ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ВОЛАТИЛЬНОСТИ ДОХОДНОСТИ ИНДЕКСА ММВБ С ПОМОЩЬЮ КОМБИНАЦИИ ARMA и GARCH МОДЕЛЕЙ

Ю. И. Кротова, А. Р. Файзлиев, А. Д. Луньков

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Россия
E-mail: julia.krotova.sgu@gmail.com, faizlievar1983@mail.ru, alunkov@yandex.ru

В работе рассматривается фондовый рынок, для которого решается проблема неопределённости путём прогнозирования и оценки волатильности индекса ММВБ за определённый период. Выдвигается гипотеза о том, что сочетание моделей ARMA и GARCH для прогнозирования волатильности доходности рассматриваемого индекса является наиболее оптимальным. В настоящем исследовании приведены статистические расчеты и проверка адекватности выдвигаемой гипотезы. Получены прогнозы волатильности доходности вне выборки на пять дней вперед. Целью работы является анализ применимости рассматриваемого модельного класса для моделирования и прогнозирования показателей.

FORECASTING THE MICEX INDEX RETURN VOLATITY USING A COMBINATION OF ARMA AND GARCH MODELS

Yu. I. Krotova, A. R. Fayzliev, A. D. Lunkov

The paper considers the stock market, for which the problem of uncertainty is being solved by forecasting and assessing the volatility of the MICEX index for a certain period. The hypothesis is put forward that the combination of the ARMA and GARCH models for predicting the volatility of the return of the indicator under consideration is the most optimal. This study presents statistical calculations and testing the adequacy of the hypothesis put forward. Out-of-sample yield volatility forecasts were obtained for five days ahead.

Волатильность является одним из важнейших показателей, описывающих изменчивость цены актива на финансовых рынках, который представляет большой интерес для инвесторов с точки зрения оценивания рисков инвестирования. В широком смысле под волатильностью понимают изменчивость, вариацию во времени величины финансового или экономического показателя. Мерой риска удобнее считать волатильность доходности, т. к. величина дохода зависит от размера или стоимости актива на начало и конец отчётного периода.

Рассмотрим данные индекса ММВБ в период с 1 сентября 2018 года до 24 сентября 2021 года, представленные на рис. 1. Данные взяты из открытого интернет источника [1].

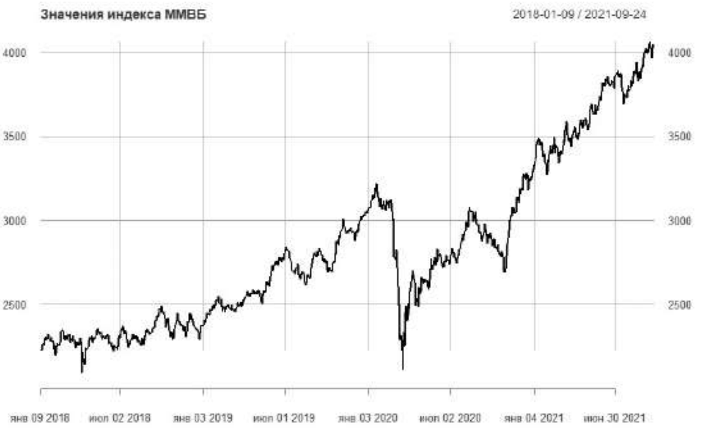


Рис. 1. Данные индекса ММВБ

Визуально временной ряд не является стационарным, по этой причине перейдем к ряду доходности индекса ММВБ. Логарифм изменения цены (непрерывно начисляемая доходность или геометрическая доходность) ценной бумаги определяется как натуральный логарифм его процентной доходности, а именно:

$$x_t = ln\,\frac{y_{t+1}}{y_t}.$$

После преобразования ряд примет вид, показанный на рис. 2. Значения доходности иллюстрируют приближение к виду процесса белого шума. На данном графике через некоторые промежутки времени наблюдаются всплески, они являются подтверждением кластеризации волатильности, характерной для финансовых показателей [2].

