УДК 517.984

РАВНОМЕРНАЯ ПОЛНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

С. А. Бутерин (Саратов, Россия)
buterinsa@info.sgu.ru

Рассматривается возмущение оператора Штурма – Лиувилля на конечном интервале с краевыми условиями Дирихле оператором свертки. Известна локальная устойчивость и глобальная однозначная разрешимость обратной задачи восстановления сверточного ядра по спектру в предположении, что потенциал задан. В работе получена равномерная полная устойчивость данной обратной задачи, включающая равномерную оценку отклонений сверточного ядра через отклонения спектра и потенциала в пределах шаров любых фиксированных радиусов.

Ключевые слова: интегро-дифференциальный оператор, нелокальный оператор, свертка, обратная спектральная задача, нелинейное интегральное уравнение, равномерная устойчивость, полная устойчивость.

UNIFORM FULL STABILITY OF THE INVERSE PROBLEM FOR INTEGRO-DIFFERENTIAL OPERATORS[1]

S. A. Buterin (Saratov, Russia)
buterinsa@info.sgu.ru

The perturbation of the Sturm–Liouville operator on a finite interval with Dirichlet boundary conditions by a convolution operator is considered. Local stability and global unique solvability of the inverse problem of recovering the convolution kernel from the spectrum, provided that the potential is given a priori, is known. In the present work, we establish uniform full stability of this inverse problem involving a uniform estimate of deviations of the convolution kernel via deviations of the spectrum and the potential within balls of any fixed radii.

Keywords: integro-differential operator, nonlocal operator, convolution, inverse spectral problem, nonlinear integral equation, uniform stability, full stability.

Введение

Наиболее полные результаты по обратным спектральным задачам известны для дифференциальных операторов (см., например, обзор в [1]). Для интегро-дифференциальных и других классов нелокальных операторов классические методы, которые позволяют получить глобальное решение обратной задачи, не работают. Одно из первых обстоятельных исследований обратной задачи для интегро-дифференциальных операторов было предпринято в [2], где изучалась краевая задача $\mathcal{L}(q, M)$ вида

$$-y''+q(x)y+\int_0^x M(x-t)y(t)\,dt = \lambda y, \quad 0<x<\pi, \quad y(0)=y(\pi)=0. \quad (1)$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-31-70005).
[1]The work was made under the financial support of RFBR (project No. 20-31-70005).

Пусть $q(x)$, $M(x)$ – комплекснозначные функции, причем $q(x) \in L_2(0,\pi)$, а $M(x) \in L_{2,\pi} := \{f(x) : (\pi - x)f(x) \in L_2(0,\pi)\}$. В [2] было установлено, что спектр $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ задачи (1) имеет вид

$$\lambda_n = n^2 + \omega + \varkappa_n, \quad \omega = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi q(x)\,dx, \quad \{\varkappa_n\} \in l_2, \quad n \geq 1, \tag{2}$$

но условие на $M(x)$ выглядело иначе, а именно, предполагалось, что

$$\left.\begin{array}{c} M_0(x) := (\pi - x)M(x),\ M_1(x) := \displaystyle\int_0^x M(t)\,dt \in L(0,\pi), \\ Q(x) := M_0(x) - M_1(x) \in L_2(0,\pi). \end{array}\right\} \tag{3}$$

Однако в силу теоремы Фубини $M_0(x) \in L(0,\pi)$ влечет $M_1(x) \in L(0,\pi)$. Кроме того, согласно лемме 2.4 в [3] условие (3) равносильно $M(x) \in L_{2,\pi}$, т.е. $M_0(x) \in L_2(0,\pi)$. В [2] исследовалась следующая обратная задача.

Задача 1. По заданному спектру $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ найти функцию $M(x)$ в предположении, что потенциал $q(x)$ известен априори.

При помощи аналога классического метода Борга (см., например, [1]), для этой обратной задачи была доказана теорема единственности и установлена ее *локальная* разрешимость и устойчивость. А именно, доказано, что для всякой задачи $\mathcal{L} := \mathcal{L}(q, M)$ со спектром $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ существует $\delta > 0$ (зависящее от $\mathcal{L}$), такое что для произвольной последовательности комплексных чисел $\{\tilde\lambda_n\}_{n\geq 1}$, удовлетворяющей условию $\|\{\hat\lambda_n\}\|_{l_2} \leq \delta$, существует (единственная) задача $\mathcal{L}(q, \tilde M)$, для которой последовательность $\{\tilde\lambda_n\}_{n\geq 1}$ является спектром. При этом имеют место оценки

$$\|\hat M_k\|_1 \leq C_{\mathcal{L}}\|\{\hat\lambda_n\}\|_{l_2}, \quad k = 0, 1, \quad \|\hat Q\|_2 \leq C_{\mathcal{L}}\|\{\hat\lambda_n\}\|_{l_2}, \tag{4}$$

где $C_{\mathcal{L}}$ зависит только от $\mathcal{L}$. Здесь $\|\cdot\|_k := \|\cdot\|_{L_k(0,\pi)}$ и $\hat\gamma := \gamma - \tilde\gamma$.

