УДК 517.518.224

КОЛМОГОРОВСКИЕ ПОПЕРЕЧНИКИ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ ВЕСОВЫХ КЛАССОВ СОБОЛЕВА НА ОБЛАСТИ[1]

А. А. Васильева (Москва, Российская Федерация)
vasilyeva_nastya@inbox.ru

Получены порядковые оценки колмогоровских поперечников пересечения весового класса Соболева и единичного шара весового пространства Лебега на области, удовлетворяющей условию Джона. Веса имеют вид степеней расстояния до подмножества границы области.

Ключевые слова: колмогоровские поперечники, пересечения функциональных классов, весовые классы Соболева.

KOLMOGOROV WIDTHS OF INTERSECTIONS OF WEIGHTED SOBOLEV CLASSES ON A DOMAIN[1]

A. A. Vasil'eva (Moscow, Russian Federation)
vasilyeva_nastya@inbox.ru

Order estimates for the Kolmogorov widths of the weighted Sobolev class with the unit ball of the Lebesgue space on a John domain are obtained. Weights are powers of distances from a subset of the boundary.

Keywords: Kolmogorov widths, intersections of function classes, weighted Sobolev classes.

Задачи о вложениях пересечений весовых классов Соболева (т. е. классов с различными ограничениями на несколько производных) и изучались многими авторами (см., например, [1–6]).

Задача о поперечниках пересечений весовых классов Соболева на многомерных областях с ограничениями на производные различных порядков изучалась Х. Трибелем [2], П. И. Лизоркиным и М. О. Отелбаевым [7], К. Мынбаевым и М. О. Отелбаевым [4], И. В. Бойковым [10], М. С. Айтеновой и Л. К. Кусаиновой [8, 9]. Отметим, что в этих работах либо условия были такими, что ограничения на младшие производные на порядки поперечников не влияли, либо в ряде случаев не удавалось найти совпадающие по порядку оценки сверху и снизу (например, для пересечений весовых классов $W^{k_i}_p$ в весовое пространство L_q при $1 < p < 2 < q < \infty$ различались оценки сверху и снизу для линейных поперечников).

В данной работе получены порядковые оценки колмогоровских поперечников весовых классов Соболева (с ограничениями на 0-ю и r-ю производные) на области, удовлетворяющей условию Джона. Веса являются функциями расстояния до h-множества (примерами таких множеств могут быть липшицевы поверхности и некоторые фракталы — например, кривая Коха, канторово множество). Введем необходимые определения.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00332).

[1]The article is done with the financial support of RFBR (project No. 19-01-00332).)

Определение. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область, $a > 0$. Скажем, что $\Omega \in \mathbf{FC}(a)$, если существует точка $x_* \in \Omega$ такая, что для любого $x \in \Omega$ существуют число $T(x) > 0$ и кривая $\gamma_x : [0,\, T(x)] \to \Omega$ со следующими свойствами:

1. γ_x имеет натуральную параметризацию относительно евклидовой нормы на $\mathbb{R}^d$,

2. $\gamma_x(0) = x$, $\gamma_x(T(x)) = x_*$,

3. $B_{at}(\gamma_x(t)) \subset \Omega$ для любого $t \in [0,\, T(x)]$.

Скажем, что область Ω удовлетворяет условию Джона, если $\Omega \in \mathbf{FC}(a)$ для некоторого $a > 0$.

Примерами областей, удовлетворяющих условию Джона, являются ограниченные области с липшицевой границей и снежинка Коха.

Обозначим через $\mathbb{H}$ совокупность всех неубывающих положительных функций на полуинтервале $(0,\, 1]$.

Определение (см. [11]). Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ — непустое компактное множество, $h \in \mathbb{H}$. Скажем, что Γ является h-множеством, если существуют константа $c_* \geq 1$ и конечная счетно-аддитивная мера μ на $\mathbb{R}^d$ такие, что $\operatorname{supp} \mu = \Gamma$ и

$$c_*^{-1} h(t) \leq \mu(B_t(x)) \leq c_* h(t)$$

для любых $x \in \Gamma$ и $t \in (0,\, 1]$.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — область с условием Джона, $\Gamma \subset \partial\Omega$ — h-множество, $h(t) = t^\theta$, $0 \leq \theta < d$, $r \in \mathbb{N}$, $1 < p_0,\, p_1 \leq \infty$, $1 < q < \infty$, $\beta,\, \sigma \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \operatorname{dist}^\beta(x,\, \Gamma), \quad w(x) = \operatorname{dist}^{-\sigma}(x,\, \Gamma),$$

$$M = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : \ \left\| \frac{\nabla^r f}{g} \right\|_{L_{p_1}(\Omega)} \leq 1, \quad \|wf\|_{L_{p_0}(\Omega)} \leq 1 \right\}.$$

Положим $\delta = r + \frac{d}{q} - \frac{d}{p_1}$,

$$\tilde{\theta} = \frac{r}{d} \cdot \frac{\sigma + \frac{d-\theta}{q} - \frac{d-\theta}{p_0}}{\beta + \sigma - \left(r + \frac{d}{p_0} - \frac{d}{p_1}\right)\left(1 - \frac{\theta}{d}\right)},$$

$$\hat{\theta} = \frac{\sigma\left(\frac{r}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p_1}\right) + \beta\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p_0}\right)}{\beta + \sigma - \left(r + \frac{d}{p_0} - \frac{d}{p_1}\right)\left(1 - \frac{\theta}{d}\right)}.$$

Определим числа $j_0 \in \mathbb{N}$ и $\theta_j \in \mathbb{R}$ $(1 \leq j \leq j_0)$ следующим образом.