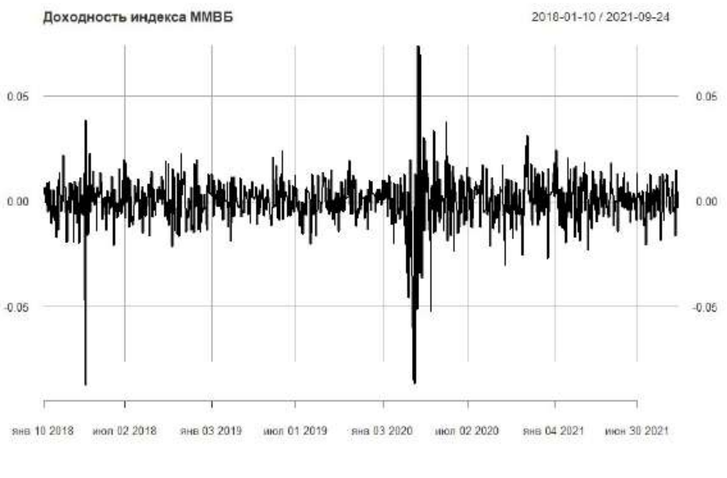


Рис. 2. Доходность индекса ММВБ

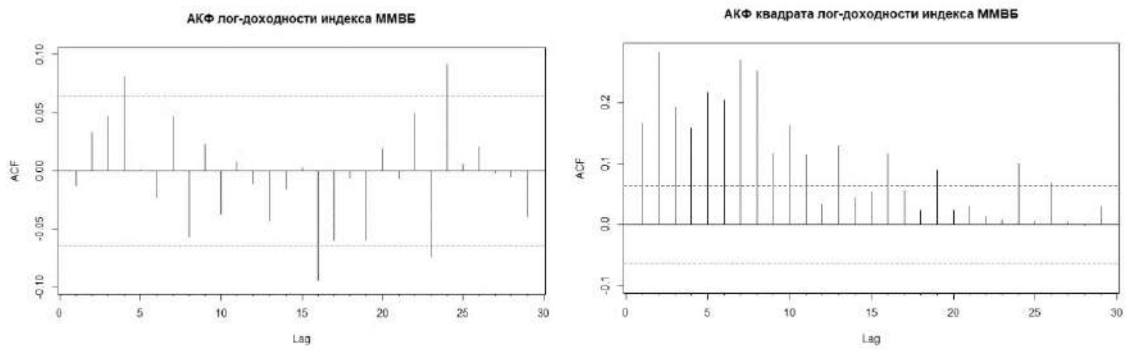
Рассчитаем волатильность - величину, равную стандартному отклонению доходности финансового инструмента за заданный промежуток времени. Существует несколько способов построения волатильности, рассмотрим простую волатильность (простое скользящее среднее, SMA). В данном методе волатильность принимается нормально распределённой случайной величиной с дисперсией, равной дисперсии доходности инструмента за рассматриваемый интервал времени [3]. Рассчитанная по исторической выборке SMA имеет вид:

$$\sigma_T = \sqrt{\sum_{t=1}^{T} \frac{\left(x_t - \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} x_i\right)^2}{T-1}}. \qquad (1)$$

Основной особенностью волатильности является ее не наблюдаемость. По своей сущности волатильность является случайной величиной, однако оценить ее стандартными статистическими способами не представляется возможным, так как известно только единственное значение доходности рассматриваемого инструмента за день.

На протяжении долгого времени наиболее популярными моделями волатильности являются модели семейства GARCH. Особенностью этого семейства моделей является то, что они рассматривают волатильность как ненаблюдаемую величину. Также GARCH модели способны моделировать некоторые важные эмпирические особенности волатильности, такие как кластеризация волатильности и длинная память.

Основная идея моделей авторегрессионной условной гетероскедастичности состоит в том, что хотя процесс $\{x_t\}$ не автокоррелирован, величины x_t и x_{t-1} не являются независимыми. На рис. 3а продемонстрирован график автокорреляционной функции логарифмических доходностей индекса ММВБ. Легко заметить, что ряд лог-доходностей не автокоррелирован, однако автокорреляция наблюдается в ряде квадратов лог-доходностей индекса на рис. 3б.



а) б)

Рис. 3. Графики АКФ лог-доходностей

Модели семейства GARCH занимают особое и значительное место среди эконометрических методик анализа и моделирования прогнозов из-за учета специфики финансовых временных рядов. Впервые модель GARCH была предложена Т. Боллерслевом [4]. Главной особенностью является то, что условная дисперсия процесса зависит как от квадратов предыдущих значений процесса, так и от предыдущих значений условной дисперсии. На практике самой распространённой стала модель GARCH(1,1), поскольку даже в такой простой форме модель позволяет улавливать периоды кластеризации волатильности, поскольку x_t^2 зависит как от x_{t-1}^2, так и от σ_{t-1}^2. В моделях ARCH для получения того же эффекта необходимо использовать модели более высокого порядка, следовательно, оценивать большее число параметров. Это ещё одно преимущество моделей GARCH, так как они допускают более экономичную параметризацию [5].

