# Задачи на оптимальный выбор (№ 17 ЕГЭ профильного уровня)

Седова В.В.[1], Лукьянова Т.Ю.[2]
*[1]vvsedova@mail.ru, [2]t-luk2008@yandex.ru*
*МОУ – Лицей №2, г. Саратов, Россия*

В данной статье рассматриваются задачи на оптимальный выбор – часть экономических задач, требующих составления целевой функции, описывающей некоторый процесс: функцию оплаты труда, выпуска продукции, распределения ресурсов и т.д. Чаще всего при решении таких задач требуется найти наибольшее или наименьшее значение составленной функции. Для этого можно использовать производную функции, а можно некоторые дополнительные знания:

вспомогательные неравенства (неравенство о средних, неравенство об обратных величинах и др.), известные точки минимума и максимума функции и т.д. Дается классификация задач.

Задачи на оптимальный выбор – часть экономических задач, требующих составления целевой функции, описывающий некоторый процесс – функцию оплаты труда, выпуска продукции, распределения ресурсов и т.д.

Чаще всего при решении таких задач требуется найти наибольшее или наименьшее значение составленной функции.

Для этого можно использовать производную функции, а можно некоторые дополнительные знания: вспомогательные неравенства (неравенство о средних, неравенство об обратных величинах и др.), известные точки минимума и максимума функции и т.д.

**Основные типы заданий в этом блоке**

1. Оптимизация работы на производстве с учётом цен на рынке товара и факторов производства;
2. Много заводское производство (включая разные заводы/отели/другие рабочие пространства);
3. Транспортные задачи.
4. Задачи на логистику.

## 1. Оптимизация работы на производстве с учётом цен на рынке товара и факторов производства

**Задача №1.** У фермера есть два поля, каждое площадью 10 га. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 500 ц/га, а на втором – 300 ц/га. Урожайность свёклы на втором поле составляет 300 ц/га, а на втором – 500 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 5000 р/ц, а свёклу – по цене 8000 р/ц. Какой наибольший доход может получить фермер?

**Решение. 1-й способ**

| **2 поле** | **Площадь** | **Урожайность** | **Выручка** |
|---|---|---|---|
| картофель | 10га | 300 ц/га | 10 · 300 · 5000 = 15000000 рублей |
| свёкла | 10 га | 500 ц/га | 10 · 500 · 8000 = 40 000 000 рублей |
| **1 поле** | **Площадь** | **Урожай** | **Выручка** |
| картофель | (10 - x) га | 500 ц/га | 500 · 5000 · (10 - x) = 25 000 000 – 2 500 000x рублей |
| свёкла | x га | 300 ц/га | 300 · 8000 · x = 2 400 000x рублей |
| **Всего** | | | 25 000 000 – 2 500 000x + 2 400 000 = 25 000 000 – 100 000x |

Выручка 25 000 000 – 100 000x будет наибольшей если x = 0. Следовательно, выручка с 1 поля равна 25 000 000 рублей.

Наибольший доход = 40 000 000 + 25 000 000 = 65 000 000 рублей

Ответ: 65 000 000 рублей.

**Решение. 2-й способ (с помощью логики и арифметических действий)**

Продавать свеклу более выгодно, поэтому второе поле, где ее урожайность выше, следует засадить только свеклой. Она принесет доход 10 га · 500 ц/га · 8 000 руб./ц = 40 млн руб.

На первом поле урожайность свеклы составляет 300/500 = 0,6 урожайности картофеля, а стоимость свеклы составляет 8 000/5 000 = 1,6 стоимости картофеля. Произведение этих показателей меньше 1, поэтому выращивать картофель выгоднее: потери от меньшей стоимости компенсируются более высокой урожайностью. Следовательно, все поле следует засеять картофелем, он принесет доход 10 га · 500 ц/га · 5 000 руб./ц = 25 млн. руб.

Тем самым, наибольший возможный доход фермера равен 65 млн. руб.

Ответ: 65 млн. рублей

**Задача №2.**

Фабрика, производящая пищевые полуфабрикаты, выпускает блинчики со следующими видами начинки: ягодная и творожная. В данной ниже таблице приведены себестоимость и отпускная цена, а также производственные возможности фабрики по каждому виду продукта при полной загрузке всех мощностей только данным видом продукта.

| Вид начинки | Себестоимость (за 1 тонну) | Отпускная цена (за 1 тонну) | Производственные возможности |
|---|---|---|---|
| ягоды | 70 тыс. руб. | 100 тыс. руб. | 90 (тонн в мес.) |
| творог | 100 тыс. руб. | 135 тыс. руб. | 75 (тонн в мес.) |

Для выполнения условий ассортиментности, которые предъявляются торговыми сетями, продукции каждого вида должно быть выпущено не менее 15 тонн. Предполагая, что вся продукция фабрики находит спрос (реализуется без остатка), найдите максимально возможную прибыль, которую может получить фабрика от производства блинчиков за 1 месяц.

