\mathbb{R}_+)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Tumanov S.* Completeness theorem for the system of eigenfunctions of the complex Schrödinger operator $\mathcal{L}_c = -d^2/dx^2 + cx^{2/3}$ // J. Funct. Anal. 2020. `https://doi.org/10.1016/j.jfa.2020.108820`.

[2] *Davies E. B.* Wild spectral behaviour of anharmonic oscillators // Bull. Lond. Math. Soc. 2000. Vol. 32, iss. 4. C. 432–438.

[3] *Mityagin B., Siegl P., Viola J.* Differential operators admitting various rates of spectral projection growth // J. Funct. Anal. 2017. 272:8, C. 3129–3175.

[4] *Савчук А. М. и Шкаликов А. А.* Спектральные свойства комплексного оператора Эйри на полуоси // Функц. анализ и его прил., 51:1, 2017, 82–98.

УДК 517.927.21:517.911.5:51–73

О приложении качественной теории дифференциальных уравнений к некоторым задачам тепломассопереноса[1]

Д. В. Туртин* (Иваново, Россия),
М. А. Степович, В. В. Калманович*** (Калуга, Россия)**
*turtin@mail.ru, **m.stepovich@rambler.ru, ***v572264@yandex.ru

Изучены возможности приложения качественной теории дифференциальных уравнений к некоторым задачам тепломассопереноса в однородных материалах и многослойных планарных структурах. Рассмотрение проведено на примере математических моделей стационарного процесса диффузии неравновесных неосновных носителей заряда, генерированных широким пучком киловольтных электронов в полупроводниках. Рассмотрены вопросы корректности этих математических моделей и приведён обзор результатов исследований таких моделей за последнее время.

Ключевые слова: математическое моделирование, тепломассоперенос, дифференциальные уравнения, качественные оценки.

Благодарности: работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 19–03–00271), а также РФФИ и правительства Калужской области (проект № 18–41–400001).

On the application of the qualitative theory of differential equations to a problem of heat and mass transfer[1]

D. V. Turtin* (Ivanovo, Russia),
M. A. Stepovich, V. V. Kalmanovich*** (Kaluga, Russia)**
*turtin@mail.ru, **m.stepovich@rambler.ru, ***v572264@yandex.ru

The possibilities of applying the qualitative theory of differential equations to some problems of heat and mass transfer in homogeneous materials and multilayer planar structures are studied. The consideration is carried out on the example of mathematical models of the stationary process of diffusion of nonequilibrium minority charge carriers generated by a wide beam of kilovolt electrons in semiconductors. The problems of the correctness of these mathematical models are considered and an overview of the results of studies of such models in recent years is given.

Keywords: mathematical modeling, heat and mass transfer, differential equations, qualitative estimates.

Acknowledgements: this work was supported in part by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19–03–00271), as well as by the Russian Foundation for Basic Research and the Government of the Kaluga Region (project no. 18–41–400001).

Введение

Качественная теория дифференциальных уравнений использована для анализа математических моделей стационарной диффузии неравновесных неосновных носителей заряда (ННЗ), генерированных широким электронным пучком в однородных и многослойных полупроводниковых материалах. Использование широких электронных пучков позволяет свести эти задачи к одномерным и описать эти математические модели обыкновенными дифференциальными уравнениями. Ранее вопросы количественной оценки функциональных зависимостей [1, 2], в нашем случае, влияния внешнего воздействия на распределение ННЗ в результате их диффузии в полупроводнике, в сочетании с рассмотрением единственности решения дифференциальных уравнений тепломассопереноса и корректности используемых математических моделей рассматривались весьма редко. Наиболее подробно такие задачи рассматривались для остро сфокусированных пучков [3, 4]: моделировалась нестационарная диффузия неравновесных ННЗ в методе времяпролетной катодолюминесценции полупроводников, проводилась оценка влияния изменений во внешнем воздействии на распределение ННЗ и доказательство корректности рассматриваемой модели. Однако для широких электронных пучков количественный анализ подобных задач ранее не проводился, пожалуй, за исключением рассмотрения некоторых аспектов диффузии ННЗ в однородной полупроводниковой мишени [5]. Что касается диффузии ННЗ в многослойных планарных структурах, то для таких объектов обсуждались лишь некоторые возможности качественного анализа [6, 7].

Постановка задачи

В настоящей работе методами математического моделирования продолжены исследования диффузионных процессов, обусловленных взаимодействием широких электронных пучков с полупроводниками. Объектами изучения являются математические модели, описывающие процессы диффузии неравновесных ННЗ, генерированных широким пучком киловольтных электронов в однородных материалах [8, 9] и многослойных планарных структурах с произвольным числом слоев [6,7]. Основное внимание уделялось влиянию правой части дифференциальных уравнений, функции возбуждения ННЗ $\rho(z)$, на решения дифференциальных уравнений диффузии $\Delta p(z)$, описывающих распределения профиффундировавших неравновесных ННЗ.

Основные результаты

Для рассматриваемых математических моделей диффузии ННЗ в однородных полупроводниковых материалах [8, 9] и для многослойных полупроводниковых планарных структур с произвольным числом слоев [6, 7] получены следующие оценки: если

$$|\rho_2(z) - \rho_1(z)| \le \varepsilon,$$

то $\forall z \in [0,\ \infty)$

$$|\Delta p_2(z) - \Delta p_1(z)| \le \varepsilon C,$$

где $C = \mathrm{const}$, зависящая от вида и коэффициентов дифференциального уравнения, электрофизических параметров полупроводниковой мишени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. А. Д. Мышкиса и О. А. Олейник. Изд. седьмое, исправленное. М.: Изд–во Московского университета, 1984. 296 с.

[2] *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, Главн. ред. физ.–мат. литературы, 1967. 436 с.

[3] *Stepovich Mikhail A., Turtin Dmitry V., Seregina Elena V., Kalmanovich Veronika V.* On the correctness of mathematical models of time–of–flight cathodoluminescence of direct–gap semiconductors // ITM Web of Conferences. 2019. Vol. 30. Art. No. 07014.

[4] *Turtin D. V., Seregina E. V., Stepovich M. A.* Qualitative Analysis of a Class of Differential Equations of Heat and Mass Transfer in a Condensed Material // Journal of Mathematical Sciences (United States). 2020. Vol. 259, iss. 1. P. 166–174.

[5] *Туртин Д. В., Степович М. А., Калманович В. В., Картанов А. А.* О корректности математических моделей диффузии и катодолюминесценции // Таврический вестник информатики и математики. 2021. № 1(50). С. 81–100.

[6] *Калманович В. В., Серегина Е. В., Степович М. А.* Математическое моделирование явлений тепломассопереноса, обусловленных взаимодействием электронных пучков с многослойными планарными полупроводниковыми структурами // Известия РАН. Серия физическая. 2020. Т. 84, № 7. С. 1020–1026.

[7] *Kalmanovich V. V., Seregina E. V., Stepovich M. A.* Mathematical Modeling of Heat and Mass Transfer Phenomena Caused by Interaction between Electron Beams and Planar Semiconductor Multilayers // Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics. 2020. Vol. 84, iss. 7. P. 844–850.

[8] *Белов А. А., Петров В. И., Степович М. А.* Использование модели независимых источников для расчета распределений неосновных носителей заряда, генерированных в полупроводниковом материале электронным пучком // Известия РАН. Серия физическая. 2002. Т. 66, № 9. С. 1317–1322.

[9] *Belov A. A., Petrov V. I., Stepovich M. A.* Model of independent sources used in calculation of minority charge carriers generated by electron beam in semiconductor // Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Ser. Fizicheskaya. 2002. Vol. 66, №. 9. P. 1317–1323.

УДК 517.956.2

Условия существования нетривиальных решений полулинейных эллиптических уравнений на некомпактных римановых многообразиях[1]

В. В. Филатов (Волгоград, Россия)
filatov@volsu.ru

В работе исследуются решения полулинейного уравнения $\Delta u - u\phi(|u|) = 0$ на некомпактных римановых многообразий. Введено понятие функции Лиувилля ассоциированной с полулинейным уравнением, функции Лиувилля внешности компакта, ёмкостного потенциала компакта. Доказано, что из равенства нулю функции Лиувилля следует равенство функции Лиувилля внешности компакта и ёмкостного потенциала.

Ключевые слова: эллиптические уравнения, ёмкостные методы, римановы многообразия, функция Лиувилля.

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-31-90110).

Conditions for the existence of nontrivial solutions of semilinear elliptic equations of non-compact Riemannian manifolds[1]

V. V. Filatov (Volgograd, Russia)
filatov@volsu.ru

This paper investigates solutions of the semilinear equation $\Delta u - u\phi(|u|) = 0$ on non-compact Riemannian manifolds. The concept of the Liouville function associated with a semilinear equation, the Liouville function of the exterior of a compact set, and the capacitive potential of a compact set are introduced. It is proved that the equality of the Liouville function to zero implies the equality of the Liouville function of the exterior of the compact and the capacitive potential.

