УДК 517.9

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С СУММИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ НА ГРАФЕ ИЗ ДВУХ РЕБЕР С ЦИКЛОМ[1]

М. Ш. Бурлуцкая, Я. П. Коржова (Воронеж, Россия)
bmsh2001@mail.ru

Методом Фурье получено классическое решение смешанной задачи для волнового уравнения с суммируемым потенциалом на простейшем геометрическом графе, состоящем из двух ребер, одно из которых образует цикл. Используется подход, базирующийся на методе контурного интегрирования резольвенты оператора, который позволяет с помощью специального преобразования формального ряда получить классическое решение задачи, и при этом избежать трудоемкого исследования уточненных асимптотик собственных значений и собственных функций соответствующего оператора.

Ключевые слова: смешанная задача, волновое уравнение, геометрический граф, метод Фурье.

MIXED PROBLEM FOR A WAVE EQUATION WITH INTEGRABLE POTENTIAL ON A TWO-EDGE GRAPH CONTAINING A CYCLE[1]

M. Sh. Burlutskaya, Ya. P. Korzhova (Voronezh, Russia)
bmsh2001@mail.ru

A mixed problem for a wave equation with integrable potential on a two-edge graph containing a cycle is considered. The approach used is based on the contour integration of the operator's resolvent. With the help of a special transformation of a formal series, a classical solution of the problem by the Fourier method is obtained. This approach makes it possible to do without an expensive analysis of improved asymptotics for the eigenvalues and eigenfunctions of the operator.

Keywords: mixed problem, wave equation, geometric graph, Fourier method.

Рассматривается смешанная задача для волнового уравнения на простейшим геометрическом графе $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$, состоящем из двух ребер, одно из которых γ_1 образует цикл. При параметризации каждого ребра графа отрезком $[0, 1]$, задача будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - Q(x)u(x,t), \tag{1}$$

$$u_1(0,t) = u_1(1,t) = u_2(0,t), \quad u_2(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u'_{1x}(0,t) - u'_{1x}(1,t) + u'_{2x}(0,t) = 0, \tag{3}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0, \quad x \in [0,1]. \tag{4}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-11-00197, выполняемый в Воронежском госуниверситете)

[1]The article is done with the financial support of the Russian Science Foundation (project No. 19-11-00197 at Voronezh State University).

Здесь $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t))^T$ (T — знак транспонирования), $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))^T$, $Q(x) = \mathrm{diag}(q_1(x), q_2(x))$, $x \in [0,1]$, $t \in (-\infty, +\infty)$. Условия (2) обеспечивают непрерывность решения во внутреннем узле графа и неподвижное закрепление свободного конца на втором ребре. Условие (3) является частным случаем условий трансмиссии [1], нулевые значения для производных в (2) берутся для простоты.

Различные задачи для волнового уравнения на геометрических графах активно изучались: имеется достаточно много результатов в случае нулевого потенциала (см., например, [2–5]), исследовались задачи с привлечением теории обобщенных функций [6], а также с помощью описания дифференциального уравнения в терминах производных по мере [7], проводилось численное решение задач [8, 9].

Используя резольвентный подход (см., например, [10]), в [11] получено классическое решение смешанной задачи на графе из двух ребер-колец, касающихся в одной точке (узле графа), в случае непрерывных потенциалов. При этом метод Фурье применялся с использованием идей по ускорению сходимости рядов, идущих от А.Н. Крылова, и позволяющих получать классическое решение при минимальных требованиях на начальные функции. Здесь рассматривается простейший граф иной конфигурации. Такие простейшие графы являются базовыми: наличие всего лишь двух ребер у графа упрощает техническую часть исследования, но позволяет понять трудности, возникающие при исследовании подобных задач. Так, в [12], где впервые на графе Γ исследовалась смешанная задача для уравнения с инволюцией, показано, что простейшим может быть только рассматриваемый граф (на графе без цикла или с двумя циклами постановка задачи для уравнения первого порядка оказывается некорректной [12]).

Исследуем задачу (1)–(2) в предположении, что $q_j(x) \in L[0,1]$ и комплекснозначны. Здесь используется техника работ [13, 14].

Классическим решением будем называть вектор-функцию $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t))^T$, компоненты которой абсолютно непрерывны вместе с первой производной по x и t, удовлетворяют граничным и начальным условиям (2)–(2), и удовлетворяют дифференциальному уравнению (1) лишь почти всюду.

По методу Фурье, полагая в задаче (1)–(2) $u_1(x,t) = T(t)y_1(x)$, $u_2(x,t) = T(t)y_2(x)$, придем к спектральной задаче для оператора

$$(Ly)(x) = \Big(-y_1''(x) + q_1(x)y_1(x),\ -y_2''(x) + q_2(x)y_2(x)\Big)^T,\ y = (y_1, y_2)^T,$$

$$y_1(0) = y_1(1) = y_2(0), \quad y_2(1) = 0, y_1'(0) - y_1'(1) + y_2'(0) = 0.$$

Через L_0 обозначаем оператор, который есть оператор L при $q_j(x) \equiv 0$.

Собственные значения оператора L_0 есть $\lambda_n^{(0k)} = (\rho_n^{(0k)})^2$, где $\rho_n^{(01)} = \pi n$, $\rho_n^{(02)} = b_1 + 2\pi n$, $\rho_n^{(03)} = b_2 + 2\pi n$, $\quad b_{1,2} = -i \ln((2 \pm \sqrt{5}i)/3)$ (под $\ln z$ понимается главное значение $\mathrm{Ln} z$, при $\arg z \in (-\pi; \pi])$. Собственные значения оператора L образуют три серии: $\lambda_n^{(k)} = (\rho_n^{(k)})^2$ с асимптотикой $\rho_n^{(k)} = \rho_n^{(0k)} + \varepsilon_n^{(k)}$, $k = 1, 2, 3$, где $\varepsilon_n^{(k)} = o(1)$, $n \geqslant n_0$, n_0 — некоторое достаточно большое натуральное число.