**Решение. 1-й способ**

Пусть x – доля мощностей завода, занятых под производство блинчиков с ягодной начинкой, а y – доля мощностей, занятых под производство блинчиков с творожной начинкой. Тогда x + y = 1, при этом блинчиков с ягодной начинкой производится 90x тонн, а с творожной начинкой – 75y тонн.

Кроме того, из условия ассортиментности следует, что

$90x \geq 15$ откуда $x \geq \frac{1}{6}$, а $75y \geq 15$, откуда $y \geq \frac{1}{5}$.

Прибыль завода с одной тонны продукции с ягодной начинкой равна 100 − 70 = 30 тыс. руб., прибыль с одной тонны продукции с творожной начинкой равна 135 − 100 = 35 тыс. руб., общая прибыль с произведённой за месяц продукции равна $S(x,\ y) = 30 \cdot 90x + 35 \cdot 75y = 2700x + 2625y = 75 \cdot (36x + 35y)$.

Таким образом, нам необходимо найти наибольшее значение функции S (x, y) = 75 · (36x + 35y) при выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x \geq \dfrac{1}{6},\ y \geq \dfrac{1}{5}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x, \\ \dfrac{1}{6} \leq x \leq \dfrac{4}{5}. \end{cases}$$

Подставляя y = 1 − x в выражение 36x + 35y, получаем: 36x + 35(1 − x) = x + 35. Подставляя y = 1 − x в выражение 36x + 35y, получаем: 36x + 35(1 − x)

= x + 35. Наибольшее значение этого выражения при условии $\frac{1}{6} \le x \le \frac{4}{5}$ достигается при $x = \frac{4}{5}$, тогда $y = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$.

Поэтому максимально возможная прибыль завода за месяц равна:

$$75 \cdot \left(36 \cdot \frac{4}{5} + 35 \cdot \frac{1}{5}\right) = 75 \cdot \frac{179}{5} = 2685 \text{ тыс.руб.}$$

при этом фабрика производит 72 тонны блинчиков с ягодной начинкой и 15 тонн блинчиков с творожной начинкой.

**Решение. 2-й способ (с помощью логики и арифметических действий)**

Тонна блинчиков с творожной начинкой приносит 35 тыс. руб., а тонна блинчиков с ягодной — 30 тыс. руб. При этом 1 тонне блинчиков с творожной начинкой соответствует 1,2 тонны блинчиков с ягодной начинкой. Заметим, что 1 т · 35 тыс. руб. < 1,2 т · 30 тыс. руб. = 36 т · 1 тыс. руб., поэтому более выгодно производить блинчики с ягодной начинкой. Значит, блинчиков с творожной начинкой необходимо производить 15 тонн, а блинчиков с ягодной начинкой — 90 − 15 · 1,2 = 72 тонны, что даст прибыль 15 · 35 + 72 · 30 = 2685 тыс. руб.

**Задача №3.**

Строительство нового завода стоит 78 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны 0,5x2+2x+6 млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит px-(0,5x2+2x+6). Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более, чем за 3 года?

**Решение.**

За 3 года прибыль составит:

$3\cdot(px-(0{,}5x^2+2x+6))$.

Нужно найти наименьшее значение p, при котором выполнится неравенство:

$3\cdot(px-(0{,}5x^2+2x+6))\geq 78$

$px-(0{,}5x^2+2x+6)\geq 26$,

$px\geq 0{,}5x^2+2x+32$,

$p\geq 0{,}5x+2+32/x$.

Так как нужно найти наименьшее значение p, то нужно исследовать функцию 0,5x+2+32/x на минимум. Для этого найдем ее производную:

$(0{,}5x+2+32/x)'=0{,}5-32/x^2$,

$0{,}5-32x^2=0$,

$x^2=64$, $x=8$ и $x=-8$.

x = 8 - точка минимума, поэтому минимальное значение p равно:

$p=0{,}5\cdot 8+2+32/8=4+2+4=10$.

Искомое наименьшее значение p = 10.

**Ответ: 10**

**Задача №4.**

Производство x тыс. единиц продукции обходится в q = 0,5x2 + x + 7 млн рублей в год. При цене p тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн. рублей) составляет px – q. При каком наименьшем значении p через три года суммарная прибыль составит не менее 75 млн. рублей?

