УДК 517.9

СВЯЗЬ МЕЖДУ ЛАПЛАСИАНАМИ ЛЕВИ И КАЛИБРОВОЧНЫМИ ПОЛЯМИ

Б. О. Волков (Москва, Россия)
borisvolkov1986@gmail.com

В докладе обсуждаются теоремы типа теоремы Аккарди–Джибилиско–Воловича. Эта теорема утверждает об эквивалентности уравнений Янга–Миллса для связности в векторном расслоении и уравнений Лапласа для лапласиана Леви. Вводится семейство модифицированных лапласианов Леви, параметризованных выбором кривой в группе вращений четырехмерного пространства. Показано, что уравнения анти-автодуальности Янга–Миллса эквивалентны системе из трех уравнений Лапласа для модифицированных лапласианов Леви из этого семейства.

Ключевые слова: лапласиан Леви, калибровочные поля, уравнения Янга–Миллса, инстантоны.

RELATIONSHIP BETWEEN LEVY LAPLACIANS AND GAUGE FIELDS

B. O. Volkov(Moscow, Russia)
borisvolkov1986@gmail.com

The report discusses theorems of the type of the Accardi–Gibilisco–Volovich theorem. This theorem states the equivalence of the Yang–Mills equations for a connection in a vector bundle and the Laplace equation for the Levy Laplacian. A family of modified Levy Laplacians, parametrized by the choice of a curve in the rotation group of four-dimensional space, is introduced. It is shown that the anti-self-duality Yang–Mills equations are equivalent to a system of three Laplace equations for modified Levy Laplacians from this family.

Keywords: Levy Laplacian, gauge fields, Yang–Mills equations, instantons.

Введение

Лапласианами Леви называют дифференциальные операторы, определенные по аналогии с оператором Лапласа для функций на $L_2([0,1],\mathbb{R})$, введенным П. Леви (см. [1]). Одна из основных причин интереса к таким дифференциальным операторам заключается в их связи с калибровочными полями. В работе [2] Аккарди, Джибилиско и Воловича доказана эквивалентность следующих утверждений: 1) связность в векторном расслоении над $\mathbb{R}^d$ является решением уравнений Янга–Миллса; 2) порожденный связностью параллельный перенос является решением уравнения Лапласа для лапласиана Леви. Для случая многообразия такая эквивалентность была доказана в [3]. В настоящей работе обсуждается связь лапласианов Леви и инстантонов (решений уравнений антиавтодуальности Янга–Миллса).

1. Калибровочные поля

Пусть E — векторное расслоение над четырехмерным C^∞-гладким римановым ориентируемым (не обязательно компактным) многообразием M. Уравнения Янга–Миллса на связность A имеют вид:

$$D^*F = 0,$$

где F — кривизна связности A, а D^* — оператор сопряженный к внешнему ковариантному дифференцированию. Уравнения антиавтодуальности (автодуальности) на связность A имеют вид:

$$F = - * F \, (F = *F)$$

где $*$ — оператор Ходжа. Инстантоны и антиинстантоны решения уравнений антиавтодуальности и автодуальности соответственно. Они являются точками локального экстремума функционала действия Янга–Миллса. Решения уравнения Янга–Миллса — это критические точки этого функционала. Параллельный перенос U, порожденный связностью A, можно рассматривать как сечение в векторном расслоении над гильбертовым многообразием H^1-кривых на M с фиксированным началом.

1. Лапласианы Леви и инстантоны

Пусть $\mathcal{E}$ — вещественное банахово пространство, а $\mathcal{E}^*$ — сопряженное к нему. Пусть S — линейный функционал на пространстве линейных непрерывных операторов из $\mathcal{E}$ в $\mathcal{E}^*$. Этот линейный функционал определяет дифференциальный оператор второго порядка $D^{2,S}$ на пространстве дважды дифференцируемых по Фреше функций на $\mathcal{E}$ по формуле: $D^{2,S}f(x) = Sf''(x)$. Лапласиан Леви, введенный в работе [2], можно задать как дифференциальный оператор, порожденный некоторым линейным функционалом tr_L^{AGV} — следом Леви (см. [4]). След Леви определяется как интегральный функционал, заданный специальным видом второй производной. Определение лапласиана Леви как дифференциального оператора, порожденного tr_L^{AGV}, переносится на случай многообразия (см. [5]).

Гладкая кривая $W \in C^1([0,1], SO(4))$ поточечным левым умножением задает ортогональный оператор в $L_2([0,1], \mathbb{R}^4)$. Модифицированный след Леви, порожденный кривой $W \in C^1([0,1], SO(4))$, действует на билинейную форму K по формуле:

$$tr_L^W K = tr_L^{AGV} W^* K W.$$

Модифицированный след Леви Δ_L^W — это дифференциальный оператор второго порядка, порожденный следом tr_L^W.

У группы четырехмерных вращений $SO(4)$ есть две нормальные подгруппы $S_L^3 \cong SU(2)$ и $S_R^3 \cong SU(2)$. Алгебра Ли $so(4)$ является прямой суммой $su(2) \otimes su(2)$. Это разложение соответствует разложению пространства 2-форм на прямую сумму пространства антиавтодуальных и автодуальных форм.

Теорема 1. *Пусть* $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ *— базис в алгебре Ли группы* S_L^3. *Пусть* $W_i(t) = e^{t\mathbf{e_i}}$ *для* $i \in \{1,2,3\}$. *Следующие условия равносильны: 1) связность A является инстантоном; 2) для параллельного переноса U выполняются равенства* $\Delta_L^{W_i} U = 0$ *для* $i \in \{1,2,3\}$.

Доказательство теоремы можно найти в [5].

При некоторых условиях уравнения антиавтодуальности Янга–Миллса эквивалентны только одному уравнению Лапласа для модифицированного лапласиана Леви.

Теорема 2. *Пусть* $W \in C^1([0,1], S_L^3)$, *причем*

$$dimspan\{\dot{W}(t)W^{-1}(t)\}_{t\in[0,1]} \geq 2.$$

Пусть существует точка $x \in M$, *в которой* $F(x) = - * F(x)$. *Следующие условия равносильны: 1) связность A является инстантоном; 2) параллельный перенос U является решением уравнения Лапласа для модифицированного лапласиана Леви* Δ_L^W:

$$\Delta_L^W U = 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Леви П.* Конкретные проблемы функционального анализа. М. : Наука, 1967. 512 с.

[2] *Accardi L., Gibilisco P., Volovich I. V.* Yang-Mills gauge fields as harmonic functions for the Lévy-Laplacian // Russ. J. Math. 1994. Vol. 2, № 2. P. 235–250.

[3] *Leandre R., Volovich I. V.* The Stochastic Lévy Laplacian and Yang-Mills equation on manifolds // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 2001. Vol. 2, № 1. P. 151–172.

[4] *Volkov B. O.* Levy Differential Operators and Gauge Invariant Equations for Dirac and Higgs Fields // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 2019. Vol. 22, № 2 Pap. 1950001 (20 pages).

[5] *Volkov B. O.* Levy Laplacians and instantons on manifolds. arXiv:1909.13312