Keywords: elliptic equations, capacitive methods, Riemannian manifolds, Liouville function.

Acknowledgements: this work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 20-31-90110).

Введение

Данная работа посвящена исследованию свойств ограниченных решений полулинейных эллиптических уравнений

$$\Delta u - u\phi(|u|) = 0 \tag{1}$$

на произвольных некомпактных римановых многообразиях. Предполагается, что $\phi(\xi) > 0, \xi \in \mathbb{R}$ - монотонно неубывающая, непрерывно дифференцируемая функция. А именно, получены условия существования нетривиальных ограниченных решений уравнения (1).

Истоки данной тематики восходят к классификационной теории некомпактных римановых многообразий. Теорема об униформизации утверждает, что всякая односвязная риманова поверхность конформно эквивалентна одной из следующих модельных поверхностей:

- сфере (поверхность эллиптического типа);
- комплексной плоскости (поверхность параболического типа);
- единичному диску (поверхность гиперболического типа).

Отличительным свойством поверхностей параболического типа является выполнением на них теоремы типа Лиувилля. Известно, что на поверхности параболического типа всякая положительная супергармоническая функция является тождественной постоянной. Данное свойство поверхностей параболического типа послужило основой для распространения понятия параболичности на римановы многообразия размерности выше двух. А именно, говорят что многообразие M имеет параболический тип, если всякая ограниченная снизу супергармоническая функция на M есть тождественная постоянная.

Особую эффективность в определении типа римановых многообразий показала ёмкостная техника см. напр [1–3]. А. А. Григорьяном в работе [4] было доказано, что параболичность типа риманова многообразия эквивалентна тому, что вариационная ёмкость всякого (некоторого) компакта равна нулю.

Очевидно, что классификационная теория римановых многообразий естественным образом приводит к теоремам типа Лиувилля. Считающаяся классической формулировка теоремы Лиувилля утверждает, что в $\mathbb{R}^n$ всякая ограниченная гармоническая функция является тождественной постоянной.

В настоящее время осуществляется следующий подход к теоремам типа Лиувилля. Пусть на римановом многообразии M задан некоторый класс функций A и эллиптический оператор L, говорят, что на M выполнено (A, L) - лиувиллево свойство, если всякое решение уравнения $Lu = 0$ из класса A тривиально.

Данной тематике посвящено огромное количество работ [5–7], рассматриваются как различные классы A (ограниченные, имеющий конечный интеграл энергии, суммируемые, положительные и т.д.) так и различные эллиптические уравнения, например:

- уравнение Лапласа $\Delta u = 0$;
- стационарное уравнение Шрёдингера $\Delta u - c(x)u = 0$;
- полулинейные эллиптические уравнения $\Delta u - g(x,u) = 0$.

Приведём некоторые примеры. А. А. Григорьяном в работе [1] с помощью понятия массивных множеств была получена оценка размерности пространств ограниченных гармонических функций.

Позже с помощью понятия $c(x)$ - массивных множеств в работе А. А. Григорьяна и А. Г. Лосева [8] была получена оценка размерности пространств ограниченных решений стационарного уравнения Шрёдингера.

В работе А. Г. Лосева, В. В. Филатова [9] было доказано, что на многообразии существует нетривиальное ограниченное решение полулинейного уравнения $Lu = \Delta u - g(x,u) = 0$ тогда и только тогда, когда на многообразии существует L - массивное подмножество.

В работе Е. А. Мазепы [10] доказано, что на многообразии существуют нетривиальные ограниченные решения полулинейного уравнения $\Delta u - g(x,u) = 0$ тогда и только тогда, когда на многообразии существует нетривиальные ограниченные решения стационарного уравнения Шрёдингера $\Delta u - u = 0$.

Целью данной работы является получение условий существования нетривиальных ограниченных решений полулинейного уравнения (1).

Условия существований нетривиальных ограниченных решений полулинейного уравнения

Пусть M - произвольное некомпактное риманово многообразие, B - компакт в M, $\{B_k\}$ - гладкое исчерпание M то есть последовательность предкомпактных открытых множеств, таких что $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k = M, \overline{B_k} \subset B_{k+1}$.

Рассмотрим последовательность решений задач Дирихле в $B_k \setminus B$: $Lh_k = \Delta h_k - h_k\phi(|h_k|) = 0, h_k|_{\partial B} = 1, h_k|_{\partial B_k} = 1$. Последовательность $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ в силу принципа максимума является убывающей и ограниченной. Предельную функцию $h_B = \lim\limits_{k\to\infty} h_k$ будем называть функцией Лиувилля внешности компакта.

Аналогично, предельную функцию последовательности решений задач Дирихле в $B_k \setminus B$: $Ls_k = \Delta s_k - h_k\phi(|s_k|) = 0, s_k|_{\partial B} = 1, s_k|_{\partial B_k} = 0$ будем называть ёмкостным потенциалом компакта B и обозначать s_B.

Предельную функцию последовательности решений задач Дирихле в B_k: $LH_k = \Delta H_k - H_k\phi(|H_k|) = 0, H_k|_{\partial B_k} = 1$ будем называть функцией

Лиувилля и обозначать H. Несложно показать, что H не зависит от выбора исчерпания.

Предельную функцию последовательности решений задач Дирихле в $B_k \setminus B$: $Lu_k = \Delta u_k - u_k \phi(|u_k|) = 0, u_k|_{\partial B} = 0, u_k|_{\partial B_k} = 1$ будем называть гармонической мерой B и обозначать u_B.

Теорема 1. *На многообразии M всякое ограниченное решение уравнения* (1) *есть тождественный ноль, тогда и только тогда когда* $H \equiv 0$.

Теорема 2. *Функция Лиувилля $H \equiv 0$ тогда и только тогда, когда для всякого компакта B $u_B \equiv 0$.*

Теорема 3. *Если Функция Лиувилля $H \equiv 0$ то для всякого компакта B $h_B \equiv s_B$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Grigor'yan A.* Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds // Bull. Amer. Math. Soc. 1999. Vol. 36. P. 135–249.

[2] *Кесельман В. М.* Понятие и критерии емкостного типа некомпактного риманова многообразия на основе обобщенной емкости // Математическая физика и компьютерное моделирование. 2019. Т. 22, № 2. С. 21–32.

[3] *Korolkov S. A., Losev A. G.* Generalized harmonic functions of Riemannian manifolds with ends // Mathematische Zeitshrift. 2012. Vol. 272, № 1. P. 459–472.

[4] *Григорьян А. А.* О существовании положительных фундаментальных решений уравнения Лапласа на римановых многообразиях // Матем. сб. 1985. Т. 128(170), № 3(11). С. 349–358.

[5] *Grigor'yan A., Verbitsky I.* Pointwise estimates of solutions to semilinear elliptic equations and inequalities // J. d'Analyse mathematique. 2019. Vol. 131, № 2. P. 559–601.

[6] *Murata M., Tsuchida T.* Uniqueness of L 1 harmonic functions on rotationally symmetric Riemannian manifolds // Kodai Mathematical Journal. 2014. Vol. 37, № 1. P. 1–15.

[7] *Yau S. T.* Some Function-Theoretic Properties of Complete Riemannian Manifold and Their Applications to Geometry // Indiana University Mathematics Journal. 1976. Vol. 25, № 7. P. 659–670.

[8] *Григорьян А. А., Лосев А. Г.* О размерности пространств решений стационарного уравнения Шредингера на некомпактных римановых многообразиях // Математическая физика и компьютерное моделирование. 2017. Т. 20, № 3, С. 34–42.

[9] *Лосев А. Г., Филатов В. В.* О некоторых емкостных характеристиках некомпактных римановых многообразий // Изв. вузов. Матем. 2021. №3. С. 65–75.

[10] *Мазепа Е. А.* Лиувиллево свойство и краевые задачи для полулинейных эллиптических уравнений на некомпактных римановых многообразиях // Сиб. матем. журн. 2012. Т. 1(53). С. 165–179.

УДК 512.518.68

Преобразование типа свертки и приближения функций в пространстве S_p[1]

Ю. Х. Хасанов, Ё. Ф. Касымова (Душанбе, Таджикистан)
yukhas60@mail.ru

Рассматривается 2π – периодическая функция $f(x)$ принадлежащая пространству $S_p(1 \le p \le \infty)$ на периоде и преобразование типа свертки, содержащее некоторую действительную функцию ограниченной вариации на всей вещественной оси. Это преобразование представляет собой обобщение некоторых конкретных преобразований, связанных различными характеристиками рассматриваемой функции. В порядке обобщения некоторых из результатов, касающихся особенностей интегральной метрики $S_p(1 \le p \le \infty)$, с учетом особенности случая $1 \le p \le \infty$, здесь исследуется вопрос о зависимости между этим преобразованием и наилучшими приближениями функции тригонометрическими полиномами. Получены оценки сверху и снизу для рассматриваемой свертки в зависимости от величины наилучшего приближения функций $f(x) \in S_p(1 \le p \le \infty)$.

