УДК 517.5

# О КОРНЕВЫХ МНОЖЕСТВАХ ОДНОГО КЛАССА АНАЛИТИЧЕСКИХ В ПОЛУПЛОСКОСТИ ФУНКЦИЙ

**В. А. Беднаж (Брянск, Россия)**
vera.bednazh@mail.ru

В статье получено описание корневых множеств и факторизационное представление функций из класса $N_s(C_+)$, $s \geq 2$.

*Ключевые слова:* верхняя полуплоскость, голоморфные функции, корневые множества.

# ON ROOT SETS OF ONE CLASS OF ANALYTICAL IN THE HALF-PLANE OF THE FUNCTIONS

**V. A. Bednazh (Bryansk,Russia )**
vera.bednazh@mail.ru

The article provides a complete description of the root sets and factorization representation of functions from classes $N_s(C_+)$, $s \geq 2$.

*Keywords:* upper half-plane, holomorphic functions, root sets.

Для изложения основных результатов, полученных в работе, введем следующие обозначения. Пусть $C$ — комплексная плоскость, $C_+ = \{z \in C : \operatorname{Im} z > 0\}$ — верхняя полуплоскость, $H(C_+)$ — множество голоморфных в $C_+$ функций,

$$B_p(\zeta, \zeta_k) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{2y_k(i+\zeta)}{i(i+\zeta_k)(\overline{\zeta_k} - \zeta)}\right) \cdot \exp \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{p} \left(\frac{2y_k(i+\zeta)}{i(i+\zeta_k)(\overline{\zeta_k} - \zeta)}\right)^p$$

- бесконечное произведение типа Вейерштрасса, $\{\zeta_k\}$ — произвольная последовательность точек из $C_+$ , для которой $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{(\operatorname{Im} \zeta_k)^{p+1}}{|\zeta_k + i|^{2(p+1)}} < +\infty$.

Скажем, что функция из класса $N_s(C_+)$, $s \geq 2$, если она голоморфна в $C_+$ и удовлетворяет условию

$$N_s(C_+) = \left\{ f \in H(C_+) : \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln^+ |f(x+iy)|}{1 + |x+iy|^{2s}} \, dx \, dy < +\infty \right\},$$

где $ln^+|a| = \max(ln|a|, 0)$.

Исследование свойств корневых множеств и построение факторизационных представлений привлекло внимание классиков комплексного анализа ещё в начале прошлого столетия. В этой связи отметим классические работы К. Вейерштрасса, Ж. Адамара, Ф. Бореля, Е. Линделёфа, О. Пикара и других о нулях целых функций, имеющих заданный рост вблизи бесконечно удалённой точки, а также работы Р. Неванлинна и В. Н. Смирнова о внешне-внутренней факторизации классов Харди и классов функций ограниченного вида в единичном круге. Эти вопросы остаются в центре внимания и современных авторов, для этого достаточно отметить работы М. М. Джрбашяна, Б. Я. Левина, Л. А. Рубеля, Ф. А. Шамояна и других математиков. Эти результаты изложены в хорошо известных монографиях Р. Неванлинны [3], И. И. Привалова [4], П. Кусиса [2], Д. Гарнета [1].

В работе получено полное описание корневых множеств функций из класса $N_s(C_+)$, $s \geq 2$. В частности, устанавливаются следующие результаты.

**Теорема 1.** *Пусть* $z_k = iy_k$, $k = 1, 2, \ldots$, *причём* $y_k \to +\infty$ *при* $k \to +\infty$. *Тогда следующие утверждения равносильны:*

*1) существует функция* $f \in N_s(C_+)$, $s \geq 2$ *такая, что* $f(z_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, $f(z) \neq 0$ *при* $z \neq z_k$, $k = 1, 2, \ldots$;

*2)* $\sum\limits_{y_k \geq 1} \frac{1}{y_k^{2(s-1)}} < +\infty$.

**Теорема 2.** *Пусть* $\{y_k\}$ *— произвольная последовательность неотрицательных чисел,* $0 < y_k \leq 1$. *Тогда следующие утверждения равносильны:*

*1) существует функция* $f \in N_s(C_+)$, $s \geq 2$ *такая, что* $f(iy_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, $f(z) \neq 0$ *при* $z \neq iy_k$, $k = 1, 2, \ldots$;

*2)* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} y_k^{2(s-1)} < +\infty$.

Для рассматриваемого класса голоморфных функций получена следующая теорема о факторизации.

**Теорема 3.** *Пусть* $f \in N_s(C_+)$, $s \geq 2$, *предположим* $f(iy_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, $f(z) \neq 0$ *при* $z \neq iy_k$, $k = 1, 2, \ldots$ *Тогда функцию* $f(z)$ *можно представить в виде* $f(z) = B_p(z, y_k) \cdot g(z)$, *где* $g \in N_s(C_+)$, $s \geq 2$, $g(z) \neq 0$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


[1] *Гарнет Дж.* Ограниченные аналитические функции М. : Мир, 1984. 469 с.

[2] *Кусис П.* Введение в теорию пространств $H^p$ М. : Мир, 1984. 368 с.

[3] *Неванлинна Р.* Граничные свойства аналитических функций М. : ИМГИТТЛ, 1941. 388 с.

[4] *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитические функции М. : ГИТТЛ, 1950. 336 с.

[5] *Шамоян Ф. А.* Факторизационная теорема М. М. Джрбашяна и характеризация ну-лей аналитических функций с мажорантой конечного роста // Изв. АН Арм. ССР. Математика. 1978 Т. 13, № 5 С. 405–422.