УДК 517.518.3

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОРТОРЕКУРСИВНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СИСТЕМЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДВОИЧНЫХ ПРОМЕЖУТКОВ

И. С. Баранова (Москва, Россия)
irarinoka@gmail.com

Рассмотрено орторекурсивное разложение в пространстве дважды интергируемых на отрезке функций. Приведены асимптотические формулы для коэффициентов орторекурсивного разложения по системе характеристических функций двоичных промежутков в случаях дифференцируемых функций и функций, имеющих в исследуемой точке разрыв 1-го рода.

Ключевые слова: орторекурсивное разложение, двоичные интервалы, асимптотика.

ON THE ASYMPTOTIC PROPERTIES OF THE COEFFICIENTS OF ORTHORECURSIVE EXPANSIONS IN A SYSTEM OF INDICATORS OF DYADIC INTERVALS

I. S. Baranova (Moscow, Russia)
irarinoka@gmail.com

An orthorecursive expansion in the space of square-integrable functions on an interval is considered. Asymptotic formulas are given for the coefficients of orthorecursive expansion in the system of indicators of dyadic intervals in the cases of differentiable functions and functions having a discontinuity of the first kind at the point under study.

Keywords: orthorecursive expansion, dyadic intervals, asymptotics.

Введение

Орторекурсивные разложения [1, 2] представляют собой естественное обобщение классических разложений в ряды Фурье по ортогональным системам, применимое в случае переполенных систем. Орторекурсивные разложения по конкретным системам рассматривались в работах [1, 2, 4–6], общие свойства орторекурсивных разложений — в работах [2, 3, 7, 8].

Определение орторекурсивных разложений в общем случае приведено в работе [2]. Рассмотрим частный случай.

Пусть $H = L_2[0,1]$ — пространство вещественных функций, интегрируемых с квадратом на отрезке $[0,1]$, со скалярным произведением $(f,g)_2 = \int_{[0,1]} f(t)g(t)dt$. Зададим систему $\{\chi_k\}$ характеристических функций двоичных отрезков: для каждого $k = 2^n + j$ ($n \in \mathbb{Z}^+$, $j \in \{0,1,\ldots,2^n-1\}$)

$$\Delta_k = \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right], \ \chi_k(x) = \begin{cases} 1, x \in \Delta_k; \\ 0, x \notin \Delta_k. \end{cases}$$

При этом отрезки и соответствующие им функции делятся на группы (пачки) по номеру n и каждая следующая пачка отрезков получается из предыдущей делением отрезков пачки пополам.

Орторекурсивные разложения по системам характеристических функций промежутков рассматривались в работе [2], по обобщениям таких систем — в работе [4]. В соответствии с результатами [3] орторекурсивное разложение по системе характеристических функций двоичных промежутков абсолютно устойчиво к погрешностям в вычислении коэффициентов и к возмущениям самой системы.

Пусть функция $f \in L_2[0,1]$. Коэффициенты и остатки ее орторекурсивного разложения по системе $\{\chi_k\}$ имеют следующий вид:

1) $\hat{f}_1 = \frac{1}{|\Delta_1|} \int\limits_{\Delta_1} f dt, \ r_1(f) = f - \hat{f}_1 \chi_1;$

2) $\hat{f}_{n+1} = \frac{1}{|\Delta_{n+1}|} \int\limits_{\Delta_{n+1}} r_n(f) dt, \ r_{n+1}(f) = f - \sum\limits_{k=1}^{n+1} \hat{f}_k \chi_k.$

Для произвольной фиксированной точки x_0 из интервала (0,1), не являющейся двоично-рациональной (т.е. $x_0 \neq \frac{q}{2^k}$, $q, k \in \mathbb{Z}^+$), и для любого номера $n \in \mathbb{Z}^+$ обозначим через $c_n^f(x_0)$ коэффициент разложения f по той функции n-й пачки, носитель которой содержит x_0, т.е.

$$c_n^f(x_0) = \hat{f}_{2^n+s}, \text{ где } 0 \leqslant s < 2^n, \ \frac{s}{2^n} < x_0 < \frac{s+1}{2^n}.$$

Представленные в настоящей работе результаты устанавливают связь между свойствами функции f вблизи точки x_0 и свойствами последовательности $\{c_n^f(x_0)\}_{n=0}^{\infty}$.

Для их формулировки потребуется ввести ряд дополнительных обозначений, характеризующих положение точки x_0 относительно двоично-рациональных точек отрезка $[0,1]$.

Для каждого $n \in \mathbb{Z}^+$ обозначим через I_n отрезок из n-й пачки, содержащий x_0. Для $n \geqslant 1$ обозначим $\widehat{I_n} = I_{n-1} \setminus I_n$. Заметим, что отрезок I_n всегда является одной из половин отрезка I_{n-1}.

