УДК 517.984

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МАТРИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С САМОСОПРЯЖЕННЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ ОБЩЕГО ВИДА[1]

Н. П. Бондаренко (Самара, Саратов, Россия)
bondarenkonp@info.sgu.ru

Рассматривается матричный оператор Штурма–Лиувилля на конечном интервале с условием Дирихле в одном конце интервала и самосопряженным краевым условием общего вида в другом. Изучены свойства собственных значений и весовых матриц этого оператора.

Ключевые слова: спектральный анализ, матричный оператор Штурма–Лиувилля, асимптотика собственных значений, асимптотика весовых матриц.

SPECTRAL ANALYSIS OF THE MATRIX STURM–LIOUVILLE OPERATOR WITH THE SELF-ADJOINT BOUNDARY CONDITION IN THE GENERAL FORM[1]

N. P. Bondarenko (Samara, Saratov, Russia)
bondarenkonp@info.sgu.ru

The matrix Sturm-Liouville operator on a finite interval with the Dirichlet boundary condition at the first end of the interval and with the general self-adjoint boundary condition at the second one is considered. For this operator, properties of the eigenvalues and of the weight matrices are studied.

Keywords: spectral analysis, matrix Sturm-Liouville operator, eigenvalue asymptotics, asymptotics of weight matrices.

Рассмотрим краевую задачу для матричного уравнения Штурма–Лиувилля

$$
\begin{gathered}
-Y''(x) + Q(x)Y(x) = \lambda Y(x), \quad x \in (0, \pi), \\
Y(0) = 0, \quad V(Y) := T(Y'(\pi) - HY(\pi)) - T^{\perp}Y(\pi) = 0,
\end{gathered} \tag{1}
$$

которую будем обозначать через $L = L(Q(x), T, H)$. Здесь $Y(x) = [y_k(x)]_{k=1}^m$ — вектор-функция, $Q(x) = [q_{jk}(x)]_{j,k=1}^m$ — матрица-функция размера $m \times m$ с элементами q_{jk} из класса $L_2(0, \pi)$, λ — спектральный параметр, T, $T^{\perp}$ и H — константные $m \times m$-матрицы, причем T — ортогональный проектор, $T^{\perp} = I - T$, где I — единичная матрица. При условиях $Q(x) = Q^*(x)$ п.в. на $(0, \pi)$, $H = H^*$, краевая задача L является самосопряженной.

[1]Работа выполнена в Саратовском государственном университете при финансовой поддержке РНФ (проект № 19-71-00009).

[1]The article is prepared in Saratov State University with the financial support of the Russian Science Foundation (project No. 19-71-00009).

Отметим, что в следующем частном случае

$$Q(x) = \operatorname{diag}\{q_j(x)\}_{j=1}^m, \quad T = [T_{jk}]_{j,k=1}^m, \quad T_{jk} = \frac{1}{m}, \quad j,k = \overline{1,m},$$
$$H = hT, \quad h \in \mathbb{R},$$

задача L превращается в задачу Штурма–Лиувилля на графе-звезде:

$$-y_j''(x) + q_j(x)y_j(x) = \lambda y_j(x), \quad x \in (0,\pi), \quad j = \overline{1,m},$$
$$y_j(0) = 0, \quad j = \overline{1,m},$$
$$y_j(\pi) = y_m(\pi), \quad j = \overline{1,m-1}, \qquad \sum_{j=1}^m (y_j'(\pi) - hy_j(0)) = 0.$$

Дифференциальным операторам на графах посвящена обширная литература (см., например, [1,2]).

В данной работе изучены свойства собственных значений и весовых матриц задачи L. Эти спектральные характеристики играют важную роль в теории обратных спектральных задач (см. [3]).

Обозначим $p := \operatorname{rank} T$, тогда $\operatorname{rank} T^\perp = m - p$. Для определенности будем считать, что $1 \le p < m$. Введем обозначения

$$\Omega := \frac{1}{2}\int_0^\pi Q(x)\,dx,$$
$$P_1(z) := z^{p-m}\det(zI - T(\Omega - H)T), \quad P_2(z) := z^{-p}\det(zI - T^\perp H T^\perp).$$

Нетрудно показать, что $P_1(z)$ и $P_2(z)$ — многочлены степеней p и $(m-p)$ соответственно. Все корни этих многочленов вещественные. Обозначим через $\{z_k\}_{k=1}^p$ корни $P_1(z)$ и через $\{z_k\}_{k=p+1}^m$ — корни $P_2(z)$ с учетом кратностей и в порядке неубывания: $z_k \le z_{k+1}$, $k = \overline{1,p-1}$ и $k = \overline{p+1,m-1}$.