1. При $p_0 \ge q$, $p_1 \ge q$: $j_0 = 2$, $\theta_1 = \frac{r}{d}$, $\theta_2 = \tilde{\theta}$.

2. При $p_0 > q$, $p_1 < q \le 2$: $j_0 = 3$, $\theta_1 = \frac{\delta}{d}$, $\theta_2 = \tilde{\theta}$, $\theta_3 = \hat{\theta}$.

3. При $p_0 > q$, $2 \le p_1 < q$: $j_0 = 4$, $\theta_1 = \frac{r}{d}$, $\theta_2 = \frac{q\delta}{2d}$, $\theta_3 = \tilde{\theta}$, $\theta_4 = \frac{q\hat{\theta}}{2}$.

4. При $p_0 > q$, $p_1 < 2 < q$: $j_0 = 5$, $\theta_1 = \frac{\delta}{d} + \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$, $\theta_2 = \frac{q\delta}{2d}$, $\theta_3 = \tilde{\theta}$, $\theta_4 = \hat{\theta} + \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$, $\theta_5 = \frac{q\hat{\theta}}{2}$.

5. При $p_0 \le q$, $p_1 \le q \le 2$: $j_0 = 2$, $\theta_1 = \frac{\delta}{d}$, $\theta_2 = \hat{\theta}$.

6. При $p_0 < q \le 2$, $p_1 > q$: $j_0 = 3$, $\theta_1 = \frac{r}{d}$, $\theta_2 = \tilde{\theta}$, $\theta_3 = \hat{\theta}$.

7. При $p_0 < q$, $q > 2$, $\max\{p_0,\, p_1\} \le 2$: $j_0 = 4$, $\theta_1 = \frac{\delta}{d} + \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$, $\theta_2 = \frac{q\delta}{2d}$, $\theta_3 = \hat{\theta} + \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$, $\theta_4 = \frac{q\hat{\theta}}{2}$.

8. При $p_0 < q$, $q > 2$, $\min\{p_0,\, p_1\} \ge 2$: $j_0 = 4$, $\theta_1 = \frac{r}{d}$, $\theta_2 = \frac{q\delta}{2d}$, $\theta_3 = \tilde{\theta}$, $\theta_4 = \frac{q\hat{\theta}}{2}$.

9. При $p_0 < q$, $q > 2$, $\min\{p_0,\, p_1\} < 2 < \max\{p_0,\, p_1\}$: $j_0 = 5$, $\theta_1 = \frac{\delta}{d} + \min\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{q},\, \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q}\right\}$, $\theta_2 = \frac{q\delta}{2d}$, $\theta_3 = \tilde{\theta}$, $\theta_4 = \hat{\theta} + \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$, $\theta_5 = \frac{q\theta}{2}$.

Теорема. Пусть $\delta > 0$, $\min\{\beta+\sigma-r-\frac{d-\theta}{p_0}+\frac{d-\theta}{p_1},\, \beta+\sigma-r-\frac{d}{p_0}+\frac{d}{p_1}\} > 0$; $\tilde{\theta} > 0$ при $p_0 \ge q$, $\hat{\theta} > 0$ при $p_0 < q$. Предположим, что существует $j_* \in \{1,\, \dots,\, j_0\}$ такое, что $\theta_{j_*} < \min_{j \ne j_*} \theta_j$. Тогда

$$d_n(M,\, L_q(\Omega)) \asymp n^{-\theta_{j_*}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Kufner A.* Weighted Sobolev spaces. Leipzig : Teubner, 1980. 115 p.

[2] *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М. : Мир, 1980. 664 с.

[3] *Бесов О. В.* Теорема вложения Соболева для области с нерегулярной границей // Матем. сб. 2001. Т. 192, № 3. С. 3–26.

[4] *Мынбаев К., Отелбаев М.* Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. М. : Наука, 1988. 282 с.

[5] *Oinarov R.* On weighted norm inequalities with three weights // J. London Math. Soc. (2). 1993. Vol. 48. P. 103–116.

[6] *Степанов В. Д., Ушакова Е. П.* Об интегральных операторах с переменными пределами интегрирования // Тр. МИАН. 2001. Т. 232. С. 298–317.

[7] *Лизоркин П. И., Отелбаев М. О.* Оценки аппроксимативных чисел оператора вложения для пространств соболевского типа с весами // Тр. МИАН. 1984. Т. 170. С. 213–232.

[8] *Айтенова М. С., Кусаинова Л. К.* Об асимптотике распределения аппроксимативных чисел вложений весовых классов Соболева. I // Матем. журн. Алматы. 2002. Т. 2, № 1. С. 3–9.

[9] *Айтенова М. С., Кусаинова Л. К.* Об асимптотике распределения аппроксимативных чисел вложений весовых классов Соболева. II // Матем. журн. Алматы. 2002. Т. 2, № 2. С. 7–14.

[10] *Бойков И. В.* Аппроксимация некоторых классов функций локальными сплайнами // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38, № 1. С. 25–33.

[11] *Bricchi M.* Existence and properties of h-sets // Georgian Mathematical Journal. 2002. Т. 9, № 1. С. 13–32.