

СРАВНЕНИЕ ФРАКТАЛЬНОЙ И P -АДИЧЕСКОЙ МЕТОДИК ИССЛЕДОВАНИЯ ФИНАНСОВЫХ РЫНКОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛИ ARFIMA И P -АДИЧЕСКОЙ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ

С. А. Ахуньянова, Р. В. Гарафутдинов

Пермский государственный национальный исследовательский университет, Россия

E-mail: sofi_perm@mail.ru, rvgarafutdinov@gmail.com

В работе обосновано применение фрактального и p -адического подходов к исследованию финансовых рынков. Проведено исследование сравнительной эффективности соответствующих методик моделирования и прогнозирования рынков (на примере ARFIMA-модели и p -адической кусочно-линейной функции) на рядах цен закрытия и лог-доходностей акций десяти российских электроэнергетических компаний. Выявлено, что наилучшим методом исследования (в статистическом смысле и по исследуемым критериям) является фрактальный метод, а в плане прогнозирования оба метода являются достаточно точными. Обнаружено, что для стационарных процессов эффективна (по среднеквадратической ошибке) фрактальная методика исследования финансовых рынков, а для нестационарных – p -адическая.

COMPARISON OF FRACTAL AND P -ADIC FINANCIAL MARKET RESEARCH TECHNIQUES USING ARFIMA MODEL AND P -ADIC PIECEWISE LINEAR FUNCTION

S. A. Akhunyanova, R. V. Garafutdinov

The paper substantiates the application of fractal and p -adic approaches to the study of financial markets. The comparative efficiency of the corresponding methods of modeling and forecasting of market (on the example of ARFIMA-model and p -adic piecewise linear function) on the series of closing prices and shares log-incomes of ten Russian electric power companies has been studied. There is revealed that the best research method (in the statistical sense and according to the investigated criteria) is the fractal method, and in terms of forecasting, both methods are quite accurate. There is found that the fractal method of studying financial markets is efficient (by standard error) for stationary processes, but the p -adic method is efficient for non-stationary processes.

Введение. Исследование поведения финансовых рынков – это, как правило, анализ и моделирование финансовых временных рядов (цен, доходностей активов и т.п.). С конца XX века торги на финансовых рынках обрели электронную форму [1], а их результаты стали общедоступными, что и создало предпосылки к изучению их поведения у широкого круга исследователей. К изучению экономических систем, в т.ч. и к финансовым рынкам, начинают применяться неортодоксальные подходы: используются методы исследования, ранее не характерные для экономической науки. С 1990-х гг. возникает новое междисциплинарное направление – эконофизика, основу которого составляют приложения статистической физики к анализу финансовых временных рядов [2].

Среди прочих методов эконофизики можно выделить два: фрактальный и

p-адический анализ. Предпосылками их применения являются следующие особенности финансовых рядов: кластеризация волатильности, свойство лептокуртичности (наличие «тяжелых хвостов» и вытянутых пиков на графике плотности распределения), наличие «длинной памяти» (свойство процесса поддерживать тенденцию изменения в течение длительного периода времени), масштабная инвариантность [1]. Основателем подхода к анализу финансовых рынков на базе фрактальной теории стал американский математик Б. Мандельброт, предположивший, что динамика рынков подчиняется степенным законам. Существуют исследования, показавшие, что фрактальные показатели финансовых рядов могут служить мерой предсказуемости их поведения, а также исследования, согласно которым модификации эконометрических моделей, учитывающие свойства фрактальности, обладают лучшей прогностической способностью [3]. *P*-адический анализ для моделирования ценовых колебаний впервые применил В. М. Жарков, выдвинувший адельную теорию фондового рынка [4]. Дальнейшие исследования также показали его перспективность [1]. Оба подхода к изучению поведения финансовых рынков в настоящее время активно развиваются, в т.ч. учеными Пермского государственного национального исследовательского университета (ПГНИУ). В то же время, несмотря на существование в рамках обоих из них рабочих методик моделирования и прогнозирования финансовых рядов, до сих пор не было проведено сравнения их эффективности между собой. С точки зрения авторов настоящей статьи, такое сравнение могло бы вызвать интерес у широкого класса исследователей и послужить импульсом для модификации методик фрактального и *p*-адического анализа с целью их улучшения в статистическом смысле. Данная работа не носит характер полномасштабного исследования: можно сказать, что это первый взгляд на сравнение эффективности фрактального и *p*-адического подхода на текущем этапе их развития. Таким образом, целью исследования является сравнение эффективности двух методик моделирования и прогнозирования финансовых временных рядов: фрактальной (на примере ARFIMA-модели) и *p*-адической (на примере *p*-адической кусочно-линейной функции).