Ключевые слова: периодическая функция, ряд Фурье, преобразование типа свертки, наилучшие приближения, преобразование Фурье, тригонометрические полиномы, коэффициенты Фурье, функции ограниченной вариации.

Convolution type transformation and approximation of functions in the space S_p[1]

Yu. Kh. Khasanov, Y. F. Khasimnova (Dushanbe, Tajikistan)
yukhas60@mail.ru

We consider a 2π – periodic function $f(x)$ belonging to the space $S_p(1 \le p \le \infty)$ on the period and a convolution type transformation containing some real function of bounded variation on the entire real axis. This transformation is a generalization of some specific transformations related to various characteristics of the function under consideration. As generalization of some results concerning features of the integral S_p–metric $S_p(1 \le p \le \infty)$, taking into account the peculiarity of the case $1 \le p \le \infty$, the question of the relationship between this transformation and the best approximations of the function by trigonometric polynomials is investigated here. Top and bottom estimates for the considered convolution are obtained depending on the value of the best approximation of the functions $f(x) \in S_p(1 \le p \le \infty)$.

Keywords: periodic function, Fourier series, convolution type transformation, best approximations, Fourier transform, trigonometric polynomials, Fourier coefficients, bounded variation functions.

Пусть S_p – пространство периодических периода 2π интегрированных по Лебегу функций $f(x)$, для которых сходится ряд

$$\sum_{k\in Z} |c_k|^p \ \ (c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) exp(-ikx)dx),$$

с нормой

$$\|f(x)\|_{S_p} = (\sum_{k\in Z} |c_k|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty \ \ (1 \le p \le \infty),$$

$$\|f(x)\|_{S_p} = \max_{v\in Z} |c_v| \ \ (p = \infty).$$

Вопросы приближения периодических функций тригонометрическими полиномами в пространстве S_p достаточно полно исследованы в работах А. И. Степанца [1], [2].

С помощью функции $\sigma(u)$, которая задана на всей действительной оси и тождественно не равна нулю на $(-\infty, \infty)$, и которая является функцией ограниченной вариации на $(-\infty, \infty)$, для каждой функции $f(x) \in S_p$ рассматривается следующее преобразование

$$F_\sigma(f; x, h) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - hu) d\sigma(u),$$

где h – действительный параметр. При этом, указанная выше функция $\sigma(u)$ удовлетворяет еще условиям:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\sigma(u) = 0, \ \ \widehat{\sigma}(-u) = \widehat{\sigma}(u)$$

где

$$\widehat{\sigma}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} exp(-iux) d\sigma(u).$$

Такие общие преобразования, которые принято называть преобразованиями типа свертки для классических Лебеговых пространств $L_p(1 \le p < \infty)$ ранее рассматривались в работах [3] – [6].

С помощью указанного преобразования $F_\sigma(f; x, h)$, для каждой функции $f(x) \in S_p$ рассматривается характеристика $D(f; \sigma; h; p) = \|F_\sigma(f; x, h)\|_{s_p}$.

Нетрудно заметить, что ряд Фурье преобразования $F_\sigma(f; x, h)$ имеет вид $\sum\limits_{k\in Z} c_k \widehat{\sigma}(kh) exp(ikx)$. Благодаря этому, имеет место неравенство $D(f; \sigma; h; p) \le V(\sigma)\|f(x)\|_{S_p}$, где $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |d\sigma(u)| = V(\sigma) < \infty$.

Известно [1], что наилучшим приближением функции $f(x) \in S_p$ тригонометрическими полиномами $T_{n-1}(x)$ порядка не выше $n-1$ в метрике пространства $S_p (1 \le p < \infty)$ является частная сумма Фурье порядка не выше $n-1$, т.е.

$$E_n(f)_{S_p} = \inf_{T_{n-1}} \|f(x) - T_{n-1}(x)\|_{S_p} = \|f(x) - S_{n-1}(f;x)\|_{S_p},$$

где

$$S_{n-1}(f;x) = \sum_{|k|\le n-1} c_k \cdot \frac{exp(ikx)}{\sqrt{2\pi}},$$

c_k- коэффициенты Фурье функции $f(x)$. Таким образом

$$E_n(f)_{S_p} = \left(\sum_{|k|\le n-1} |c_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Теперь сформулируем следующие утверждения, которые устанавливают оценки $W(f;\sigma;t;p)$ и $D(f;\sigma;h;p)$ через величины наилучшего приближения функции $f(x) \in S_p$.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x) \in S_p$, а последовательность целых чисел $\{n_\nu\}$ такая, что*

$$n_0 = 1 < n_1 < n_2 < \ldots < n_\nu < n_{\nu+1} < \ldots \quad (\nu \in Z, n_{-\nu} = -n_\nu).$$

Тогда, при $n_{m+1} \le \frac{1}{h}$ имеет место оценка

$$D^p(f;\sigma;h;p) \le \left| \sum_{|\nu|\le m} \sum_{k=n_\nu}^{n_{\nu+1}-1} E_k^p(f)_{S_p} (|\widehat{\sigma}(kh)|^p - |\widehat{\sigma}((k-1)h)|^p) \right| +$$

$$+ E^p_{n_{m+1}}(f)_{S_p} (V^p(\sigma) - |\widehat{\sigma}((n_{m+1}-1)h)|^p).$$

Теорема 2. *В предположениях условий теоремы 1 справедлива следующая оценка*

$$D^p(f;\sigma;h;p) + V^p(\sigma) E^p_{n_{m+1}-1}(f)_{S_p} \ge$$

$$\ge \sum_{|\nu|\le m-1} \sum_{k=n_\nu}^{n_{\nu+1}-1} E_k^p(f)_{S_p} (|\widehat{\sigma}(kh)|^p - |\widehat{\sigma}((k-1)h)|^p).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств S^p_φ. Киев : Препринт НАН Украины. Ин-т математики, 2000. 52 с.

[2] *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств S_{φ}^{p}. Киев : Препринт НАН Украины. Ин-т математики, 2001. 85 с.

[3] *Shapiro И. О.* A tauberian related to approximation theory // Acta. Math. 1968. Vol. 120, № 3–4. P. 279–292.

[4] *Shapiro И. О., Boman J.* Compaison theorems for a generalized modules of continuety // Bill. Amer. Math. Soc. 1969. Vol. 75, № 6. P. 1266–1268.

[5] *Тиман М. Ф.* Наилучшие приближения периодических функций тригонометрическими полиномами и преобразование типа свертки // Докл. АН СССР. 1971. Т. 198, № 4. С. 776–779.

[6] *Хасанов Ю. Х., Касымова Ё. Ф.* О связи преобразования типа свертки и наилучшего приближения периодических функций // Матем. физики и комп. моделирование. 2021. Т. 24, № 1. С. 5–15.

УДК 517.96;517.984

Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача для волнового уравнения[1]

А. П. Хромов (Саратов, Россия)
KhromovAP@sgu.ru

Используя операцию интегрирования расходящегося ряда, приводятся результаты по смешанной задаче для волновго уравнения, не требующие привлечения классических решений.

Ключевые слова: расходящиеся ряды, волновое уравнение, смешанная задача.

Divergent series and generalized mixed problem for wave equation[1]

Avgust P. Khromov (Saratov, Russia)
KhromovAP@sgu.ru

By integrating divergent series the results, concerning mixed problem for wave equation, are obtained without use of classic solution.

Keywords: divergent series, wave equation, mixed problem.

1. Рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad (x,t) \in [0,1] \times [0,\infty), \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0. \tag{3}$$

Формальное решение по методу Фурье есть

$$u(x,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi(\xi), \sin n\pi\xi) \sin n\pi x \cos n\pi t, \tag{4}$$

где $(f,g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Определение. *Классическим решением смешанной задачи* (1)–(3) называется функция $u(x,t)$, непрерывная вместе с производными $u'_x(x,t)$, $u'_t(x,t)$, причем, в свою очередь, $u'_x(x,t)$ ($u'_t(x,t)$) абсолютно непрерывна по x (по t), удовлетворяющая условиям (2), (3) и почти всюду по x и t уравнению (1).

