УДК 517.547.22

ОБ ИНДИКАТОРАХ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ С КОРНЯМИ НУЛЕВОЙ НИЖНЕЙ ПЛОТНОСТИ, ЛЕЖАЩИМИ НА ЛУЧЕ[1]

Г. Г. Брайчев (Москва, Россия)

braichev@mail.ru

Для целой функции нецелого порядка с отрицательными корнями, имеющими нулевую нижнюю плотность, приводятся точные оценки индикаторов роста. В некоторых случаях даются точные формулы для вычисления индикаторов.

Ключевые слова: целая функция, индикатор и нижний индикатор роста, верхняя и нижняя плотности корней.

ON INDICATORS OF AN ENTIRE FUNCTION WITH ROOTS ZERO LOWER DENSITY, LYING ON A RAY[1]

G. G. Braichev (Moscow, Russia)

braichev@mail.ru

For an entire function of non-integer order with negative roots having zero lower density, accurate estimates of the growth indicators are given. Some subclasses provide exact formulas for indicators.

Keywords: entire function, indicator and lower growth indicator, upper and lower density of roots.

Введение

Стандартными характеристиками роста целой функции $f(z)$, описывающими ее поведение на лучах $\arg z = \theta$ комплексной плоскости, являются ее индикатор и нижний индикатор при порядке $\rho > 0$:

$$h_\rho(f,\theta) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\left|f(re^{i\theta})\right|}{r^\rho},$$

$$\underline{h}_\rho(f,\theta) = \sup_{E_0} \varliminf_{r\to+\infty,\, r\notin E_0} \frac{\ln\left|f(re^{i\theta})\right|}{r^\rho}, \qquad \theta\in[-\pi,\pi].$$

Супремум во второй формуле берется по всем множествам нулевой относительной меры (см. [1]).

Мы устанавливаем связь этих характеристик целой функции с ростом ее корней. Считаем, что все корни расположены на одном (отрицательном) луче, т. е. $\Lambda = \Lambda_f = (\lambda_n)_{n=1}^\infty$, где

$$0 > \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \geqslant \ldots, \qquad \lim_{n\to\infty}\lambda_n = -\infty.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00236).

[1]The article is done with the financial support of RFBR (project No. 18-01-00236).)

Скорость стремления корней к бесконечности характеризуется верхней и нижней ρ-плотностями

$$\overline{\Delta}_{\rho}(\Lambda)=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{n}{|\lambda_n|^{\rho}}\,,\qquad \underline{\Delta}_{\,\rho}(\Lambda)=\varliminf_{n\to\infty}\frac{n}{|\lambda_n|^{\rho}}\,. \tag{1}$$

В случае, когда последовательность (отрицательных) корней $\Lambda=\Lambda_f$ целой функции $f(z)$ нецелого положительного порядка ρ является измеримой, т. е. когда $\overline{\Delta}_{\rho}(\Lambda)=\underline{\Delta}_{\,\rho}(\Lambda)=\beta$, известна следующая точная формула для вычисления индикаторов (см. [1], [2]) :

$$h_{\rho}\,(f,\theta)=\underline{h}_{\,\rho}\,(f,\theta)=\frac{\pi\beta}{\sin\pi\rho}\cos\rho\theta\,,\qquad \theta\in(-\pi,\,\pi).$$

Если же корни целой функции неизмеримы, т. е. $\underline{\Delta}_{\,\rho}(\Lambda)<\overline{\Delta}_{\rho}(\Lambda)$, то подобные формулы для индикаторов неизвестны. Мы восполняем этот пробел, приводя формулы и точные оценки индикаторов.

Основные результаты

Для формулировки результатов нам понадобятся дополнительные сведения. Используем интегральное представление, полученное в работе [2, теорема 7.2.1]. Запишем его в удобной для нас форме

$$\frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^{\rho}}=\int\limits_0^{+\infty}\frac{n(r\tau)}{(r\tau)^{\rho}}\,K_p(\tau,\theta)\,d\tau,\qquad \theta\in(-\pi,\,\pi),$$

где $n(t)=n_{\Lambda}(t)=\max\{n:|\lambda_n|\leqslant t\}$ — считающая функция последовательности корней $f(z)$, $p=[\rho]$ — целая часть числа ρ, $\gamma=\{\rho\}$ — его дробная часть; ядро $K_p(\tau,\theta)$ имеет вид

$$K_p(\tau,\theta)=(-1)^p\,\frac{\tau^{\gamma-1}(\tau\cos(p+1)\theta+\cos p\theta)}{\tau^2+2\tau\cos\theta+1}\,.$$

Пусть $\tau_\theta=-\dfrac{\cos p\theta}{\cos(p+1)\theta}$. Введем следующие множества.

$$\Gamma_p^{(+)}=\{\theta\in[0,\,\pi):\ K_p(\tau,\theta)\geqslant 0\ \text{для всех}\ \tau\geqslant 0\}\,,$$

$$\Gamma_p^{(-)}=\{\theta\in[0,\,\pi):\ K_p(\tau,\theta)\leqslant 0\ \text{для всех}\ \tau\geqslant 0\}\,.$$

В случае, когда $\tau_\theta>0$, символом $\Gamma_p^{(\pm)}$ обозначаем множество тех значений $\theta\in[0,\,\pi)$, для которых $K_p(\tau,\theta)$ меняет знак с плюса на минус при переходе через точку τ_θ, а символом $\Gamma_p^{(\mp)}$ — с минуса на плюс.