**Решение.**

Прибыль (в млн. рублях) выражается формулой

px - (0,5x2 +x+7)= -0,5 x2 +(p-1)x -7.

Это выражение является квадратным трехчленом и достигает своего наибольшего значения

$\frac{(p-1)^2}{2}$ -7 при x=p -1. Прибыль составит не менее 75 млн. рублей, если

$\frac{(p-1)^2}{2}$ -7≥ $\frac{75}{3}$,

(p-1)2 ≥64,

(p-9)(p+7)≥0,

То есть при p≥ 9, т.к. цена не может быть отрицательной. Таким образом, наименьшее значение p=9, искомая цена 9 тыс. рублей.

**Ответ: p=9**

## 2. Многозаводское производство (включая разные заводы/ отели/ другие рабочие пространства)

**Задача №5.**

В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 2 кг алюминия или 3кг никеля. Во второй шахте имеется 192 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 1,5кг алюминия или 0,5 кг никеля.

Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

**Решение.**

| | **Al** | | **Ni** | |
|---|---|---|---|---|
| | Кол-во часов | Кол-во мет в день, кг | Кол-во часов | Кол-во мет. в день, кг |
| 1 шахта | x | 2x | 500 - x | (500-x)·3 |
| 2 шахта | y | 1,5y | 960 - y | (960 –y)·0,5 |
| Всего | | 2x+1,5y | | (500-x)·3 + (960 –y)·0,5 |

По условию задачи для производства сплава масса алюминия должна относится к массе никеля, как 2 к 1. Поэтому 2x + 1,5y=2·(500-x)·3+(960-y)·0,5, 2x + 1,5y=3960-6x-y, 8x= 3960 -2,5y, x=495- $\frac{5}{16}$y

Выразим через y массу алюминия, поступившего на завод:

2x+1,5y=990-$\frac{5}{8}$y+$\frac{12}{8}$y =990-0,875y=f(y)

f(y)-линейная возрастающая функция, ее наибольшее значение получается при наибольшем значении y, равном 960.

f(960)= 990+ 0,875·960=990 +840=1830 кг. По условию масса никеля в 2 раза меньше и составляет 915 кг. Значит, масса сплава равна 1830+915=2745 кг.

**Ответ: 2745 кг**

**Задача №6.**

В двух областях работают по 160 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,3 кг никеля. Во второй области для добычи $x$ кг алюминия в день требуется $x^2$ человеко-часов труда, а для добычи $y$ кг никеля в день требуется $y^2$ человеко-часов труда.

Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причём 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов можно добыть в двух областях суммарно для нужд промышленности?

**Решение.**

1. Т.к. алюминий и никель взаимозаменяемы, а рабочие первой области одинаково эффективно добывают и алюминий, и никель, они могут добывать любой из металлов. За сутки ими будет добыто $160 \cdot 5 \cdot 0{,}3 = 240$ кг металла.

2. Пусть во второй области алюминий добывают t рабочих, а никель-(160-t) рабочих. За сутки они добудут $\sqrt{5t}$ кг алюминия и $\sqrt{5(160-t)}$ кг никеля. Всего за сутки добудут металла

$$\sqrt{5t} + \sqrt{5(160-t)} \text{ кг.}$$

Получили функцию $f(t)=\sqrt{5t} + \sqrt{5(160-t)}$ определенную для натуральных t, не больших 16

$$f'(t)=\frac{5}{2\sqrt{5t}} - \frac{5}{2\sqrt{800-5t}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\sqrt{800-5t} - \sqrt{5t}}{\sqrt{5t} \cdot \sqrt{800-5t}}.$$

Найдем нули производной: $\sqrt{800-5t} = \sqrt{5t}$, t=80.

При t меньших 80 производная положительна, а при t больших 80 производная отрицательна, поэтому в точке 80 функция достигает максимума $f_{max}=40$, равного наибольшему значению функции на заданном промежутке. Значит, 80 рабочих второй области следует направить на добычу алюминия и 80 – на добычу никеля. Они добудут 40 кг металла.

Совместно рабочие первой и второй области добудут 240+ 40=280 (кг) металла.

**Ответ: 280 кг**

**Задача №7.**

Предприниматель купил здание и собирается открыть в нем отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 21 квадратный метр и номера «люкс» площадью 49 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 1099 квадратных метров. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2000 рублей в сутки, а номер «люкс» 4500 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своем отеле предприниматель?

**Решение. 1-й способ (с помощью составления опорной линейной функции).**

Пусть x - количество стандартных номеров, а y - количество номеров «люкс». Они занимают площадь 21x+49y. Составим равенство: $y=\frac{-21x+1099}{49}$

Составим функцию заработанных денег:

S(x,y)= 200x+4500y.

