

# **СРАВНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ARFIMA И ARFIMA-GARCH ПРИ ФОРМИРОВАНИИ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПОРТФЕЛЕЙ АКЦИЙ НА БАЗЕ ПРОГНОЗНЫХ ДОХОДНОСТЕЙ**

**Р. В. Гарафутдинов**

*Пермский государственный национальный исследовательский университет, Россия*  
E-mail: rvgarafutdinov@gmail.com

В работе проверяется гипотеза о том, что формирование инвестиционных портфелей на базе прогнозных доходностей, полученных с применением фрактальных моделей с условной гетероскедастичностью (ARFIMA-GARCH), позволяет получать портфели с более высокой доходностью, чем портфели, полученные с помощью модели ARFIMA. Согласно результатам исследования, для отклонения выдвинутой гипотезы оснований нет.

## **COMPARISON OF ARFIMA AND ARFIMA-GARCH MODELS IN FORMATION INVESTMENT PORTFOLIOS OF SHARES BASED ON FORECAST RETURNS**

**R. V. Garafutdinov**

The paper tests the hypothesis that the formation of investment portfolios on the basis of forecast returns obtained using fractal models with conditional heteroscedasticity (ARFIMA-GARCH), allows you to get portfolios with higher returns than those obtained using the ARFIMA model. According to the results of the study, there are no grounds for rejecting the hypothesis.

Важнейшим способом получения дохода в условиях рыночной экономики является инвестирование, которое подразумевает отказ от текущего потребления с целью получения прибыли в будущем. На данный момент более актуально не просто получение дохода, а гарантированность его в условиях нестабильности наряду с хеджированием финансовых рисков. Важную роль приобретает разработка инновационных методов формирования портфелей, способных предоставить более точный прогноз финансового результата.

Сегодня наиболее широко применяемой остается теория оптимального инвестиционного портфеля Г. Марковица, основанная на максимизации доходности инвестиций при минимизации риска [1, 2]. Величина риска, как правило, выражается стандартным отклонением доходности. Решается задача оптимизации, и структура портфеля подбирается таким образом, чтобы обеспечить наилучшие значения его показателей, рассчитанных по историческим доходностям активов. Нами было выдвинуто предположение, что если экстраполировать ценовые ряды активов, входящих в портфель, и вычислять целевую функцию не по историческим доходностям, а по прогнозным, то полученные портфели должны обладать более привлекательными характеристиками (большей доходностью при меньшем риске), чем при применении классической модели средней дисперсии.

В работе [3] было проведено исследование, направленное на проверку

этого предположения. Для прогнозирования динамики доходности курсов акций была использована модель с длинной памятью ARFIMA, эффективность которой при решении задачи прогнозирования экономических временных рядов по сравнению с моделью с короткой памятью ARIMA подтверждена, например, в работах [4, 5]. Результаты исследования показали, что сформированный по такому прогнозному ряду портфель обладает лучшими параметрами в сравнении с портфелем, оптимизированным по историческим данным.

Известен факт, что волатильность доходности финансовых инструментов характеризуется эффектом кластеризации, то есть свойством, согласно которому большие изменения курсов с высокой вероятностью последуют за большими изменениями, а малые – за малыми. В условиях высокой волатильности на финансовых рынках для моделирования доходности часто применяется модель GARCH. В качестве уравнения условного математического ожидания GARCH-модели может выступать ARFIMA, что позволяет учитывать фрактальные свойства моделируемого процесса [4]. Нами была выдвинута гипотеза о том, что модель ARFIMA-GARCH позволяет получать лучшие характеристики портфеля, чем стандартная ARFIMA. Целью настоящего исследования является проверка этой гипотезы.