Отсюда следует, что для классического решения необходимо считать, что $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывны и $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

Относительно классического решения справедлива

Теорема 1 [1]. *Если $u(x,t)$ есть классическое решение задачи* (1)–(3) *с условием, что $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ класса Q, то оно единственно и находится по формуле* (4), *в которой ряд справа при любом фиксированном $t > 0$ сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0,1]$.*

Здесь и в дальнейшем считаем, что функция $f(x,t)$ переменных $(x,t) \in [0,1] \times [0,\infty)$ есть функция класса Q, если $f(x,t) \in L[Q_T]$ при любом $T > 0$, где $Q_T = [0,1] \times [0,T]$.

Таким образом, у нас задача (1)–(3) и ряд (4) тесно связаны.

Расширим понятие этой связи. Ряд (4) имеет смысл для любой $\varphi(x) \in L[0,1]$, хотя теперь он может быть и расходящимся. Тем не менее будем считать, что он является формальным решением задачи (1)–(3), но понимаемой теперь чисто формально. Эту задачу (1)–(3) и будем называть *обобщенной смешанной задачей.* Найти решение обобщенной смешанной задачи — значит найти «сумму» расходящегося ряда (4) («сумма» в кавычках означает, что это сумма именно расходящегося ряда [2, 3]). Помимо аксиом о расходящихся рядах из [3, с. 19], будем пользоваться еще следующим правилом интегрированния расходящегося ряда:

$$\int \sum \stackrel{df}{=} \sum \int, \tag{5}$$

где $\int$ — определенный интеграл.

Итак, рассмотрим ряд (4). Имеем

$$u(x,t) = \Sigma_+ + \Sigma_-, \tag{6}$$

где $\Sigma_\pm = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\varphi(\xi), \sin n\pi\xi) \sin n\pi(x \pm t)$. Отсюда следует, что для нахождения «суммы» ряда (4) надо найти «сумму» тригонометрического ряда Фурье функции $\varphi(x)$, т. е. ряда

$$2\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi(\xi), \sin n\pi\xi) \sin n\pi x, \tag{7}$$

Пусть «сумма» ряда (7) при $x \in [0,1]$ есть какая-то функция $g(x) \in L[0,1]$. Тогда в соответствие с правилом (5) имеем

$$\int\limits_0^x g(\eta)\, d\eta = 2\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi(\xi), \sin n\pi\xi) \int\limits_0^x \sin n\pi\eta\, d\eta. \tag{8}$$

По теореме 3 ([4, с. 320]) ряд в (8) сходится при любом $x \in [0,1]$ и его сумма есть $\int\limits_0^x \varphi(\eta)\,d\eta$, т. е.

$$2\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi(\xi), \sin n\pi\xi)\int\limits_0^x \sin n\pi\eta\,d\eta = \int\limits_0^x \varphi(\eta)\,d\eta.$$

Таким образом, получили, что $\int\limits_0^x g(\eta)\,d\eta = \int\limits_0^x \varphi(\eta)\,d\eta$. Отсюда $g(x) = \varphi(x)$ почти всюду, т. е. нашли «сумму» $g(x)$ расходящегося ряда (7). Далее, $\sin n\pi x$ нечетна и 2-периодична. Тогда получаем, что «сумма» ряда (7) при $x \in (-\infty, \infty)$ есть $\tilde{\varphi}(x)$, где $\tilde{\varphi}(x)$ — нечетное, 2-периодическое продолжение $\varphi(x)$ с отрезка $[0,1]$ на всю ось. В силу (6) получаем, что «сумма» $u(x,t)$ ряда (4) есть

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)]. \tag{9}$$

Таким образом, получена

Теорема 2. *Решением обобщенной смешанной задачи* (1)–(3) *является функция* $u(x,t)$ *класса* Q*, определенная по формуле* (9).

2. Рассмотрим следующую обобщенную смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t),\ (x,t) \in [0,1]\times[0,\infty), \tag{10}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{11}$$

$$u(x,0) = u'_t(x,0) = 0, \tag{12}$$

где $f(x,t)$ есть функция класса Q.

Формальное решение ее по методу Фурье есть

$$u(x,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^t (f(\xi,\tau), \sin n\pi\xi)\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x \sin n\pi(t-\tau)\,d\tau. \tag{13}$$

Так как $\frac{2}{n\pi}\sin n\pi x \sin n\pi(t-\tau) = \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \sin n\pi\eta\,d\eta$, то (13) переходит в

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^t (f(\xi,\tau), \sin n\pi\xi)\,d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \sin n\pi\eta\,d\eta. \tag{14}$$

Из (14) в силу правила (5) получаем

$$u(x,t)=\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \sum_{n=1}^{\infty}(f(\xi,\tau),\sin n\pi\xi)\sin n\pi\eta\,d\eta =$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}(\eta,\tau)\,d\eta \qquad (15)$$

поскольку ряд в (15), как это следует из п. 1, имеет «сумму» $\frac{1}{2}\tilde{f}(\eta,\tau)$, где $\tilde{f}(\eta,\tau)$ есть нечетное, 2-периодическое продолжение по η на всю ось функции $f(\eta,\tau)$.

Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Решение $u(x,t)$ обобщенной смешанной задачи* (10)–(12) *есть функция класса Q, определяемая по формуле*

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}(\eta,\tau)\,d\eta. \qquad (16)$$

Отметим, что без привлечения операции интегрирования расходящегося ряда формула (16) приводится в [5].

То, что $u(x,t)$ есть функция класса Q, дается следующей леммой.

Лемма. *Имеет место оценка*

$$\|u(x,t)\|_{L[Q_T]} \le T(T+2)\|f(x,t)\|_{L[Q_T]}.$$

3. Рассмотрим такую обобщенную смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+f(x,t), \quad (x,t)\in[0,1]\times[0,\infty), \qquad (17)$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0, \qquad (18)$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad u'_t(x,0)=0. \qquad (19)$$

Здесь $f(x,t)$ — функция класса Q и $\varphi(x)\in L[0,1]$. Формальное решение по методу Фурье [1] есть

$$u(x,t)=u_0(x,t)+u_1(x,t),$$

где $u_0(x,t)$ есть ряд (4), $u_1(x,t)$ есть ряд (13). Поэтому, исходя из п.п. 1, 2 получаем

Теорема 4. *Обобщенная смешанная задача* (17)–(19) *имеет решение класса* Q, *определяемое по формуле:*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)] + \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}(\eta,\tau)\, d\eta. \qquad (20)$$

4. Наконец, рассмотрим как приложение к пп. 1–3 следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \qquad (21)$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad (22)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0. \qquad (23)$$

где $\varphi(x) \in L[0,1]$, $q(x) \in L[0,1]$, $q(x)u(x,t)$ класса Q.

Тогда из результатов п. 3 получаем, что нахождение решения задачи (21)–(23) в класссе Q сводится к нахождению в классе Q решения интегрального уравнения

$$u(x,t) = \frac{\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_0^t \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{q(\eta)u(\eta,\tau)}\, d\eta, \qquad (24)$$

где $\widetilde{q(\eta)u(\eta,\tau)}$ есть нечетное, 2-периодическое по η продолжение функции $q(\eta)u(\eta,\tau)$ на всю ось.

Для случая классических решений переход к уравнению (24) использовался ранее в [6].

Интегральное уравнение (24) имеет единственное решение в классе Q, получаемое по методу последовательных подстановок. Теперь привлечение операции интегрирования расходящегося ряда приводит к изменению методики исследования расходящихся рядов, содержащейся в [7–10]: для обоснования правильности получаемых результатов уже не требуется привлечения классических решений.

5. Важность введения операции интегрирования расходящегося ряда подчеркивается следующим рассуждением. Если сохранить п. 1, удалить из п. 2 предложение после формулы (16), и из п. 4 — третье и последнее предложения, то получаем цельный текст без ссылок на какие-либо источники, кроме [1–4].

6. Хорошо известные факты можно объяснить с точки зрения расходящихся рядов. Так, если рассматривать малые значения спектрального параметра λ в уравнении Фредгольма второго рода, то решение этого

уравнения представляется сходящимся рядом последовательных подстановок, и выдающийся результат Фредгольма о решении уравнения второго рода при произвольных λ представляет собой явную «сумму» расходящегося ряда по отношению к упомянутому сходящемуся ряду последовательных подстановок.

Другой пример — полное аналитическое продолжение ряда Тейлора аналитической в окрестности фиксированной точки функции вне круга сходимости есть «сумма» расходящегося ряда по отношению к упомянутому ряду Тейлора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Хромов А. П.* Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55, № 5. С. 717–731. DOI: 10.1134/S0374064119050121

[2] *Эйлер Л.* Дифференциальное исчисление. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1949. 580 с.

[3] *Харди Г.* Расходящиеся ряды. М. : Изд-во иностр. лит., 1951. 504 с.

[4] *Натансон И. П.* Теория функций вещественной пееменной. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1957. 552 с.