Поставим в эту функцию выражение для y.

Получим S(x, y)= $71\frac{3}{7}$ x + 4500·$22\frac{3}{7}$ .

Это возрастающая линейная функция. Свое наибольшее значение она принимает при наибольшем значении x и наименьшем значении y. По условию x и y – натуральные числа. Значит y=1 это наименьшее натуральное число.

**Ответ: 104500 рублей**

**Решение. 2-й способ (с помощью логики и арифметических действий)**

Найдем стоимость 1 метра квадратного стандартного номера: 2000:21=$95\frac{2}{7}$рублей.

Найдем стоимость 1 метра квадратного номера «люкс»: 4500:49=$91\frac{41}{49}$ рублей.

Т.к. стоимость 1 метра квадратного стандартного номера дороже, то выгоднее разместить на этой площади больше номеров стандартных, и как можно меньше номеров «люкс». Начнем перебор количества номеров «люкс» с наименьшей цифры. Пусть номеров «люкс» будет 0. Тогда число 1099 не делится нацело на 21. Далее . Допустим, что номеров «люкс» будет 1, тогда 1099-49=1050(м2), 1050:21=50 (номеров стандартных). Значит на площади 1050(м2) можно разместить 50 стандартных номеров. Тогда в сутки отель сможет заработать: 50·2000+1·4500=104500(руб.)

**Ответ: 104500 рублей**

**3. Транспортные задачи**

**Задача №8.** Баржа грузоподъемностью 134 тонны перевозит контейнеры типов A и B. Количество загруженных на баржу контейнеров типа B не менее чем на 25% превосходит количество загруженных контейнеров типа A. Вес и стоимость одного контейнера типа A составляет 2 тонны и 5 млн. руб., контейнера типа B – 5 тонн и 7 млн. руб. соответственно. Определите наибольшую возможную суммарную стоимость (в млн. руб.) всех контейнеров, перевозимых баржей при данных условиях.

**Решение. 1-й способ**

Пусть $x$ — количество перевозимых контейнеров типа A, $y$ — количество контейнеров типа B, $x,\ y \in \mathbb{N}$.

Тогда вес контейнеров типа A составит 2x т, типа B - 5y т. Используя условие задачи, получим

2x+5y≤ 134 и еще должно выполняться

Пусть $S$ — суммарная стоимость всех контейнеров. Тогда $S = 5x + 7y$. Нам предстоит исследовать функцию $S(x, y)$ на наибольшее значение при заданных условиях.

Имеем:

$S=5x+7y \Leftrightarrow x=\dfrac{S-7y}{5}$, значит,

$$\begin{cases}\dfrac{2(S-7y)}{5}+5y\le 134,\\ y\ge\dfrac{5(S-7y)}{4\cdot 5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2S-14y+25y\le 670,\\ 4y\ge S-7y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}11y\le 670-2S,\\ 11y\ge S\end{cases}\Leftrightarrow \frac{S}{11}\le y\le\frac{670-2S}{11}.$$

Найдем, при каком значении $y$ выполняется равенство

$\dfrac{S}{11}=\dfrac{670-2S}{11}$. $3S=670 \Leftrightarrow S=223\dfrac{1}{3}$.

Поскольку $x$, $y$, а также стоимости контейнеров — числа натуральные, то $S\in\mathbb{N}$.

Значит, $S\le 223$. Если $S=223$, то $\dfrac{223}{11}\le y\le\dfrac{670-446}{11}\Leftrightarrow 20\dfrac{3}{11}\le y\le 20\dfrac{4}{11}$.
Натуральных решений нет.

Если $S=222$, $\dfrac{222}{11}\le y\le\dfrac{670-444}{11}\Leftrightarrow 20\dfrac{2}{11}\le y\le 20\dfrac{6}{11}$. Натуральных решений нет.

Если $S=221$, то $\dfrac{221}{11}\le y\le\dfrac{670-442}{11}\Leftrightarrow 20\dfrac{1}{11}\le y\le 20\dfrac{8}{11}$. Натуральных решений нет.

Если $S=220$, то $\dfrac{220}{11}\le y\le\dfrac{670-440}{11}\Leftrightarrow 20\le y\le 20\dfrac{10}{11}$.

Натуральное решение: $y=20$.

Вычислим значение $x$ при $y=20$. $x=\dfrac{220-140}{5}=16\in\mathbb{N}$.