Отметим, что с помощью леммы 2.4 в [3] нетрудно показать, что совокупность оценок (4) равносильна оценке $\|\hat M\|_{2,\pi} := \|\hat M_0\|_2 \leq \tilde C_{\mathcal{L}}\|\{\hat\lambda_n\}\|_{l_2}$.

Позднее в [4] иным методом была получена *глобальная* разрешимость задачи 1. А именно, было доказано, что для *любой* последовательности комплексных чисел $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ вида (2) и комплекснозначной функции $q(x) \in L_2(0,\pi)$ существует (единственная) функция $M(x) \in L_{2,\pi}$, такая что $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ является спектром соответствующей краевой задачи $\mathcal{L}(q, M)$. Доказательство этого факта было основано на сведении обратной задачи к так называемому основному нелинейному интегральному уравнению (см. ниже уравнение (9)) и доказательству его глобальной разрешимости в $L_{2,\pi}$. Ранее в [3] данное утверждение было установлено для частного случая $q(x) \equiv const$. Отметим, что случай произвольной функции $q(x) \in L_2(0,\pi)$ существенно труднее. Впоследствии развитие подхода, предложенного в [3] и [4], позволило получить глобальное решение обратных задач и для других классов интегро-дифференциальных операторов (см. [5–16] и литературу там). Чтобы облегчить доказательство разрешимости основного уравнения обратной задачи в каждом новом случае, в [17] был разработан общий подход к решению нелинейных уравнений такого типа и доказательству их равномерной устойчивости.

В настоящей работе развитием метода, предложенного в [4], получено следующее усиление устойчивости задачи 1, установленной в работе [2].

Теорема 1. *Для любого фиксированного $r > 0$ имеет место оценка*

$$\|M - \tilde{M}\|_{2,\pi} \le C_r(\|\{\varkappa_n - \tilde{\varkappa}_n\}\|_{l_2} + \|q - \tilde{q}\|_2), \tag{5}$$

коль скоро $\|\{\varkappa_n\}\|_{l_2} \le r$, $\|q\|_2 \le r$ и $\|\{\tilde{\varkappa}_n\}\|_{l_2} \le r$, $\|\tilde{q}\|_2 \le r$. Здесь числа $\varkappa_n$ определены в (2), а числа $\tilde{\varkappa}_n$ определяются представлением

$$\tilde{\lambda}_n = n^2 + \tilde{\omega} + \tilde{\varkappa}_n, \quad \tilde{\omega} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \tilde{q}(x)\,dx, \quad n \ge 1,$$

где $\{\tilde{\lambda}_n\}_{n\ge1}$ – спектр краевой задачи $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(\tilde{q}, \tilde{M})$.

Здесь и далее одним и тем же символом C_r обозначаются *различные* положительные константы в оценках, зависящие только от r.

Нетрудно показать, что оценка (5) влечет, в частности, оценки (4). Однако, в отличие от (4), оценка (5) является равномерной по спектрам и потенциалам обеих задач $\mathcal{L}$ и $\tilde{\mathcal{L}}$. Кроме того, поскольку $q(x)$ и $\tilde{q}(x)$ могут различаться, теорема 1 дает равномерную *полную* устойчивость задачи 1, т.е. равномерную устойчивость относительно полного набора входных данных. Заметим также, что метрика, используемая в правой части (5), в отличие от соответствующей метрики в (4), допускает различные средние значения ω и $\tilde{\omega}$. Также преимуществом примененного здесь подхода является нечувствительность доказательства теоремы 1 к возможной кратности спектра, тогда как в [2] для простоты спектр предполагался некратным. При этом обобщение метода Борга на случай кратного спектра является далеко не тривиальной и технически сложной задачей (см [18]). Отметим, что равномерная устойчивость классической обратной задачи Штурма–Лиувилля в самосопряженном случае была получена в [19] при дополнительном естественном ограничении, не позволяющем соседним собственным значениям слишком сильно сближаться друг с другом. Для задачи 1 подобное ограничение не требуется.

Схема доказательства теоремы 1

Пусть $y = S(x,\lambda)$ является решением уравнения в (1) при начальных условиях $S(0,\lambda) = 0$, $S'(0,\lambda) = 1$. Собственные значения краевой задачи (1) совпадают с нулями целой функции $\Delta(\lambda) := S(\pi,\lambda)$ с учетом кратностей, которая называется *характеристической функцией* задачи (1).