[5] *Корнев В. В., Хромов А. П.* Сходимость формального решения по методу Фурье в смешанной задаче для простейшего неоднородного волнового уравнения // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2017. Вып. 19. С. 41–44.

[6] *Корнев В. В., Хромов А. П.* О классическом и обобщенном решении смешанной задачи для волновго уравнения // Понтрягинские чтения – XXIX : материалы конференции, посвященной 90-летию академика В. А. Ильина (2–6 мая 2018. М. : ООО «Макс Пресс». С. 132–133.

[7] *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и метод Фурье для волнового уравнения // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 20-й международ. Сарат. зим. шк. (Саратов, 28 янв.–1 февр. 2020 г.). Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2020. С. 433–439.

[8] *Ломов И. С.* Метод А. П. Хромова решения смешанной задачи для гиперболического уравнения. Обобщенная формула Даламбера // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 20-й международ. Сарат. зим. шк. (Саратов, 28 янв.–1 февр. 2020 г.). Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2020. С. 231–236.

[9] *Хромов А. П.* О классическом решении смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами и нулевой начальной скоростью // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 3. С. 280-288. DOI: 10.18500/1816-9791-2019-19-3-280-288

[10] *Хромов А. П., Корнев В. В.* Расходящиеся ряды в методе Фурье для волнового уравнения // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27, № 4. С. 215–238.

УДК 519.642.8

Об одной обратной задаче[1]

Г. В. Хромова, С. Ю. Советникова (Саратов, Россия)
KhromovaGV@info.sgu.ru, SovetnikovaSY@mail.ru

Дан метод решения обратной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения о нахождении равномерных приближений к правой части в случае, когда заданы среднеквадратичные приближения к точному решению.

Ключевые слова: обыкновенное дифференциальное уравнение, обратная задача, регуляризация.

Towards one inverse problem[1]

G. V. Khromova, S. Y. Sovetnikova (Saratov, Russia)
KhromovaGV@info.sgu.ru, SovetnikovaSY@mail.ru

A method is given for solving the inverse problem for an ordinary differential equation on finding the uniform approximations to the right-hand side in the case when the mean square approximations to the exact solution are given.

Keywords: ordinary differential equations, inverse problem, regularization.

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$p_0(x)y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + p_n(x)y(x) = f(x), \tag{1}$$

где $y(x) \in C^n[0,1], p_i(x) \in C[0,1], i = 0, \ldots, n$.

Предполагается, что нам известно приближение $y_\delta(x)$ к точному решению $y(x)$, такое, что $\|y_\delta(x) - y(x)\|_{L_2[0,1]} \leq \delta$. Требуется найти равномерные приближения к $f(x)$.

Такая задача в несколько иной постановке(в случае, когда $y_\delta(x)$ - равномерное приближение к $y(x)$), рассматривалась в [1,2] и там предлагались для её решения различные методы регуляризации. В частности, в [2] рассматривался метод, сводящий поставленную задачу к задаче восстановления производных любого порядка функции $y(x)$, заданной с погрешностью, и там применялся простой по конструкции метод, базирующийся на операторах Стеклова. Но этот метод может вызвать трудности в вопросе согласования параметра регуляризации с погрешностью δ при решении прикладных задач, поскольку при больших значениях n на параметр налагаются всё большие ограничения.

С целью устранения этого недостатка здесь предлагается метод, использующий семейство операторов с разрывной областью значений, введённое в [3].

Итак, рассматривается семейство операторов

$$T_\alpha^{(m)} y = \begin{cases} T_{\alpha 2}^{(m)} y, x \in [0, \frac{1}{2}] \\ T_{\alpha 1}^{(m)} y, x \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

где

$$T_{\alpha 2}^{(m)} y = A_m \alpha^{-(2m+1)} \int\limits_x^{x+\alpha} \frac{d^m}{dx^m} \left[(t-x)^m (\alpha - (t-x))^m \right] y(t) dt,$$

$$A_m = \left(\sum_{l=0}^{m} (-1)^l \frac{C_m^l}{m+l+1} \right)^{-1}, \; m = 0, 1, \ldots, n.$$

$T_{\alpha 1}^{(m)}$ отличается от $T_{\alpha 2}^{(m)}$ заменой интервала $[x, x+\alpha]$ на $[x-\alpha, x]$, а $(t-x)$ – на $(x-t)$.

Известно [3], что

$$\left\| T_\alpha^{(m)} y - y^{(m)} \right\|_{L_\infty[0,1]} \to 0 \text{ при } \alpha \to 0 \tag{2}$$

$\left(\|\cdot\|_{L_\infty} = \max \left\{ \|\cdot\|_{C[0,1/2]}, \|\cdot\|_{C[1/2,1]} \right\} \right)$
и что

$$\left\| T_\alpha^{(m)} \right\|_{L_2 \to L_\infty} = C_m \alpha^{-\frac{2m+1}{2}}. \tag{3}$$

Константа C_m определяется в следующей лемме

Лемма. *Имеет место формула*
$C_m = A_m B_m$, *где* $B_m = (\sum_1 + \sum_2)^{\frac{1}{2}}$,

$\sum_1 = \sum\limits_{k=0}^{m} (C_m^k)^2 \left[(k+1)(k+2) \ldots (k+m) \right]^2 (2k+1)^{-1}$,

$\sum_2 = 2 \sum\limits_{k,l=0 (k \neq l)}^{m} C_m^k C_m^l (-1)^{k+l} (k+1)(k+2) \ldots (k+m)(l+1)(l+2) \ldots (l+m)(k+l+1)^{-1}$

Определим функцию

$$f_\delta^\alpha(x) = \sum_{m=0}^{n} p_{n-m}(x) T_\alpha^{(m)} y_\delta(x). \tag{4}$$

Из (1)-(4) и оценки

$$\left\| T_\alpha^{(m)} y_\delta - y^{(m)} \right\|_{L_\infty} \le \left\| T_\alpha^{(m)} \right\|_{L_2 \to L_\infty} \delta + \left\| T_\alpha^{(m)} y - y^{(m)} \right\|_{L_\infty}$$

вытекают следующие теоремы.

Теорема 1. *Если* $\alpha = \alpha(\delta)$ *так, что* $\alpha(\delta) \to 0$ *и* $\delta\left(\alpha(\delta)\right)^{-\frac{2n+1}{2}} \to 0$ *при* $\delta \to 0$, *то* $\left\|f_\delta^{\alpha(\delta)}(x) - f(x)\right\|_{L_\infty[0,1]} \to 0$ *при* $\delta \to 0$.

Теорема 2. *Если существует непрерывная* $y^{(n+1)}(x)$ *при* $x \in [0,1]$, *то справедлива оценка*

$$\left\|f_\delta^{\alpha(\delta)}(x) - f(x)\right\|_{L_\infty} \leq 2M^{\frac{2n+1}{2n+3}}\left(P_0C_n\right)^{\frac{2}{2n+3}}\delta^{\frac{2}{2n+3}} +$$

$$+\sum_{m=0}^{n-1} P_{n-m}C_m\left(\frac{P_0C_n}{M}\right)^{-\frac{2m+1}{2n+3}}\delta^{\frac{2(n-m)+2}{2n+3}},$$

где $\alpha(\delta) = \left(\dfrac{P_0C_n}{M}\right)^{\frac{2}{2n+3}}\delta^{\frac{2}{2n+3}}$, $P_k = \|p_k(x)\|_{C[0,1]}$, $k = 0,\ldots,n$, $M = \sum\limits_{m=0}^{n} P_{n-m}M_m$, $M_m = \left\|y^{(m+1)}(x)\right\|_{C[0,1]}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Денисов А. И.* Введение в теорию обратных задач // Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1994, 206 с.

[2] *Хромов А. А.* Решение одной обратной задачи // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16., вып. 2. С. 180–185.

[3] *Хромова Г. В.* Об одном семействе операторов с разрывной областью значений // Современные проблемы теории функций и их приложения. Мат-лы 20-й межд. Сарат. зим. школы (Саратов, 28 янв-01 февр 2020 г.) Саратов: Изд-во “Научная книга”, 2020. С. 440–443.

УДК 517.982.256

Равномерно выпуклые несимметричные пространства[1]

И. Г. Царьков (Москва, Россия)
tsar@mech.math.msu.su

Для равномерно выпуклых несимметричных пространств рассматриваются вопросы о непустых пересечениях вложенной системы выпуклых ограниченных замкнутых множеств. Изучаются вопросы аппроксимативной единственности в этих пространствах для случая непустых замкнутых выпуклых подмножеств.

Ключевые слова: несимметричные пространства, равномерно выпуклые пространства, аппроксимативная единственность.

Благодарности: работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 22-21-00204).