Опишем методику исследования и данные. Мы решили рассматривать динамику месячных цен активов (под месячной ценой будем понимать цену закрытия на первое число месяца) с января 2009 года по январь 2020 года. Для моделирования прогнозной доходности решено использовать именно месячные значения, так как для идентификации параметров моделей ARFIMA и GARCH требуется не менее нескольких десятков наблюдений. В качестве оптимизируемой характеристики портфеля примем его годовую доходность. Месячная доходность актива  $r_{m,t}^a$  вычисляется по формуле

$$r_{m,t}^a = \frac{P_{m,t}^a}{P_{m,t-1}^a} - 1,$$

где  $P_{m,t}^a$  – цена актива в месяце  $t$ . Чтобы перейти от месячной доходности к годовой, используется формула

$$r_{y,t}^a = \prod_{t=1}^{12} (1 + r_{m,t}^a) - 1.$$

В рамках данного исследования оптимизацию будем выполнять по критерию максимизации прогнозной годовой доходности. Прогнозная годовая доходность портфеля в 2019 г. рассчитывается как среднее взвешенное прогнозных годовых доходностей активов. Критерием сравнения полученных с помощью разных моделей портфелей примем фактическую годовую доходность портфеля в 2019 г.

Данными послужили ряды месячных доходностей акций 12 компаний из базы расчета индекса МосБиржи<sup>1</sup> по состоянию на 01.08.2020 г., имеющие предысторию не менее чем с начала 2009 г.

<sup>1</sup> <https://www.moex.com/ru/index/IMOEX/constituents>

В рамках эксперимента мы сравнивали 2 реализации моделей: ARFIMA-GARCH(1, 1) из пакета *rugarch* и ARFIMA из пакета *arfima* в среде разработки R. Все адекватные модели генерировали прогноз на 12 значений вперед, после чего оценивалась ошибка прогноза по метрике MAE:

$$MAE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |r_t - r_t^*|,$$

где  $T$  – количество прогнозных значений (в нашем случае 12),  $r_t$  – истинное (реализованное) значение доходности,  $r_t^*$  – значение доходности, предсказанное моделью. Из 12 активов было сформировано 66 различных портфелей, включающих по два актива. Реализованные годовые доходности портфелей были усреднены в рамках применения каждой из моделей.

Обратимся к результатам исследования. Доходность портфеля на основе ARFIMA составила  $0,025 \pm 0,041$ , доходность портфеля на основе ARFIMA-GARCH составила  $0,050 \pm 0,048$  (приведено усредненное значение с 99% доверительным интервалом для математического).

Как можно видеть, при максимизации доходности портфели GARCH показали в два раза более высокое значение доходности, чем у портфелей ARFIMA. При решении задачи максимизации доходности портфеля без дополнительных ограничений на характеристики портфеля алгоритм включает в состав портфеля один наиболее доходный актив, именно он обеспечивает максимальную доходность. При оптимизации портфеля по прогнозным данным, полученным с применением модели ARFIMA-GARCH, наиболее доходный актив в среднем был выявлен чаще, чем при использовании ARFIMA.

Таким образом, проведенный вычислительный эксперимент на реальных рыночных данных показал, что выдвинутая гипотеза не отвергается, модели ARFIMA-GARCH действительно позволяют улучшать доходность портфелей. Поэтому, по нашему мнению, данное направление в исследовании новых способов формирования инвестиционных портфелей является перспективным.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Markowitz H.* Portfolio Selection // *Journal of Finance.* 1952. № 7. P. 77–91.
2. *Aouni B., Doumpos M., Pérez-Gladish B., Steuer R.* On the increasing importance of multiple criteria decision aid methods for portfolio selection // *Journal of the Operational Research Society.* 2018. № 69. P. 1525–1542.
3. *Garafutdinov R., Gurova E.* The formation of investment portfolios based on forecasted income with the use of fractal models // *Mathematical Modeling.* 2019. № 3. P. 86–88.
4. *Симонов П. М., Гарафутдинов Р. В.* Моделирование и прогнозирование динамики курсов финансовых инструментов с применением эконометрических моделей и фрактального анализа // *Вестник Пермского университета. Сер. «Экономика» = Perm University Herald. Economy.* 2019. Т. 14. № 2. С. 268–288.
5. *Балагула Ю. М.* Прогнозирование суточных цен на ОПЭМ РФ с помощью модели ARFIMA // *Прикладная эконометрика.* 2020. Т. 57. С. 89–101.