УДК 512.643.8

СВЕРТОЧНЫЕ МАТРИЦЫ

М. С. Беспалов (Владимир, Россия)
bespalov@vlsu.ru

Введено понятие полициркулянтных матриц. Известное утверждение о собственных числах и векторах циркулянтной матрицы перенесено на полициркулянтные.

Ключевые слова: циркулянтная матрица, свертка, дискретное преобразование Фурье, дискретное преобразование Уолша, кронекерово произведение.

CONVOLUTIONAL MATRICES

M. S. Bespalov (Vladimir, Russia)
bespalov@vlsu.ru

The concept of polycirculant matrices is introduced. We show that the well-known result about eigenvalues and eigenvectors of a circulant matrix is also valid for a polycirculant matrix.

Keywords: circulant matrix, convolution, discrete Fourier transform, discrete Walsh transform, Kronecker product.

Введение

При цифровой обработке информации [1] дискретный сигнал в виде вектора a кодируют с помощью дискретного ортогонального преобразования анализа $A = \mathcal{F}[a]$, а декодируют обратным оператором синтеза $a = \mathcal{F}^{-1}[A]$, которое запишем в матричном виде $a = A \cdot F$ для сигналов a и A в виде строк. Условие ортогональности преобразований состоит в требовании ортогональности строк матрицы F (или F^{-1}) относительно эрмитова дискретного скалярного произведения $< a, b >= \sum_{k=0}^{N-1} a_k \overline{b_k}$.

1. Основные определения и понятия

Основным примером такого оператора синтеза служит (обратное) дискретное преобразование Фурье (ДПФ) с матрицей

$$F_N = \left(\omega^{kj}\right)_{k,j=0}^{N-1}, \qquad \text{где } \omega = e^{\frac{2\pi i}{N}}. \tag{1}$$

Умышленно взяли в качестве основного для исследования обратное ДПФ, так как прямое ДПФ, заданное комплексно-сопряженной матрицей $\overline{F_N} = \left(\omega^{-kj}\right)_{k,j=0}^{N-1}$, выглядит несколько сложнее.

Обозначим $H = F_2$ матрицу ДПФ (1) второго порядка. Следующим примером такого оператора служит дискретное преобразование Уолша

(ДПУ) в нумерации Адамара с матрицей $H_n = H^{n\otimes}$ в виде кронекеровой степени матрицы H. Эта матрица действительная. Дальнейшим обобщением служат комплекснозначные матрицы дискретного преобразования Крестенсона (ДПК) в виде кронекеровой степени других ДПФ: $F_p^{n\otimes}$. Следующим обобщением служит оператор дискретного преобразования Виленкина (ДПВ) с матрицей в виде кронекерова произведения различных ДПФ

$$F = F_{p_n} \otimes F_{p_{n-1}} \otimes \ldots \otimes F_{p_2} \otimes F_{p_1}, \tag{2}$$

которую будем называть матрицей n-го уровня. Так как формула (2) включает все предыдущие случаи, то о ней и пойдет речь.

Для выбранного набора целых чисел $\{p_k\}_{k=1}^n$ через разложения чисел $k, j \in M = \{0, 1, 2, \ldots, m_n - 1\}$ в смешанной системе счисления

$$k = \sum_{s=1}^{n} k_s m_{s-1}, \quad \text{где } m_0 = 1,\ m_k = m_{k-1} p_k, \quad 0 \le k_s < p_s,$$

вводим групповую операцию

$$t = k \oplus j = \sum_{s=1}^{n} t_s m_{s-1}, \quad \text{где } t_s = (k_s + j_s) \pmod{p_s},$$

обратную к которой обозначим $\ominus$.

Дискретные периодические сигналы будем классифицировать и соответственно называть (уровня n) в зависимости от того, относительно какой групповой операции $\oplus$ и какого дискретного преобразования эти сигналы рассматриваются:

1) при $N = p$ имеем периодический сигнал относительно ДПФ;
2) при $N = 2^n$ имеем *диадический* сигнал относительно ДПУ;
3) при $N = p^n$ имеем *p-адический* сигнал относительно ДПК;
4) при $N = m_n$ имеем *полиадический* сигнал относительно ДПВ.

Определение 1. *Дискретной групповой сверткой* сигналов выбранного типа называется сигнал $c = a * b$, отсчеты которого

$$c_k = \sum_{j=0}^{N-1} a_j b_{k \ominus j}.$$

Определение 2. *Полициркулянтной* назовем матрицу $[a]$, построенную по сигналу a, с элементами

$$[a]_{ij} = a_{j \ominus i}.$$

Понятие уровня переносится с сигнала на полициркулянтную матрицу. Полициркулянтная матрица уровня 1 это известная [2] циркулянтная матрица для периодического сигнала.

2. Основные утверждения

Утверждение 1. *Дискретная групповая свертка двух сигналов в матричном виде равна произведению строки одного на полициркулянтную матрицу другого:* $a * b = a \cdot [b] = b \cdot [a]$.

Утверждение 2. *ДПВ дискретной групповой свертки равно произведению (по Адамару) ДПВ исходных сигналов:*

$$\mathcal{F}[a * b] = \mathcal{F}[a] \circ \mathcal{F}[b].$$

Следствие 1. *ДПВ произведения (по Адамару) сигналов, помноженное на порядок сигнала N, равно дискретной групповой свертке ДПВ этих сигналов:*

$$N\mathcal{F}[a \circ b] = \mathcal{F}[a] * \mathcal{F}[b].$$

Столбцы симметричной матрицы (2) обозначим φ_k (при нумерации с нуля) и назовем дискретными функциями Виленкина. Их легко перенумеровать в порядке $\overline{\varphi_k}$. Следующая теорема служит обобщением известного [2] результата для циркулянтных матриц.

Теорема 1. *Для любой полициркулянтной матрицы $[x]$ собственными векторами служат дискретные функции Виленкина $\overline{\varphi_k}$, отвечающими собственным числам $c_k = < x, \varphi_k >$.*

Следствие 2. *Полициркулянтная матрица $[x]$ диагонализируется преобразованием подобия с матрицей ДПВ* (2)*:*

$$D = \frac{1}{N} F \cdot [x] \cdot \overline{F},$$

где $D = \mathrm{diag}(c_0, c_1, \ldots, c_{N-1})$.

Следствие 3. *Спектральное разложение полициркулянтной матрицы*

$$[x] = \frac{1}{N} \overline{F} \cdot D \cdot F,$$

где F вида (2)*,* $D = \mathrm{diag}(c_0, c_1, \ldots, c_{N-1})$*,* $c_k = < x, \varphi_k >$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Малоземов В. Н., Машарский С. М.* Основы дискретного гармонического анализа. СПб. : Лань, 2012. 304 с.

[2] *Davis P. J.* Circulant matrices. N. Y. : Wiley Publ. 1979. 304 p.