Лемма 1. *Положим $\rho^2 = \lambda$. Имеет место представление*

$$S(x,\lambda) = \frac{\sin\rho x}{\rho} + \int_0^x P(x,t;q,M)\frac{\sin\rho(x-t)}{\rho}\,dt, \quad 0 \le x \le \pi, \tag{6}$$

где $P(x,t) := P(x,t;q,M)$ непрерывна в треугольнике $0 \le t \le x \le \pi$. Кроме того, $P(x,\,\cdot\,) \in W_2^1[0,x]$, $x \in (0,\pi]$, $P(\,\cdot\,,t) \in W_2^1[t,\pi]$, $t \in [0,\pi)$, и

$$P(x,0) = \frac{1}{2}\int_0^x q(t)\,dt, \quad P(x,x) = 0, \quad 0 \le x \le \pi. \tag{7}$$

Согласно лемме 1 характеристическая функция задачи (1) имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \frac{\sin\rho\pi}{\rho} - \omega\pi\frac{\cos\rho\pi}{2\rho^2} + \int_0^\pi v(x)\frac{\cos\rho x}{\rho^2}\,dx, \quad v(x) \in L_2(0,\pi). \tag{8}$$

При этом имеет место представление

$$-v(\pi - x) = R(\pi,x;q,M), \quad 0 < x < \pi, \tag{9}$$

где $R(x,t;q,M) = \frac{\partial}{\partial t}P(x,t;q,M)$. Кроме того, очевидно, что

$$\int_0^\pi v(x)\,dx = \frac{\omega\pi}{2} = \frac{1}{2}\int_0^\pi q(x)\,dx. \tag{10}$$

Известно, что всякая целая функция $\Delta(\lambda)$ вида (8) имеет бесконечное множество нулей вида (2) и определяется по ним однозначно по формуле

$$\Delta(\lambda) = \pi\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n - \lambda}{n^2}. \tag{11}$$

Обратно, для любой последовательности $\{\lambda_n\}_{n\ge1}$ вида (2) функция $\Delta(\lambda)$, построенная по формуле (11), имеет вид (8) с некоторой функцией $v(x)$, удовлетворяющей условию (10), (см., например, лемму 3.3 в [3]).

На соотношение (9) можно смотреть, как на нелинейное уравнение относительно функции $M(x)$, которое называется *основным уравнением* обратной задачи. В [4] установлено, что для любых комплекснозначных функций $q(x)$, $v(x) \in L_2(0,\pi)$, удовлетворяющих условию (10), нелинейное уравнение (9) имеет единственное решение $M(x) \in L_{2,\pi}$. Также можно показать, что $\|M\|_{2,\pi} \le C_r$ для любого $r > 0$, если $\|v\|_2, \|q\|_2 \le r$.

Итак, решение задачи 1 находится с помощью следующего алгоритма.

Алгоритм 1. *Пусть задан спектр* $\{\lambda_n\}_{n\ge1}$ *и потенциал* $q(x)$ *некоторой краевой задачи* $\mathcal{L}(q,M)$.

1) В соответствии с (8) вычисляем функцию $v(x)$ *по формуле*

$$v(x) = \omega + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(k^2\Delta(k^2) + (-1)^k\frac{\omega\pi}{2}\Big)\cos kx, \quad \omega = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} q(t)\,dt, \quad (12)$$

где функция $\Delta(\lambda)$ *строится по формуле (11);*

2) Находим функцию $M(x)$*, как решение основного уравнения (9).*

Таким образом, для доказательства теоремы 1 достаточно показать равномерную устойчивость обоих шагов алгоритма 1 в соответствующих метриках. При этом без ущерба для общности можно считать, что $\omega = 0$ и $\tilde{\omega} = 0$. Следующая теорема дает равномерную устойчивость шага 1).

Теорема 2. *Для всякого* $r > 0$ *имеет место оценка*

$$\|v - \tilde{v}\|_2 \le C_r \|\{\varkappa_n - \tilde{\varkappa}_n\}\|_{l_2},$$

коль скоро $\|\{\varkappa_n\}\|_{l_2} \le r$ *и* $\|\{\tilde{\varkappa}_n\}\|_{l_2} \le r$. *Здесь функция* $v(x)$ *определяется формулами (11) и (12) при* $\omega = 0$, *тогда как*

$$\tilde{v}(x) := \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} k^2\tilde{\Delta}(k^2)\cos kx, \;\; \tilde{\Delta}(\lambda) = \pi\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\tilde{\lambda}_n - \lambda}{n^2}, \;\; \tilde{\lambda}_n = n^2 + \tilde{\varkappa}_n, \; n \ge 1.$$

Наконец, развитие идей работы [4] приводит к следующей теореме, дающей равномерную полную устойчивость основного уравнения (9).