Теорема 1. *Спектр задачи L представляет собой счетное множество собственных значений, которые можно пронумеровать как $\{\lambda_{nk}\}_{n\in\mathbb{N},\, k=\overline{1,m}}$ с учетом кратностей в порядке неубывания: $\lambda_{n_1,k_1} \le \lambda_{n_2,k_2}$, если $(n_1,k_1) < (n_2,k_2)$. При этом для $\rho_{nk} := \sqrt{\lambda_{nk}}$ выполняются асимптотические формулы*

$$\rho_{nk} = n - \frac{1}{2} + \frac{z_k}{\pi n} + \frac{\varkappa_{nk}}{n}, \quad k = \overline{1,p},$$
$$\rho_{nk} = n + \frac{z_k}{\pi n} + \frac{\varkappa_{nk}}{n}, \quad k = \overline{p+1,m},$$

где $n \in \mathbb{N}$, $\{\varkappa_{nk}\} \in l_2$.

Решением Вейля называется матричное решение $\Phi(x,\lambda) = [\Phi_{jk}(x,\lambda)]_{j,k=1}^m$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям $\Phi(0,\lambda) = I$, $V(\Phi) = 0$. Матрица-функция $M(\lambda) := \Phi'(0,\lambda)$ называется *матрицей Вейля*. Она мероморфна в λ-плоскости, все ее особенности являются простыми полюсами и совпадают с собственным значениями задачи L. Введем *весовые матрицы*: $\alpha_{nk} := -\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_{nk}} M(\lambda)$, $n \in \mathbb{N}$, $k = \overline{1,m}$.

Рассмотрим в последовательности $\{\lambda_{nk}\}_{n\in\mathbb{N},\, k=\overline{1,m}}$ произвольную максимальную по включению группу кратных собственных значений $\lambda_{n_1,k_1} = \lambda_{n_2,k_2} = \ldots = \lambda_{n_r,k_r}$, $(n_j,k_j) < (n_{j+1},k_{j+1})$, $j = \overline{1,r-1}$. Очевидно, $\alpha_{n_1,k_1} = \alpha_{n_2,k_2} = \ldots = \alpha_{n_r,k_r}$. Введем обозначения $\alpha'_{n_1,k_1} := \alpha_{n_1,k_1}$, $\alpha'_{n_j,k_j} := 0$, $j = \overline{2,r}$. В итоге мы получили последовательность $\{\alpha'_{nk}\}_{n\in\mathbb{N},\, k=\overline{1,m}}$.

Обозначим

$$\alpha_n^I := \sum_{k=1}^{p} \alpha'_{nk}, \quad \alpha_n^{II} := \sum_{k=p+1}^{m} \alpha'_{nk},$$

$$\alpha_n^{(s)} := \sum_{\substack{k=1\\ z_k=z_s}}^{p} \alpha'_{nk},\ s = \overline{1,p}, \qquad \alpha_n^{(s)} := \sum_{\substack{k=p+1\\ z_k=z_s}}^{m} \alpha'_{nk},\ s = \overline{p+1,m}.$$

Теорема 2. *Весовые матрицы эрмитовы и неотрицательно определены:* $\alpha_{nk} = \alpha_{nk}^*$, $n \in \mathbb{N}$, $k = \overline{1,m}$. *Ранги весовых матриц совпадают с кратностями соответствующих собственных значений. Справедливы асимптотические формулы*

$$\alpha_n^I = \frac{2(n-1/2)^2}{\pi}\left(T + \frac{K_n}{n}\right), \quad \alpha_n^{II} = \frac{2n^2}{\pi}\left(T^{\perp} + \frac{K_n}{n}\right),$$

$$\alpha_n^{(s)} = \frac{2n^2}{\pi}(A^{(s)} + K_n), \quad s = \overline{1,m},$$

где $A^{(s)}$ *— константные матрицы, формулы для них приведены в [4]. Обозначение* $\{K_n\}$ *используется для различных матричных последовательностей, таких что* $\{\|K_n\|\} \in l_2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Berkolaiko G., Carlson R., Fulling S., Kuchment P.* Quantum Graphs and Their Applications, Contemp. Math. 415. Providence : AMS, 2006. 307 p.

[2] *Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П.,Шабров С. А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах М. : Физматлит, 2005. 272 с.

[3] *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : Физматлит, 2005. 384 с.

[4] *Bondarenko N. P.* Spectral data asymptotics for the matrix Sturm–Liouville operator. 2019. https://arxiv.org/abs/1909.03810.