Далее считаем, что последовательность корней $\Lambda = \Lambda_f$ целой функции $f(z)$ подчинена дополнительным требованиям

$$\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = 0, \qquad \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta \in (0, +\infty). \tag{2}$$

Сформулируем основные утверждения.

Теорема 1. *Пусть $f(z)$ — целая функция порядка $\rho \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$ с отрицательными корнями, подчиненными требованию (2), и $p = [\rho]$. Тогда нижний индикатор функции $f(z)$ удовлетворяет неравенству*

$$\underline{h}_\rho\,(f, \theta) \leqslant 0, \qquad \theta \in (-\pi,\, \pi),$$

причем $\underline{h}_\rho\,(f, \theta) \equiv 0,\ \theta \in \Gamma_p^{(+)}$.

Индикатор функции $f(z)$ удовлетворяет неравенству

$$h_\rho\,(f, \theta) \geqslant 0, \qquad \theta \in (-\pi,\, \pi),$$

причем $h_\rho\,(f, \theta) \equiv 0,\ \theta \in \Gamma_p^{(-)}$.

Этот общий результат действует при любом фиксированном значении β. Для уточнения приведенных оценок потребуется еще одно определение. Запишем последовательность корней $f(z)$ в виде, учитывающем их кратности:

$$\Lambda = \Lambda_f: \quad 0 > \lambda_1 = \ldots = \lambda_{n_1} > \lambda_{n_1+1} = \ldots = \lambda_{n_2} > \ldots .$$

Тогда формулы для плотностей (1) можно конкретизировать так

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{n_k}{|\lambda_{n_k}|^\rho}\,, \qquad \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \varliminf_{k\to\infty} \frac{n_k}{|\lambda_{n_{k+1}}|^\rho}\,. \tag{3}$$

Будем говорить, что последовательность Λ полуизмерима (при заданном показателе $\rho > 0$), если ее верхняя (или нижняя) ρ-плотность задается обычным, а не верхним (соответственно, нижним) пределом в (2), т. е. если существует хотя бы один из пределов

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \lim_{k\to\infty} \frac{n_k}{|\lambda_{n_k}|^\rho} \qquad \text{или} \qquad \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \lim_{k\to\infty} \frac{n_k}{|\lambda_{n_{k+1}}|^\rho}\,.$$

Справедлив следующий результат.

Теорема 2. *Пусть $f(z)$ — целая функция порядка $\rho \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$ с отрицательными корнями, подчиненными условию (2), и $p = [\rho]$. Тогда для нижнего индикатора и индикатора $f(z)$ верны точные оценки*

$$\underline{h}_\rho\,(f, \theta) \leqslant \beta\, \inf_{a>0} \left\{ a^{-\rho} I_p(a, \theta) \right\}, \qquad \theta \in \Gamma_p^{(-)},$$

$$h_\rho(f,\theta) \geqslant \beta \sup_{a>0} \left\{a^{-\rho} I_p(a,\theta)\right\}, \qquad \theta \in \Gamma_p^{(+)},$$

где величина $I_p(a,\theta)$ *задается формулой*

$$I_p(a,\theta) = \frac{1}{2} \ln\left(a^2 + 2a\cos\theta + 1\right) + \sum_{n=1}^{p} (-1)^n \frac{a^n}{n} \cos n\theta.$$

Если дополнительно известно, что последовательность корней функции $f(z)$ *полуизмерима, то эти оценки выполнены и для значений* $\theta \in \Gamma_p^{(\mp)} \cup \Gamma_p^{(\pm)}$.

Противоположные неравенства (следовательно, и равенства) справедливы для функций с быстрорастущими (по модулю) последовательностями корней Λ_f. Так называются последовательности, удовлетворяющие условию

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|\lambda_{n_{k+1}}|}{|\lambda_{n_k}|} = \infty.$$

Следующая теорема дает формулы для вычисления индикаторов целых функций из выделенного класса.

Теорема 3. *Пусть* $f(z)$ *— целая функция порядка* $\rho \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$ *с отрицательными быстрорастущими корнями конечной верхней* ρ*-плотности, равной* β. *Тогда для индикаторов* $f(z)$ *верны равенства*

$$\underline{h}_\rho(f,\theta) = \beta \inf_{a>0} \left\{a^{-\rho} I_p(a,\theta)\right\}, \qquad \theta \in (-\pi, \pi),$$

$$h_\rho(f,\theta) = \beta \sup_{a>0} \left\{a^{-\rho} I_p(a,\theta)\right\}, \qquad \theta \in (-\pi, \pi),$$

с величиной $I_p(a,\theta)$ *из теоремы 2.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М. : Гостехиздат, 1956. 632 с.

[2] *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular variation (Encyclopedia of mathematics and its applications; 27). Cambridge : Cambridge University Press, 1987. 494 p.