О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ОЦЕНКИ РЕГРЕССИИ НА ОСНОВЕ ДИСКРЕТНЫХ СУММ ФУРЬЕ-ЯКОБИ

В. В. Новиков, Т. А. Бабаянц, А. А. Муллина

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Россия
E-mail: vvnovikov@yandex.ru, tereza051098@gmail.com, arina.mullina11@gmail.com

Рассматривается непараметрическая регрессия на основе дискретных сумм Фурье-Якоби. При наличии некоторых ограничений на показатели весовой функции получены условия состоятельности указанной регрессионной прцедуры, а также оценка скорости сходимости в терминах интегральной среднеквадратичной ошибки.

A RATE OF CONVERGENCE OF REGRESSION FUNCTION ESTIMATOR BASED ON THE FOURIER-JACOBI DISCRETE SUMS

V. V. Novikov, T. A. Babayants, A. A. Mullina

A class of nonparametric orthogonal series type estimators based on the Fourier-Jacobi discrete sums is considered. Under certain restrictions on the exponents of the weight function a sufficient condition for consistency and a rate of convergence are obtained.

Рассмотрим, непараметрическую регрессионную модель

$$Y_i = m(X_i) + \varepsilon_i, i = 1,\dots,n, \tag{1}$$

где $m(x)$ – неизвестная функция регрессии, подлежащая оцениванию на основе эмпирических данных $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^n$, а $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$ – случайные ошибки и пусть $\left\{\hat{P}_j^{(\alpha,\beta)}(x)\right\}_{j=0}^{\infty}$ – система многочленов Якоби, ортонормированных на отрезке $[-1,1]$ с весом $w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$, $-1 < x_{n,n} < \dots < x_{1,n} < 1$ – нули многочлена $\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, пронумерованные в порядке убывания, $q := \max\{\alpha;\beta\}$.

Пусть, далее, $\{l_{j,n}^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{j=1}^n$ – фундаментальные многочлены интерполяции Лагранжа степени $n-1$ с узлами $\{x_{j,n}\}_{j=1}^n$ и $\lambda_j^{(n)} = \int_{-1}^1 w(x) l_{j,n}^{(\alpha,\beta)}(x)dx$ – коэффициенты Кристоффеля. Будем считать, что величина X в (1) неслучайна, причем $X_i = x_{i,n}$, $i = 1,\dots,n$, и возьмем в качестве оценки $\hat{m}(x)$ функции регрессии $m(x)$ выражение

$$\hat{m}_N(x) = I_{n,N}^{(\alpha,\beta)}(Y, x) := \sum_{k=0}^{N} c_k^{(n)} \hat{P}_k^{(\alpha,\beta)}(x), \tag{2}$$

где $N = N(n) \le n$, а коэффициенты определяются формулой

$$c_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} Y_j \lambda_j^{(n)} \hat{P}_k^{(\alpha,\beta)}(x_{j,n}).$$

Выражения (2) называются дискретными суммами Фурье-Якоби. Соответствующие оценки относятся к оценкам ортогональных разложений, статистические свойства которых (для других ортогональных систем) изучались во многих работах (см., например, [1], [2] и содержащуюся там библиографию). Приводимое ниже утверждение дает оценку сверху величины интегральной среднеквадратичной ошибки (MISE)

$$E_N = \mathsf{E}\int_{-1}^{1}\left[m(x) - \hat{m}_N(x)\right]^2 w(x)dx.$$

Теорема 1. *Пусть для модели (1) выполнены условия:*

1) $\mathsf{E}\varepsilon_i = 0$, $\mathsf{E}(\varepsilon_i\varepsilon_j) = 0$, *при* $i \neq j$, $\mathsf{E}\varepsilon_i^2 < C_0$, $i = 1,...,n$, *где* C_0 *– некоторая постоянная;*

2) функция $m(x)$ *на отрезке* $[-1,1]$ *удовлетворяет условию Липшица порядка единица;*

3) $-1/2 < \alpha, \beta < 1/2$.

Тогда при $N < n-1$ *для величины MISE справедлива оценка*

$$E_N \le C_1 n^{-1} N^{2q+2} + C_2 n^{-2} \log^2 N,$$

где C_1 *и* C_1 *– постоянные, зависящие от* α, β.

Следующее утверждение устанавливает ограничение на порядок роста величин $N(n)$ по сравнению с числом наблюдений n, гарантирующее состоятельность оценки (2) на всем отрезке ортогональности.

Теорема 2. *Если для модели (1) выполнены условия теоремы 1 и последовательность* $\{N(n)\}$ *стремится к бесконечности при* $n \to \infty$ *так, что*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} N^{2q+2} = 0,$$

то

$$\hat{m}_N(x) \xrightarrow{p} m(x),\ x \in [-1,1].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хардле В.* Прикладная непараметрическая регрессия. М. : Мир, 1993. 349 с.

2. *Greblicki W., Pawlak M.* Nonparametric System Identification / Cambridge: Cambridge University Press, 2008.