Uniformly rotund asymmetrical spaces[1]

I. G. Tsarkov (Moscow, Russia)
tsar@mech.math.msu.su

For uniformly convex asymmetrical spaces, we consider questions about non-empty intersections of a nested system of convex bounded closed sets. Questions about approximative uniqueness in these spaces are studied for the case of non-empty closed convex subsets.

Keywords: asymmetric spaces, uniformly rotund spaces, approximatively uniqueness.

Acknowledgements: this research was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation (grant no. 22-21-00204).

Введение

В настоящей работе мы будем рассматривать обобщения линейно нормированных пространств, а именно, линейные пространства с некоторой несимметричной нормой $\|\cdot|$ на нем. От несимметричной нормы на линейном пространстве X будем требовать свойства: 1). $\|\alpha x| = \alpha\|x|$ для всех $\alpha \geqslant 0$, $x \in X$; 2). $\|x+y| \leqslant \|x| + \|y|$ для всех $x, y \in X$ и 3). $\|x| \geqslant 0$ для всех $x \in X$, и 3a). $\|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Несимметричная норма задается функционалом Минковского некоторого, вообще говоря, несимметричного тела, содержащего ноль в своем ядре. Отметим также, что вместе с несимметричной нормой $\|\cdot|$ часто удобно рассматривать норму симметризации: $\|x\| := \max\{\|x|, \|-x|\}$ $(x \in X)$. В общем случае пространство с несимметричной нормой удовлетворяет только аксиоме отделимости T_1 (т.е. для любых $a, b \in X$ найдутся их окрестности $O(a)$, $O(b)$ такие, что $a \notin O(b)$, $b \notin O(a)$) и может быть нехаусдорфовым (т.е. может не удовлетворять аксиоме T_2). Более подробно свойства несимметричных пространств можно посмотреть в работах [1]–[3].

В несимметричных пространствах мы выделим подкласс пространств, которые будем называть равномерно выпуклыми. Отметим, что главной целью здесь является нахождение такого определения, при котором большинство свойств равномерно выпуклых пространств (в случае симметричной нормы) переносились бы на существенно несимметричные пространства (норма которых не эквивалентна норме симметризации).

Через $B(x,r)$ и $\mathring{B}(x,r)$ обозначим соответственно "замкнутый" и открытый шар в линейном несимметричном нормированном пространстве или в полунормированном пространстве $\mathcal{X} = (X, \| \cdot |)$ с центром x радиуса r, т.е. соответственно множества $\{y \in X \mid \|y-x| \leqslant r\}$ и $\{y \in X \mid \|y-x| < r\}$. Надо отметить, что шар $B(x,r)$ может не быть замкнутым множеством относительно топологии, порожденной открытыми шарами как предбазой.

Для произвольного множества M некоторого несимметричного нормированного пространства или полунормированого X через $\varrho(y,M)$ $(y \in X,\ M \subset X)$ обозначим расстояние до множества M, т.е. величину $\inf\limits_{z\in M} \|z-y|$.

Через $P_M x$ обозначим множество всех ближайших точек из M для $x \in X$, т.е. множество $\{y \in M \mid \|y-x| = \varrho(x,M)\}$.

Основные результаты

Перейдем к определению равномерно выпуклых несимметричных пространств.

Положим

$$\Delta(a) := \|f-ag| + a\|g| - \|f|, \quad a \in [0,1].$$

Надо отметить, что из этого определения вытекает, что для любых $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых $f,g \in X$: $\|f| = \|g| = 1$ из условия $\|(f+g)/2| \geqslant 1-\delta$ вытекает, что $\|f-\mu g| \leqslant \varepsilon$) для некоторого $\mu \in [1-\varepsilon, 1]$.

Определение 1. *Несимметричное пространство $X = (X, \| \cdot |)$ называется равномерно выпуклым, если для любых $\varepsilon > 0$ и $a \in (0,1]$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых $f,g \in X$: $\|f| = \|g| = 1$ из условия $\Delta(a) < \delta$ вытекает, что $f \in B(\mu g, \varepsilon)$ для некоторого $\mu \in [1-\varepsilon, 1]$.*

Определение 2. *Несимметричное пространство $X = (X, \| \cdot |)$ называется право- (лево-) полным, если для любой последовательности $\{x_n\} \subset X$ из условия, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$*

такое, что $\|x_m - x_n| < \varepsilon$ *для всех* $m \geqslant n \geqslant N$ *(такая последовательность называется фундаментальной), вытекает, что существует точка* $x \in X$ *такая, что* $\|x - x_n| \to 0$ ($\|x_n - x| \to 0$) *при* $n \to \infty$. *Право полное пространство будем называть просто полным пространством.*

Теорема 1. *Пусть* N *– непустое замкнутое выпуклое подмножество в несимметричном равномерно выпуклом право-полном пространстве* $X = (X, \|\cdot|)$. *Тогда для всех* $x \in X$ *существует единственная точка* $y \in N$ *(ближайшая для* x *во множестве* N*):* $\|y - x| = \varrho(x, N)$, *и для любой (минимизирующей) последовательности* $\{y_n\} \subset N$ *такой, что* $\|y_n - x| \to \varrho(x, N)$ ($n \to \infty$) *вытекает, что* $\|y_n - y| \to 0$ ($n \to \infty$).

Теорема 2. *Пусть* N *– непустое замкнутое выпуклое подмножество в несимметричном равномерно выпуклом лево-полном пространстве* $X = (X, \|\cdot|)$ *с аксиомой отделимости* T_2. *Тогда для всех* $x \in X$ *существует единственная точка* $y \in N$ *(ближайшая для* x *во множестве* N*):* $\|y - x| = \varrho(x, N)$, *и для любой (минимизирующей) последовательности* $\{y_n\} \subset N$ *такой, что* $\|y_n - x| \to \varrho(x, N)$ ($n \to \infty$) *вытекает, что* $\|y_n - y| \to 0$ ($n \to \infty$).

Теорема 3. *Пусть* $X = (X, \|\cdot|)$ *— лево-полное равномерно выпуклое несимметричное пространство с аксиомой отделимости* T_2, $\{N_k\}$ *– вложенная последовательность непустых выпуклых ограниченных замкнутых множеств. Тогда пересечение* $N := \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} N_k$ *непусто.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *V. Donjuán V., Jonard-Pérez N.* Separation axioms and covering dimension of asymmetric normed spaces // Quaestiones Mathematicae. 2020. Vol. 43, № 4. P. 467–491.

[2] *Cobzas S.* Separation of convex sets and best approximation in spaces with asymmetric norm // Quaestiones Mathematicae. 2004. Vol. 279, № 3(11). P. 275–296.

[3] *Cobzas S.* Functional analysis in asymmetric normed spaces. Basel : Birkhäuser. 2013. 219 p.

УДК 501.1

Двоичные базисные сплайны[1]

С. А. Чумаченко (Саратов, Россия)
email@mail.ru

Рассматривается новый класс базисных сплайнов, которые получаются многократным интегрированием функции Уолша. Установлено, что система сжатия и сдвигов, порожденная двоичным базисным сплайном, является базисом в пространстве непрерывных функций. Доказано, что двоичный базисный сплайн удовлетворяет масштабирующему уравнению и построен кратномасштабный анализ общего вида, который не является ортогональным. Проведена оценка приближения для функций из пространства Соболева.

Ключевые слова: системы сжатия и сдвигов, кратномасштабный анализ, масштабирующее уравнение.

Благодарности: исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00037, https://rscf.ru/project/22-21-00037/.

Binary basic splines[1]

S. A. Chumachenko (Saratov, Russia)
chumachenkosergei@gmail.com

We are exploring a new class of basic splines, which are obtained by multiple integration of the Walsh function. We found that the scales and shifts system was generated by a binary basic spline is a basis in the space of continuous functions. It is proved that the binary basis spline satisfies the scaling equation, and a general multi-resolution analysis is constructed but is not orthogonal. The approximation is estimated for functions from the Sobolev space.

Keywords: scales and shifts, multi-resolution analysis, scaling equation.

Acknowledgements: this work was supported by the Russian Science Foundation № 22-21-00037, https://rscf.ru/project/22-21-00037/.