Фрактальный подход. Б. Мандельбротом разработана теория, описывающая поведение финансовых рынков с применением фрактальной геометрии, – «гипотеза фрактального рынка», согласно которой процесс ценообразования на рынках глобально детерминирован, прошлые цены влияют на будущие, а рынки обладают фрактальными свойствами, наличие которых объясняется присутствием на рынке инвесторов с различными инвестиционными горизонтами. Фрактальность финансовых рядов выражается в их свойстве «длинной памяти». Существуют модификации эконометрических моделей (такие как ARFIMA, FIGARCH), учитывающие эти свойства. Методика моделирования и прогнозирования с использованием модели ARFIMA приведена в работах [3; 5; 6]. Параметры p, q модели ARFIMA(p, d, q) позволяют моделировать эффекты короткой памяти, а параметр d , который может принимать нецелые значения, – длинной. Он же позволяет учитывать фрактальные свойства моделируемого процесса.

***P*-адический подход.** Впервые *p*-адический анализ в изучении финансо-

вых рынков применил В. М. Жарков, обнаруживший, что их поведение может быть адекватно описано аппаратом p -адической математики [4]. Так, в его работах представлены графики волн, характерные для рядов доходности на финансовых рынках, построенные с применением аппроксимации их паттернов p -адическим отображением [1]. В настоящее время разработка и развитие p -адического подхода к моделированию и прогнозированию рынков ведется на кафедре ИСММЭ ПГНИУ. В опубликованных авторами работах [7; 8] описывается формализация p -адического метода моделирования в виде p -адической кусочно-линейной функции, также предлагаются типы p -адических прогнозов. Подробное математическое описание p -адической модели представлено в работе [1].

Данные и методика исследования. Для целей исследования взято 10 рядов, состоящих из обучающей выборки (длина выборки равна 128, или 88,89% от общего объема наблюдений) и тестовой выборки (длина выборки равна 16, или 11,11% от общего объема наблюдений). Ряды представлены ценами закрытия акций российских электроэнергетических компаний. Данные загружены с сайта АО «Инвестиционный холдинг ФИНАМ» (<https://www.finam.ru/quotes/stocks/electro>). Отобраны только акции с привлекательным инвестиционным потенциалом. Установлен промежуток наблюдений для построения моделей с 09.01.2017 по 17.06.2019 с таймфреймом (интервал времени на графике торгового актива) длиной в неделю, а промежуток наблюдений для получения прогнозов – с 24.06.2019 по 07.10.2019 так же с таймфреймом длиной в неделю.

Цены закрытия на финансовых рынках представляют собой нестационарный процесс. Поэтому исходные ряды преобразованы к стационарному виду с помощью процедуры логарифмирования. На данных обучающей выборки для каждого ряда обучены ARFIMA-модели точным методом максимального правдоподобия, оценивающим порядки p и q , и p -адические модели методом наименьших квадратов, оценивающим показатель степени основания p -адического числа $\beta_i = (\beta_{1,i}; \beta_{2,i})^T$, $\beta_{1,i} \in [0, 2]$, $\beta_{2,i} \in [0, 2]$. По информационному критерию AIC отобраны наилучшие модели, которые проверены на адекватность (наличие гомоскедастичности, неавтокоррелированности и нормального распределения остатков). Затем с помощью моделей по каждому ряду получены прогнозы длиной 16 наблюдений с доверительными интервалами. Для оценки качества прогнозирования использован критерий MSE.

Результаты. Полученные результаты сведены в таблицу. Из нее видно, что на основании разложения общей суммы квадратов остатков ($TSS - ESS - RSS \rightarrow 0$) p -адические модели по сравнению с ARFIMA-моделями скорее нелинейные, чем линейные. Согласно информационному критерию AIC и среднеквадратической ошибке, лучшими для стационарных процессов в среднем оказались ARFIMA-модели. Согласно среднеквадратической ошибке, лучшими для нестационарных процессов в среднем оказались p -адические модели. Согласно выполнению условий Гаусса–Маркова, гомоскедастичными остатки были у всех построенных моделей, неавтокоррелированными остатки в подавляющем большинстве (90%) были у ARFIMA-модели, нормально распределенными ос-

татки с вероятностью 30% встречались у всех построенных моделей. Согласно среднеквадратической ошибке, лучшими для стационарных процессов в среднем оказались ARFIMA-прогнозы. Согласно среднеквадратической ошибке, лучшими для нестационарных процессов в среднем оказались p -адические прогнозы.