**Ответ: 220 млн. рублей**

**Решение. 2-й способ (с помощью логики и арифметических действий).**

Контейнер типа *A* приносит 2,5 млн руб. за тонну, а контейнер типа *B* — 1,4 млн руб. за тонну, поэтому контейнеров типа *A* должно быть как можно больше, а контейнеров типа *B* как можно меньше. По условию, на каждые 4 контейнера типа *A* должно приходиться не менее 5 контейнеров типа *B*. Пусть контейнеров типа *A* будет $4x$, а контейнеров типа *B* — $5x$, их общий вес составит $8x + 25x = 33x$ тонн. Грузоподъёмность баржи 134 тонны, поэтому наибольшее возможное целое значение $x = 4$.

Если $x = 4$, то на баржу можно загрузить 16 контейнеров типа *A* и 20 контейнеров типа *B*, их стоимость составит 80 + 140 = 220 млн руб. При этом баржа будет недогружена на 2 тонны. Заменим два контейнера типа *A* одним контейнером типа *B*. Стоимость 14 контейнеров типа *A* и 21 контейнера типа *B* составляет 70 + 147 = 217 млн руб., при этом баржа недогружена на 1 тонну. Можно было бы загрузить баржу полностью, заменив ещё два контейнера типа *A* одним контейнером типа *B*, но при этом общая стоимость контейнеров снова бы снизилась на 3 млн руб. Из этого следует, что оптимально не загружать баржу полностью, а загрузить на неё 16 контейнеров типа *A* и 20 контейнеров типа *B* общей стоимостью 220 млн руб.

## 4. Задачи на логистику

**Задача №9.** Цена бриллианта, определенного качества массой m карат равна m(m+1) денежных единиц. Бриллиант этого качества массой 24 карата разбился на две части, после чего его стоимость уменьшилась.

а) На сколько процентов от первоначальной стоимости уменьшилась стоимость бриллианта, если он разбился на части 16 и 8 карат?

б) На какое максимальное число процентов от первоначальной стоимости может уменьшиться цена упомянутого бриллианта при разбиении на две части?

**Решение.**

а) Стоимость частей, на которые разбился бриллиант, равна $16{\cdot}17$ и $8{\cdot}9$ денежных единиц соответственно, а первоначальная стоимость бриллианта равна $24{\cdot}25$ денежных единиц. Составим пропорцию: $24{\cdot}25$-100%

$16{\cdot}17 + 8{\cdot}9$ –y%

Получим $y=\frac{(16\cdot17+8\cdot9)\cdot100}{24\cdot25}=\frac{16\cdot17+8\cdot9}{6}=\frac{272+72}{6}=\frac{344}{6}=57\frac{1}{3}$ (%).

Цена уменьшилась на $100-57\frac{1}{3}=42\frac{2}{3}$ (%).

б) Пусть x и (24-x)- массы частей, на которые разбился бриллиант. Их стоимость соответственно равна: x(x+1); (24-x) (25-x) денежных единиц.

Составим пропорцию: $24{\cdot}25$-100%,(x(x+1) + (24-x) (25-x)) -f(x)%.

Тогда $f(x)=\frac{(x(x+1)+(24-x)(25-x))\cdot100}{24\cdot25}=\frac{(x^2+x+600-49x+x^2)\cdot100}{24\cdot25}=\frac{2x^2-48x+600}{6}$ $=\frac{1}{3}x^2-8x+100.$

Максимальное уменьшение процентов будет при минимальном значении f(x). Минимальное значение f(x) как, квадратного трехчлена будет при $x=\frac{8}{\frac{2}{3}}=12$;

$f(12)=\frac{1}{3}\cdot12^2-8\cdot12+100=48-96+100=52.$

Значит, максимальное число процентов, на которое может уменьшиться цена бриллианта, будет 100-52=48(%)

**Ответ: а) $42\frac{2}{3}$; б) 48**

**Список литературы**


[1] Семенов А.В., .Ященко И.В., Высоцкий И.Р. и др. Как получить максимальный балл на ЕГЭ. Математика. Решение заданий повышенного и высокого уровня. М.: Интелкт-цент, 2019.

[2] Шихова Н.А. Задачи с экономическим содержанием. М.: Илекса, 2018.

[3] под ред. Лысенко Ф.Ф., Кулабухова С.Ю. ЕГЭ. Математика. Задачи с экономическим содержанием. -Изд. 4-е, перераб. и доп. – Ростов-на-Дону: Легион, 2018- 128 стр. (ЕГЭ)

[4] Прокофьев А.А., Корянов А.Г. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень. Социально-экономические задачи. Задание 17.-2-е изд., перераб. - Ростов-на-Дону: Легион, 2018-160 с. (ЕГЭ)