Введение

Пусть $If(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt$ $(x \in [0,1])$ – оператор интегрирования, $W_{2^n-1}(x) = \prod\limits_{k=0}^{n-1} r_k(x)$ – функции Уолша, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Определение 1. *Функцию*

$$\psi_{n,N}(x) = \begin{cases} Qn, NI^N W_{2^n-1}(x), & x \in [0,1], \\ 0, & x \notin [0,1]. \end{cases}$$

будем называть двоичным базисным сплайном n-й степени N-го порядка гладкости($N \leq n, N \in \mathbb{N}$), где $Q_{n,N}$ - нормирующий коэффициент *в* $C[0,1]$

Будем рассматривать систему сжатий и сдвигов $\varphi_n^{m,j}(x) = \varphi_n(2^m x - j)$

Теорема 1. *Система* $\varphi_n^{m,j}(x)$ *является базисом в пространстве* $C_0[0,1]$ *и справедливо неравенство*

$$|f(x) - S_{2^m+j}(x)| \le \omega_f(\frac{1}{2^{m+2}}) + \omega_f^2(\frac{1}{2^{m+2}}).$$

[1]

Теорема 2. *Справедливо равенство*

$$\psi_{n,n}\left(x\right) = \frac{1}{2^n}\psi_{n,n}\left(2x - 0\right) + \sum_{t=1}^{2^n-1} \frac{1}{2^{n-1}}\psi_{n,n}\left(2x - \frac{t}{2^n}\right) + \frac{1}{2^n}\psi_{n,n}\left(2x - 1\right).$$

Лемма 1. *Пусть* $F(x) = \psi\left(\frac{x}{2^n}\right)$. *Определим преобразование Фурье равенством*

$$\hat{f}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{-2\pi i\omega x} dx.$$

Тогда

$$\hat{F}\left(\omega\right) = \frac{Q_{n,n}}{2}\left(\frac{1}{\pi i\omega}\right)^{n+1} \prod_{k=1}^{n}\left(1 - e^{-2^k \pi i\omega}\right)$$

При $m \in \mathbb{Z}$ образуем подпространства $V_m = \overline{(2^{\frac{m}{2}} F(2^n x + k)_{k\in Z})}$

Определение 2. *Если выполнены условия (аксиомы)*
A1) $V_m \in V_{m+1}$,
A2) $\bigcup_{m\in Z} V_m = L_2(\mathbb{R})$,
A3) $\bigcap_{m\in Z} V_m = 0$,
то совокупность $(V_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ *называют обобщенным кратномасштабным анализом. Говорят также, что функция* φ *порождает обобщенный КМА.*

Теорема 3. *Совокупность* $(V_n)_{n\in Z}$ *образует обобщенный КМА.*

Замечание 1. Из леммы 1 видно, что КМА не является риссовским, так как не существует положительной константы, ограничивающей $\hat{F}$ снизу.

Определение 3. *Пусть* $f, g \in L_2(\mathbb{R})$. *Выражение*

$$[f,g](\omega) \overset{df}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(\omega+k)\overline{g(\omega+k)}$$

называют скобочным произведением.

Определение 4. *Пусть* $s > 0$. *Множество*

$$W_2^s(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}) : ||f||_{W_2^s(\mathbb{R})} = ||\left(1+|\cdot|\right)^s \hat{f}||_{L_2(\mathbb{R})} < +\infty \right\}$$

называют пространством Соболева.

Определение 5. *Пусть* $\varphi \in L_2(\mathbb{R}), \varphi_{m,k}(x) = 2^{\frac{m}{2}}\varphi(2^n x + k)$. *Оператор*

$$\beta_m : f \to \sum_{k\in Z} (f, \varphi_{n,k})\, \varphi_{n,k}$$

называют квазиинтерполяционным оператором.

Определение 6. *Оператор* β_m *доставляет аппроксимацию порядка* $t \in \mathbb{R}_+$, *если для всех* $f \in W_2^t(\mathbb{R})$ $||f - \beta_m f||_{L_2(\mathbb{R})} = O(2^{-mt})$.

Теорема 4. *Оператор* β_m, *построенный по функции* $\varphi(x) = C_n F(x)$, *где* $C_n = \dfrac{2^{\frac{n^2+n}{2}}}{Q(n,n)}$, *доставляет аппроксимацию порядка 1.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Чумаченко С. А.* Гладкие аппроксимации в C[0,1] // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 2020. Т. 20, вып. 3. С. 326–342 https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-326-342

[2] *Чумаченко С. А.* Двоичные базисные сплайны в кратномасштабном анализе // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 4. С. 458–471. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-4-458-471

УДК 517.51

Об одной задаче Хедберга для емкости кольцевой области относительно заданного компакта[1]

В. А. Шлык (Владивосток, Россия)
shlykva@yandex.ru

Пусть $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $1\leq q<\infty$, G — кольцевая область в евклидовом пространстве R^n, $n\geq 2$; E — компактное множество в R^n. В статье рассматривается решение задачи Хедберга о представлении q-емкости кольца G относительно E через p-модуль семейства поверхностей в $G\setminus E$, разделяющих граничные компоненты кольца G, когда $q=1$, $p=\infty$.

Ключевые слова: емкость конденсатора, модуль семейства поверхностей.

Благодарности: работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, соглашение № 075-02-2021-1395, и при поддержке Владивостокского филиала Российской таможенной академии.

On the problem of Hedberg for the ring domain capacity with respect to a given compact[1]

V. A. Shlyk (Vladivostok, Russia)
shlykva@yandex.ru

Let $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $1\leq q<\infty$, G be a ring domain in Euclidean space R^n, $n\geq 2$; E be the compact set in R^n. In the paper we consider the solution of the Hedberg problem of representating the q-capacity of the ring G with respect to E by the p-module of a family of surfaces in $G\setminus E$ separating the boundary components of the ring G when $q=1$, $p=\infty$.

Keywords: condenser capacity, modulus of surface family.

Acknowledgements: the research was funded by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, agreement No. 075-02-2021-1395, and by Vladivostok Branch of Russian Custom Academy.

Введение

Отметим, что решение сформулированной выше задачи Хедберга (см. [1], стр. 193) в случае $1<q<\infty$ было дано в [2] и использует существенно равномерную выпуклость пространств $L_p(G\setminus E)$, $L_q(G\setminus E)$.

Здесь для $n\geq 2$ обозначим через $\overline{R^n}=R^n\cup\{\infty\}$ одноточечную компактификацию пространства R^n. Все топологические рассмотрения проводятся в метрическом пространстве $(\overline{R^n},h)$, где h — хордальная метрика, порожденная стереографической проекцией (см. [3]). Через H^{n-1}

обозначим обычную $(n-1)$-мерную меру Хаусдорфа, и пусть m_n — мера Лебега в R^n. Под кольцом $G \subset R^n$ понимаем область, для которой $\overline{R^n} \setminus G$ состоит из двух непустых связных компонент F_0 и F_1, где $\infty \in F_0$.

Пусть E будет замкнутым множеством в $\overline{R^n}$. Будем говорить, что компакт $\sigma \subset G \setminus E$ разделяет F_0 и F_1 в $G \setminus E$, если существуют непересекающиеся открытые множества $A, B \subset \overline{R^n}$ такие, что $\overline{R^n} \setminus \sigma = A \cup B$ и $F_0 \subset A$, $F_1 \subset B$. Такой компакт σ будем называть поверхностью, разделяющей F_0 и F_1 в $G \setminus E$. Пусть $\Sigma = \Sigma(F_0, F_1, G \setminus E)$ обозначает семейство всех поверхностей, которые разделяют F_0 и F_1 в $G \setminus E$.

Для борелевской функции $\rho : G \setminus E \to [0, +\infty]$ положим $\|\rho\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{G \setminus E} \rho$ по m_n-мере.

Определим ∞-модуль семейства $\Sigma_1 \subset \Sigma$ как величину $M_\infty(\Sigma_1) = \inf \|\rho\|_\infty$, где инфимум берется по всем борелевским функциям $\rho : G \setminus E \to [0, +\infty]$ таким, что $\int\limits_\sigma \rho dH^{n-1} \geq 1$ для всех $\sigma \in \Sigma_1$. В случае $\Sigma_1 = \Sigma$ положим $M_\infty(\Sigma) = M_\infty(G \setminus E)$. Функции ρ в определении $M_\infty(\Sigma_1)$ будем называть допустимыми метриками для Σ_1. Емкость $C_1(G/E)$ определим так же, как и в [1].

Нетрудно заметить, что если одна из компонент связности множества E соединяет F_0 и F_1, то $\Sigma = \emptyset$. В этом случае положим по определению $M_\infty(G \setminus E) = 0$, $C_1(G/E) = \infty$, что влечет равенство $M_\infty(G \setminus E) = \frac{1}{C_1(G/E)}$. Ниже считаем, что ни одна из компонент связности множества E не соединяет F_0 и F_1.

Основные результаты

Теорема 1. *Пусть* $\Sigma_1 = \{\sigma \in \Sigma : H^{n-1}(\sigma) = \infty\}$. *Тогда* $M_\infty(\Sigma_1) = 0$.

Теорема 2. $C_1(G/E) < \infty$.

Теорема 3. *Если* $M_\infty(\Sigma) = \infty$, *то* $C_1(G/E) = 0$. *Справедливо обратное: если* $C_1(G/E) = 0$, *то* $M_\infty(\Sigma) = \infty$.