Результаты моделирования и прогнозирования котировок акций и их лог-доходностей

Усредненные результаты по всем 10 рядам	ARFIMA (p,d,q)	p -adic
TSS, общая сумма квадратов остатков	0,183059	0,183059
ESS, объясненная регрессией сумма квадратов остатков	0,014462	0,050884
RSS, необъясненная регрессией сумма квадратов остатков	0,168698	0,204816
Информационный критерий AIC	-483,978	-437,452
MSE модели для стационарного ВР (прологарифмированные цены закрытия акций)	0,001318	0,001600
MSE модели для нестационарного ВР (цены закрытия акций)	32,900363	3,044592
Критерий Голдфелда–Квандта (наличие гомоскедастичности)	100%	100%
Статистика Дарбина–Уотсона (отсутствие автокорреляции)	90%	50%
Тест Жарка–Бера (остатки нормально распределены)	30%	30%
MSE прогноза для стационарного ВР	0,001461	0,001678
MSE прогноза для нестационарного ВР	5,011501	2,006983

Выводы. Сравнивая ARFIMA-модели и p -адические модели и их прогнозы, можно прийти к следующему выводу. На выбранном промежутке и для выбранных данных наилучшим методом моделирования (в статистическом смысле и по исследуемым критериям) стал фрактальный метод, а в плане прогнозирования оба метода показали хороший результат. Это связано с тем, что, во-первых, ARFIMA-модели изучаются довольно давно, фрактальная методика по сравнению с p -адической разработана более детально. Во-вторых, p -адическая функция имеет нелинейный вид, что подтверждается условием линейности модели ($TSS - ESS - RSS \rightarrow 0$) и автокоррелированностью остатков моделей, обнаруженной в 50% случаях. Однако надо заметить, что исследование проведено на небольшом количестве случайных временных рядов. Таким образом, для стационарных процессов методика исследования с использованием ARFIMA-модели стала наиболее эффективной в статистическом смысле. С другой стороны, если изучаемый процесс характеризуется нестационарностью, то наиболее точным, согласно среднеквадратической ошибке, становится p -адический метод исследования, представленный на примере p -адической кусочно-линейной функции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Симонов П. М., Ахуньянова С. А. Сравнительный анализ методик AR-GARCH и p -адического прогнозирования волатильности финансового рынка // Вестник Пермского университета. Сер. «Экономика» = Perm University Herald. Economy. 2019. Т. 14. № 1. С. 69–92.
2. Мантенья Р. Н., Стенли Г. Ю. Введение в эконофизику: Корреляция и сложность в финансах. М. : ЛИБРОКОМ, 2014. 192 с.
3. Симонов П. М., Гарафутдинов Р. В. Моделирование и прогнозирование динамики

курсов финансовых инструментов с применением эконометрических моделей и фрактального анализа // Вестник Пермского университета. Сер. «Экономика» = Perm University Herald. Economy. 2019. Т. 14. № 2. С. 268–288.

4. *Жарков В. М.* Адельная теория фондового рынка // Вестник Пермского университета. Сер. : Информационные системы и технологии. 2003. Вып. 6. С. 75–81.

5. *Гарафутдинов Р. В.* Исследование влияния некоторых параметров модели ARFIMA на точность прогноза финансовых временных рядов // Прикладная эконометрика. 2021. Т. 62. С. 85-100.

6. *Гарафутдинов Р. В.* Применение моделей с длинной памятью для прогнозирования доходности при формировании инвестиционных портфелей // Прикладная математика и вопросы управления. 2021. № 2. С. 163–183.

7. *Симонов П. М., Филимонова С. А.* P -адическое моделирование динамики индекса РТС в зависимости от таймфреймов // Вестник Пермского университета. Сер. «Экономика» = Perm University Herald. Economy. 2016. № 4 (31). С. 74–85.

8. *Ахуньянова С. А., Симонов П. М.* P -адический метод прогнозирования динамики курса криптовалюты с использованием процедуры скользящего экзамена // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: сб. тр. XI Междунар. конф. «ПМТУКТ-2018». 2018. С. 50–55.