Схема резольвентного подхода с использованием идей А.Н. Крылова по ускорению сходимости ряда предполагает преобразование формального ряда, и разбиение его на сумму двух рядов $u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t)$ (см., например, [10, теорема 2], [11, теорема 3]). Ряд $u_0(x,t)$ оказывается формальным рядом задачи, соответствующей задаче (1)–(2) с $q_j(x) = 0$ и $\widetilde{\varphi}(x) = R^0_{\mu_0} g$ вместо $\varphi(x)$, и называемой эталонной (здесь μ_0 не является собственным значением операторов L и L_0, $g = (L - \mu_0 E)\varphi)$. Возможность дифференцирования ряда $u_1(x,t)$ устанавливается за счет имеющихся оценок резольвент операторов L и L_0. При этом на $\varphi(x)$ накладываются следующие требования:

$$\begin{gathered} \varphi_j(x), \varphi_j'(x) \in AC[0,1], L\varphi \in L_2^2[0,1], \\ \varphi_1(0) = \varphi_1(1) = \varphi_2(0), \quad \varphi_2(1) = 0, \quad \varphi_1'(0) - \varphi_1'(1) + \varphi_2'(0) = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Теорема 1. *При $q_j(x) = 0$ и $\widetilde{\varphi}(x) = R^0_{\mu_0} g$ вместо $\varphi(x)$ классическое решение задачи (1)–(2) существует и дается формулой*

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2}(F(x+t) + F(x-t)),$$

где вектор-функция $F(x)$ обладает следующими свойствами: $F(x)$ и $F'(x)$ абсолютно непрерывны при $x \in (-\infty, +\infty)$, $F''(x) \in L_2^2[-A, A]$, для любого $A > 0$, $F(x) = \tilde{\varphi}(x) = R^0_{\mu_0} g$ при $x \in [0,1]$, и $F(x)$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{gathered} F_1(-x) = \frac{1}{3}[2F_1(1-x) + 2F_2(x) - F_1(x)], \\ F_2(-x) = \frac{1}{3}[2F_1(x) + 2F_1(1-x) - F_2(x)], \\ F_1(1+x) = \frac{1}{3}[2F_1(x) + 2F_2(x) - F_1(1-x)], \\ F_2(1+x) = -F_2(1-x). \end{gathered}$$

Теорема 2. *Если $q_j(x) \in L[0,1]$, вектор-функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям (5), то сумма $u(x,t)$ формального решения является классическим решением задачи (1)–(2), когда уравнение (1) удовлетворяется почти всюду.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Покорный Ю. В. и др.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах М. : Физматлит, 2004. 272 с.

[2] *Провоторов В .В.* Собственные функции задачи Штурма-Лиувилля на графе-звезде // Матем. сб. 2008. Т. 199, № 10. С. 105–126.

[3] *Прядиев В. Л.* Один подход к описанию конечной формы решения волнового уравнения на пространственной сети // Spectral and Evolution Problems: Proc. of the 15-th Crim. Autumn Math. School-Symposium. Sept. 17–29, 2004, Sevastopol, Laspi. Simferopol, 2005. Vol. 15. P. 132–139.

[4] *Коровина О. В., Прядиев В. Л.* Структура решения смешанной задачи для волнового уравнения на компактном геометрическом графе в случае ненулевой начальной скорости // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 3. С. 37–46.

[5] *Zvereva M.* A String Oscillations Simulation with Nonlinear Conditions // Mem. Differential Equations Math. Phys. 2017. № 72. P. 141–150.

[6] *Провоторов В. В., Волкова А. С.* Начально-краевые задачи с распределенными параметрами на графе. Воронеж : Научная книга, 2014. 188 с.

[7] *Головко Н. И., Голованева Ф. В., Зверева М. Б., Шабров С. А.* О возможности применения метода Фурье к разнопорядковой математической модели // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. 2017. № 1. С. 91–98.

[8] *Прядиев В. Л.* Численная схема решения начально-краевой задачи для волнового уравнения на одномерной пространственной сети при обобщённо-гладких условиях трансмиссии // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонауч. сер. 2008. Т. 67, № 8/2. С. 195–202.

[9] *Найдюк Ф. О., Десятирикова Е. Н., Проскурина Д. К.* Численное решение задач о колебаниях // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. 2013. № 1. С. 55–60.

[10] *Бурлуцкая М. Ш. Хромов А. П.* Резольвентный подход для волнового уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 2. С. 51–63.

[11] *Бурлуцкая М. Ш.* Метод Фурье в смешанной задаче для волнового уравнения на графе // Докл. АН. 2015. Т. 465, № 5. С. 519–522.

[12] *Бурлуцкая М. Ш.* Смешанная задача с инволюцией на графе из двух ребер с циклом // Докл. АН. 2012. Т. 447, № 5. С. 479–482.

[13] *Хромов А. П.* О сходимости формального решения по методу Фурье волнового уравнения с суммируемым потенциалом // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56, № 10. С. 1795–1809.

[14] *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Смешанная задача для волнового уравнения с суммируемым потенциалом в случае двухточечных граничных условий разных порядков // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53, № 4. С. 505–515.