Теорема 4. *Если* $C_1(G/E) > 0$, *то* $\rho = \frac{1}{C_1(G/E)}$ *— допустимая метрика для* Σ.

Теорема 5. $C_1(G/E) = \frac{1}{M_\infty(G \setminus E)}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Hedberg L. I.* Removable singularities and condenser capacities // Arkiv. matem., 1974. Vol. 12, № 2. P. 181–201.

[2] *Шлык В. А.* Емкость конденсатора и модуль семейства разделяющих поверхностей // Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1990. Том. 185, С. 165–182.

[3] *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory. New York : Springer, 2009. 367 p.

УДК 517.52

Об упорядочивании и вариации функций на нульмерных компактных группах[1]

В. И. Щербаков, (гор. Жуковский Московской области, Россия)

kafmathan@mail.ru (для В.И.Щербакова)

Показано, что вариация функции (согласно её “классическому” определению) на нульмерной компактной абелевой группе зависит от отображения этой группы на отрезок $[0, 1]$, то есть от выбора базисных элементов. Существуют функции, которые являются функциями ограниченной вариации (и даже монотонными функциями) при одном выборе базисных элементов (и связанным с этими базисными элементами понятием упорядочивания) и не будут иметь ограниченной вариации относительно другого набора базисных элементов.

Ключевые слова: нульмерная компактная абелева группа, функции ограниченной вариации.

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-01-01404).

About ordering and variattion of the function on zero-dimensional compact groups[1]

V. I. Shcherbakov (Zhukovsky of Moscow district, Russia)

kafmathan@mail.ru (for V.I.Shcherbakov)

It is shown that the variation of a function (according to its “classical” definition) on a zero-dimensional compact Abelian group depends on the mapping of this group to the segment $[0, 1]$, that is, on the choice of basic elements. There are functions which are functions of the bounded variation (and even monotonic functions) for one choice of basic elements (and the ordering associated with this elements) and will not have bounded variation with respect to

to another set of basic elements.

Keywords: zero-demensional compact Abelian group; functions of bounded variation.

Acknowledgements: this work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 17-01-01404).

Пусть $p_0 = 1, \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность, состоящая из простых чисел; $m_n = \prod_{k=0}^{n} p_k \, (n = 0, 1, 2, \ldots)$ и G — нульмерная компактная абелева группа (группа Виленкина [1]) с операцией $\oplus$, обратной операцией $\ominus$, нулевым элементом 0_G, системой вложенных подгрупп

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_n \supset \ldots \text{ таких, что } \bigcap_{n=0}^{\infty} G_n = \{0_G\} \qquad (1)$$

и фактор-группа $G_{n-1} \setminus G_n$ имеет порядок $p_n \, (n = 1, 2, \ldots)$.

Заданные в (1) подгруппы G_n являются системой окрестностей нуля в группе G. Таким образом в G определенна топология, относительно которой вводятся понятия сходимости и непрерывности функции. Относительно этой топологии группа G является компактом.

В каждом из множеств $G_{n-1} \setminus G_n$ зафиксируем элемент $e_n \, (n = 1, 2, \ldots)$, который назовем базисным. Всякий элемент $x \in G$ единственным образом представим в виде

$$x = x_1 \cdot e_1 \oplus x_2 \cdot e_2 \oplus \ldots \oplus x_n \cdot e_n \oplus \ldots, \text{ где } x_k \text{ — целые с } 0 \leq x_k \leq p_k - 1. \quad (2)$$

Тогда элемент $x \in G$ отображается на отрезок $[0, 1]$

$$x \mapsto x_E = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{m_k} \text{ , где } x_k \text{ определены в (2) ,} \qquad (3)$$

а $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ранее заданная система базисных элементов. Умножение элемента g группы G на целое неотрицательное число n определяется следующим образом:

$$0 \cdot g = 0_G; \ 1 \cdot g = g \text{ и } n \cdot g = \underbrace{g \oplus g \oplus g \ldots \oplus g}_{n \text{ раз}}$$

Отображение группы G на отрезок $[0, 1]$, заданное по формуле (3), иногда называют *отображением Монна* [2] (см,. например, [3]), хотя отображения группы G на отрезок $[0, 1]$ были известны ещё и Н. Я. Виленкину [1].

Взаимнооднозначность при отображении (3) нарушается лишь в точках вида

$$r+ =< \frac{l}{m_n} >= x_1 \cdot e_1 \oplus \ldots \oplus x_{n-1} \cdot e_{n-1} \oplus x_n \cdot e_n \text{ и} \qquad (4)$$

$$r- =< \frac{l}{m_n} > - = x_1 \cdot e_1 \oplus \ldots \oplus x_{n-1} \cdot e_{n-1} \oplus (x_n - 1) \cdot e_n \oplus \ldots \oplus (p_{n+1} - 1) \cdot e_{n+1} \oplus$$
$$\oplus \ldots \oplus (p_{n+k} - 1) \cdot e_{n+k} \oplus \ldots, \qquad (5)$$

которые при отображении (3) переходят в одно и то же число $r = \frac{l}{m_n} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x_k}{m_k}$.

На группе G вводится понятие упорядочивания точек следующим образом: $x < y$, если $x_E < y_E$, где x_E и y_E образы точек $x \in G$ и, соответственно, $y \in G$ при заданного формулой (3) отображении Монна, а также $r- < r+$, где $r-$ определена формулой (5), а $r+$ — равенством (4).

Упорядочивание можно определить и эквивалентным образом:

$$x = x_1 \cdot e_1 \oplus \ldots \oplus x_n \cdot e_n \oplus \ldots < y = y_1 \cdot e_1 \oplus \ldots \oplus y_n \cdot e_n \oplus \ldots,$$

если $x_k < y_k$, где $k = \min\{n \in \mathbb{N} | x_n \neq y_n\}$.

Вариацию от функции (под функцией будем понимать отображение группы G во множество действительных чисел $\mathbb{R}$; могут рассматриваться также и монотонные функции) определяем "классическим" образом (см., например [4]): пусть

$$T = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n | 0_G = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 1_{GE}\} \qquad (6)$$

– некоторое разбиение группы G, где $1_{GE} = (p_1 - 1) \cdot e_1 \oplus (p_2 - 1) \cdot e_2 \oplus \ldots \oplus (p_n - 1) \cdot e_n \oplus \ldots$ — точка группы G, образом которой при отображении Монна (3) является единица (1_{GE}, вообще говоря, зависит от выбора базисных элементов $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$).

Тогда *вариация* от функции $f(t)$ на группе $G : V(G) = \sup\limits_T (\sum\limits_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|)$, где верхняя грань по всем разбиениям T (6) группы G. При этом если эта верхняя грань конечна, то функция $f(t)$ называется функцией *ограниченной вариации,* иначе — функцией *неограниченной вариации.*

Эта вариация зависит от базиса $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, что отмечал ещё Н. Я. Виленкин [1]. Более того, даже сам класс функций ограниченной вариации на группе G зависит от базисных элементов $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Справедлива следующая

Теорема. *Для всякого базиса* $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *найдётся функция ограниченной вариации (и даже монотонная) относительно этого базиса* $f(x)$, *и другие базисные элементы* $\tilde{E} = \{\tilde{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$, *относительно которых та же функция* $f(x)$ *уже не имеет ограниченной вариации на* G.

Для $\sup\limits_n p_n = \infty$ предыдущая теорема была анонсирована в [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Виленкин Н. Я.* Об одном классе полных ортонормальных систем // Изв. АН. СССР. сер. матем. 1947. Т. 11, № 4. С. 363–400.

[2] *Monna F.* Analysis Non-Archimedience. Berlin — Heildelberg — New-York — Springer — Veilag, 1970. 314 с.

[3] *Хренников А. Ю., Шелкович В. М.* Современный р-адический анализ и матаматическая физика: теория и приложения. М : Физматгиз, 2012. 452 с.

[4] *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М : Физматгиз, 1961. 936 с.

[5] *Щербаков В. И.* О вариации функции на нульмерной компактной абелевой группе // XXVII Международная конференция. Математика. Экономика. Образование, XI Международный симпозиум Ряды Фурье и их приложения. Ростов-на-Дону. 2021. С. 23–24.

Научное издание

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Материалы 21-й международной
Саратовской зимней школы

Выпуск 21

Ответсвенный за выпуск: *Ю. С. Крусс*
Оригинал-макет подготовили: *О. А. Королева, Ю. С. Крусс*

Подписано в печать 17.01.2022. Формат 60x84/16.
Усл. печ. л. 27,9 (30,0). Объем данных 1.91 Мб. Заказ У-1.

Управление по издательской деятельности Саратовского университета
410012, Саратов, Астраханская, 83
https://www.sgu.ru/research/nauchnye-izdaniya-sgu/prodolzhayushchiesya-izdaniya