Далее, для каждого $n \in \mathbb{Z}^+$ через через $d_n(x_0)$ обозначим разность между серединой отрезка I_n и точкой x_0, а через $q_n(x_0)$ — ближайшую к x_0 точку вида $\frac{m}{2^n}$ ($m \in \{0, \ldots, 2^n\}$). Такой точкой всегда будет являться один из концов отрезка I_n. Также обозначим $p_n(x_0) = x - q_n(x_0)$. При этом $p_n(x_0) \in (-2^{-n-1}, \ 2^{-n-1})$. Введем еще одну величину:

$$P_n(x) = 2^n p_n(x) = \frac{p_n(x)}{|I_n|} \in (-\frac{1}{2}, \ \frac{1}{2}).$$

Для получения представленных ниже результатов были использованы несколько вспомогательных утверждений. Наиболее содержательным из них представляется следующее.

Лемма *При каждом $n \in \mathbb{N}$ справедлива формула*

$$c_n^f(x_0) = 2^{n-1} \left(\int\limits_{I_n} - \int\limits_{\widehat{I}_n} \right) f(t)dt.$$

Из полученной формулы явно видно, что значения $c_n^f(x_0)$ зависят от значений функции f на стягивающейся к точке x_0 системе отрезков. Таким образом, становится естественным предположение о связи между свойствами этой последовательности и локальными (вблизи точки x_0) свойствами функции f.

Основные результаты

Теорема 1. *Пусть f — один из представителей класса эквивалентных функций из $L_2[0,1]$ и $f \in D^k(x_0)$, $k \geq 1$, $f'(x_0) = ... = f^{(k-1)}(x_0) = 0$, $f^{(k)}(x_0) \neq 0$. Тогда с точностью до $o(2^{-kn})$ при $n \to \infty$ величина $c_n^f(x_0)$ зависит только от положения точки x_0 и значения $f^{(k)}(x_0)$, а именно:*

$$c_n^f(x_0) = 2^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} g_k(n, x_0) + o(2^{-nk}),\ n \to \infty,$$

где $g_k(n, x_0) = \frac{1}{2} \left(\int\limits_{I_n} - \int\limits_{\widehat{I}_n} \right) (x - x_0)^k dx =$

$$= -\tfrac{\operatorname{sgn}(d_{n-1}(x_0))}{k+1} \sum_{\substack{s \text{ четное} \\ 2 \leq s \leq k+1}} C_{k+1}^s 2^{-ns} d_{n-1}^{k+1-s}(x_0).$$

В частности,

$$c_n^f(x_0) \sim -\operatorname{sgn}(d_{n-1}(x_0)) \frac{f'(x_0)}{2} 2^{-n},\ n \to \infty,\ \text{при } k = 1.$$

Теорема 2. *Пусть f — один из представителей класса эквивалентных функций из $L_2[0,1]$ и существуют односторонние пределы $f(x_0 \pm 0)$ функции f в точке x_0, $\delta = f(x_0 - 0) - f(x_0 + 0)$, т.е. функция f имеет в точке x_0 разрыв 1-го рода с величиной скачка $\delta \neq 0$ или при $\delta = 0$ непрерывна в точке x_0 либо имеет в ней устранимый разрыв. Тогда с* *точностью до* $o(1)$, $n \to \infty$, *величина* $c_n^f(x_0)$ *зависит только от положения точки* x_0 *и величины скачка, а именно:*

$$c_n^f(x_0) = P_{n-1}(x_0)\delta + o(1),\ n \to \infty.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Лукашенко Т. П.* Об орторекурсивних разложениях по системе Фабера–Шаудера // Современные проблемы теории функций и их приложения : тез. докл. 10-й Сарат. зимн. шк. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2000. С. 83.

[2] *Лукашенко Т. П.* О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам // Вестн. Моск. ун-та. Математ. Механ. 2001. № 1. С. 6–10.

[3] *Галатенко В. В.* Об орторекурсивном разложении с ошибками в вычислении коэффициентов // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. Т. 69, № 1. С. 3–16.

[4] *Галатенко В. В.* Об орторекурсивном разложении по некоторой системе функций с ошибками при вычислении коэффициентов // Матем. сб. 2004. Т. 195, № 7. С. 21–36.

[5] *Кудрявцев А. Ю.* О сходимости орторекурсивных разложений по неортогональным всплескам // Матем. заметки. 2012. Т. 92, № 5. С. 707–720.

[6] *Кудрявцев А. Ю.* О скорости сходимости орторекурсивных разложений по неортогональным всплескам // Изв. РАН. Сер. матем. 2012. Т. 76, № 4. С. 49–64.

[7] *Политов А. В.* Орторекурсивные разложения в гильбертовых пространствах // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2010. № 3. С. 3–7.

[8] *Политов А. В.* Критерий сходимости орторекурсивных разложений в евклидовых пространствах // Матем. заметки. 2013. Т. 93, № 3. С. 637–640.