В рамках подхода, предложенного в данной статье, выдвигается гипотеза о том, что динамические ARMA-GARCH модели прогнозируют волатильность доходности фондового индекса наиболее точно. В общем случае имеется в виду, что доходности актива являются условно гауссовскими величинами и описываются моделью ARMA(m,n) со случайными ошибками в форме GARCH(u,v), то есть рассматривается сочетание GARCH с некоторой моделью, описывающей поведение условного или безусловного среднего наблюдаемого ряда.

По графику АКФ на рисунке 3а) можно также сделать предположение о порядке будущей ARMA модели. Значимыми являются лаги 4, 16, 23 и 24. Заметим, что для нашей модели достаточно процесса ARMA(k, 0), так как в ином случае компоненты скользящего среднего будут вносить свой вклад в условную дисперсию прогнозируемой величины. Выбор порядка модели будем осуществлять при помощи критерия Шварца, так как Шибата доказал, что для процессов ARMA(k,0) критерий Акаике переоценивает порядок модели [6]. В ходе исследования определена оптимальная модель ARMA(4,0).

Оценим адекватность наших предположений на данных ряда логарифмических доходностей фондового индекса ММВБ. Для реализации и тестирования динамических моделей ARMA-GARCH был выбран язык программирования R. В таблице 1 приводится оценка параметров моделей, а также набор статистических данных, которые позволяют оценить адекватность полученных моделей: BIC - значение критерия Шварца, Q - статистика Льюинга-Бокса для остатков модели, Q* - статистика Льюинга-Бокса для квадратов остатков модели. В скобках приведены p-значения соответствующих коэффициентов.

Адекватность моделей можно проверить, анализируя остатки и квадраты остатков на предмет автокорреляции. Стандартизированные остатки модели рассчитываются по следующей формуле: $\widetilde{e_t} = \frac{e_t}{\sigma_t}$. Эти величины должны быть белым шумом, следовательно, ряды $\{\widetilde{e_t}\}$ и $\{\widetilde{e_t}^2\}$ нужно проверить на наличие автокорреляции, к примеру с помощью теста Льюинга – Бокса [7]. По данным табл. 1 все модели являются адекватными.

Таблица 1

Значения коэффициентов

	GARCH(1,1) + ARMA(4,0)	GARCH(2,1) + ARMA(4,0)	GARCH(2,2) + ARMA(4,0)	GARCH(1,1)
μ	0.000612 (0.036497)	0.000594 (0.022891)	0.000599 (0.024458)	7.591e-04 (0.01072)
$ar1$	-0.007459 (0.823902)	-0.013795 (0.675862)	-0.016984 (0.591090)	-
$ar2$	-0.036293 (0.283561)	-0.034477 (0.239714)	-0.034788 (0.317149)	-
$ar3$	0.006461 (0.845212)	0.006381 (0.845759)	0.007219 (0.827579)	-
$ar4$	0.010456 (0.753054)	0.011652 (0.741189)	0.011072 (0.757366)	-
ω	0.000005 (0.000314)	0.000006 (0.000001)	0.000008 (0.000000)	4.380e-06 (0.00315)
α_1	0.091319 (0.000000)	0.036517 (0.156806)	0.037952 (0.104859)	9.767e-02 (1.76e-07)
α_2	-	0.085763 (0.004488)	0.131333 (0.000011)	-
β_1	0.862218 (0.000000)	0.822126 (0.000000)	0.355873 (0.006904)	8.672e-01 (< 2e-16)
β_2	-	-	0.399798 (0.001473)	-
Q(20)	11.027 (0.9455)	10.86 (0.9498)	11.481 (0.9328)	10.134 (0.9657)
Q*(20)	5.0662 (0.9997)	5.4225 (0.9995)	5.6865 (0.9993)	4.5875 (0.9999)
BIC	-6.4203	-6.4172	-6.4111	-6.376747
MAE	2.482852	2.655456	2.639553	2.587695
RMSE	4.226385	4.593152	4.573009	4.352457

В качестве оценки точности прогнозирования волатильности доходности были использованы два показателя: средняя абсолютная ошибка (MAE) и среднеквадратичная ошибка (RMSE) [8]. Наименьшими ошибками обладает модель GARCH(1,1) + ARMA(4,0). Заметим, что наименьшим критерием Шварца обладает модель GARCH(1,1), однако значение MAE и RMSE этой модели больше, чем смешанной модели, что означает, что наша гипотеза подтверждается.