Теорема 3. *Пусть* $r > 0$ *и* $\|v(x)\|_2$, $\|\tilde{v}(x)\|_2$, $\|q(x)\|_2$, $\|\tilde{q}(x)\|_2 \le r$, *причем выполняется условие (10), а также соответствующее условие для функций* $\tilde{v}(x)$ *и* $\tilde{q}(x)$. *Тогда имеет место оценка*

$$\|M - \tilde{M}\|_{2,\pi} \le C_r(\|v - \tilde{v}\|_2 + \|q - \tilde{q}\|_2),$$

где $M(x)$ *— решение уравнения (9), а* $\tilde{M}(x)$ *— решением уравнения*

$$-\tilde{v}(\pi - x) = R(\pi, x; \tilde{q}, \tilde{M}), \quad 0 < x < \pi.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : Физматлит, 2007. 384 с.

[2] *Юрко В. А.* Обратная задача для интегро-дифференциальных операторов // Матем. заметки. 1991. Т. 50, № 5. С. 134–146.

[3] *Buterin S. A.* On an inverse spectral problem for a convolution integro-differential operator // Results Math. 2007. V. 50, № 3–4. P. 173–181.

[4] *Бутерин С. А.* О восстановлении сверточного возмущения оператора Штурма–Лиувилля по спектру // Дифф. уравнения 2010. Т. 46, № 1. С. 146–149.

[5] *Buterin S. A., Choque Rivero A. E.* On inverse problem for a convolution integro-differential operator with Robin boundary conditions // Appl. Math. Lett. 2015. Vol. 48. P. 150–155.

[6] *Buterin S. A., Sat M.* On the half inverse spectral problem for an integro-differential operator // Inverse Probl. Sci. Eng. 2017. Vol. 25, № 10. P. 1508–1518.

[7] *Bondarenko N., Buterin S.* On recovering the Dirac operator with an integral delay from the spectrum // Results Math. 2017. Vol. 71, № 3-4. P. 1521–1529.

[8] *Bondarenko N., Buterin S.* An inverse spectral problem for integro-differential Dirac operators with general convolution kernels // Appl. Anal. 2018. P. 1–17. https://doi.org/10.1080/00036811.2018.1508653

[9] *Buterin S. A.* On inverse spectral problems for first-order integro-differential operators with discontinuities // Appl. Math. Lett. 2018. Vol. 78. P. 65–71.

[10] *Бутерин С. А.* Обратная спектральная задача для интегро-дифференциальных операторов Штурма–Лиувилля с условиями разрыва // Современная математика. Фундаментальные направления 2018. Т. 64, № 3. С. 427–458.

[11] *Bondarenko N. P.* An inverse problem for an integro-differential operator on a star-shaped graph // Math. Meth. Appl. Sci. 2018. Vol. 41, № 4. P. 1697–1702.

[12] *Ignatyev M.* On an inverse spectral problem for the convolution integro-differential operator of fractional order // Results Math. 2018. Vol. 73, Art. № 34. P. 1–8.

[13] *Ignatiev M.* On an inverse spectral problem for one integro-differential operator of fractional order // J. Inverse and Ill-posed Probl. 2019. Vol. 27, № 1. P. 17–23.

[14] *Bondarenko N. P.* An inverse problem for the integro-differential Dirac system with partial information given on the convolution kernel // J. Inverse and Ill-posed Probl. 2019. Vol. 27, № 2. P. 151–157.

[15] *Bondarenko N. P.* An inverse problem for the second-order integro-differential pencil // Tamkang J. Math. 2019. Vol. 50, № 3. P. 223–231.

[16] *Buterin S. A.* An inverse spectral problem for Sturm–Liouville-type integro-differential operators with Robin boundary conditions // Tamkang J. Math. 2019. Vol. 50, № 3. P. 207–221.

[17] *Buterin S. A., Malyugina M. A.* On global solvability and uniform stability of one nonlinear integral equation // Results Math. 2018. Vol. 73, Art. № 117. P. 1–19.

[18] *Buterin S. A., Kuznetsova M. A.* On Borg's method for non-selfadjoint Sturm-Liouville operators // Anal. Math. Phys. 2019. Vol. 9. P. 2133–2150.

[19] *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Обратные задачи для оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. Равномерная устойчивость // Функц. анализ и его прил. 2010. Т. 44, № 4. С. 34–53.