На рис. 4 представлены графики рассчитанной по формуле (1) простой волатильности (красный цвет) и график волатильности, рассчитываемый моделью GARCH(1,1) + ARMA(4,0) (черный цвет). Визуально можно отметить, что построенная модель достаточно хорошо аппроксимирует реальные данные, что говорит о ее возможной применимости для прогнозирования волатильности.

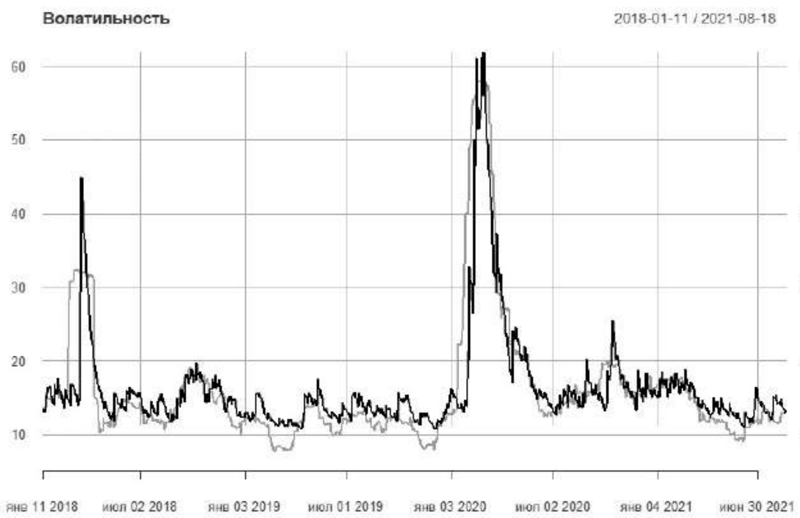


Рис. 4. Плато волатильности

В табл. 2 представлены прогнозные значения волатильности на 5 дней и рассчитанные по данным значения волатильности. В целом, можно говорить о достаточно неплохом качестве модели.

Таблица 2

Прогнозные значения

Дата прогноза	Прогноз волатильности	Рассчитанная волатильность
27.09.2021	14.00	13.86
28.09.2021	14.12	13.87
29.09.2021	14.23	14.20
30.09.2021	14.33	13.80
01.10.2021	14.42	13.75

Обобщая полученные результаты, можно сделать следующие выводы. Всем моделям удалось «поймать» ARCH-эффект, то есть автокорреляция квадратов в остатках моделей отсутствует. В результате моделирования показатели точности показали, что динамические модели ARMA-GARCH являются достаточно эффективными и подходящими моделями для изучения рядов доходности. На основе ошибок MAE и RMSE комбинация ARMA и GARCH дают более точный результат по сравнению с обычной GARCH моделью.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках выполнения государственного задания (проект № FSRR-2020-0006)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Индекс $IMOEX$. [Электронный ресурс]. URL: https://place.moex.com/useful/ index?list=strategii (дата обращения 24.09.2021).

2. *Mills T. C.* The Econometric Modelling of Financial Time Series / Cambridge University Press, 1993. p. 545.

3. *Бриллинджер Д.* Временные ряды. Обработка данных и теория / М. : ИНФРА-М,

2015. 420 с.
4. *Bollerslev T.* Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity // Journal of Econometrics. 1986. Vol. 31. P. 307-327.
5. *Nelson D. B.* Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach // Econometrica. 1991. Vol. 59. P. 347-370.
6. *Schibata R.* Selection of the Order on an Autoregressive Model by Akaike's Information Criterion // Biometrika. 1976. Vol. 63. P. 147-164.
7. *Ljung G. M. Box G. E. P.* On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models // Biometrika. 1978. Vol. 65. P. 297-303.
8. *Damodar N.* Gujarati. Basic Econometrics. // The McGraw-Hill Companies. 2004. P. 1002.