УДК 517.9

ДВУСТОРОННИЕ МЕТОДЫ МАГНИТОСТАТИКИ НА ОСНОВЕ ВАРИАЦИОННОГО ПОДХОДА

Т. Р. Арутюнян (Москва, Россия)
tigran_201094@mail.ru

Рассмотрены двусторонние методы расчета магнитного поля, основанные на применении к уравнениям электромагнитного поля в терминах скалярного потенциала вариационного метода множителей Лагранжа. Получены сопряженные уравнения для разных критериев оптимальности (как для равномерной, так и среднеквадратической метрики). Рассмотрено решение задачи расчета двусторонних оценок решения при расчете статического магнитного поля в ферромагнетике, помещенном в стороннее равномерное магнитное поле. Полученные результаты могут использоваться также при решении прямых и обратных задач для системы ферромагнитных тел и в тестовых задачах при использовании других методов.Библиогр. 4 назв.

Ключевые слова: уравнения магнитостатики, двусторонний метод, магнитные потенциалы, вариационный метод, множители Лагранжа.

TWO-SIDED METHODS OF MAGNETOSTATIC BASED ON THE VARIATIONAL APPROACH

T. R. Harutyunyan (Moscow, Russia)
tigran_201094@mail.ru

Two-sided methods of magnetic field calculation based on the application of the Lagrange multipliers variational method to the electromagnetic field equations in terms of scalar potential are considered. Conjugate equations for different optimality criteria (both for uniform and mean square metrics) are obtained. The solution of a problem of calculation of bilateral estimates of the solution at calculation of a static magnetic field in the ferromagnet placed in a third-party uniform magnetic field is considered. The obtained results can also be used in solving direct and inverse problems for the system of ferromagnetic bodies and in test problems using other methods.Bibliography 4 the name.

Keywords: magnetostatic equations, Two-sided method, magnetic potentials, variational method, Lagrange multipliers.

Рассмотрим задачу магнитостатики [1,2]. Материал с магнитными свойствами занимает объем V. Намагниченность связана с индукцией и напряженностью согласно соотношению: $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{B}/\mu_0 - \overrightarrow{H}$. В немагнитной среде $\overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{H}$, в ферромагнетике $\overrightarrow{B} = \mu_0(\overrightarrow{H} + \overrightarrow{M})$, где μ - удельная магнитная проницаемость определяется кривой намагничивания $\mu = \mu(\overrightarrow{B})$, в воздухе, изоляционных материалах и шинах $\mu = \mu_0$, Гн/м. Определим скалярный магнитный потенциал: $\overrightarrow{H} = -\nabla\phi$. На бесконечности потенциал равен нулю. Если магнитная проницаемость ферромагнитного материала многов выше проницаемости воздуха, то краевая задача (КЗ) может быть разбита на две: в воздухе решается уравнение Лапласа для потенциала при нулевом краевом условии на границе ферромагнетика и заданных источниках поля: $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{H}_{ex} - \nabla v_{ex}$, $\overrightarrow{H}_{ex} = -\nabla v_{ex}$,

$$\Delta v = 0, (x, y) \in C(D + \Gamma); v = -v_{ex}(x, y) \in \Gamma = \partial D, \tag{1}$$

В объеме ферромагнитного тела решается КЗ 2-го типа для потенциала при заданной плотности магнитного потока сквозь границу объема:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(H)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(H)\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0, \quad (x,y)\in D; \tag{2}$$

$$\mu(H)\frac{\partial u}{\partial n}=\mu_0\frac{\partial v}{\partial n}, \quad (x,y)\in\Gamma; \tag{3}$$

$$u(0,0)=0, \quad \overrightarrow{H}=-\nabla u. \tag{4}$$

Требуется решить уравнения (1)–(4) с учетом погрешности задания кривой намагничивания:

$$\mu=\mu(H)\in(\mu^-(H),\mu^+(H)), \quad w_0=\mu^+(H)-\mu^-(H), \tag{5}$$

предположим требуется найти оценку решения КЗ снизу (сверху):

$$u(x_0,y_0)\to\min(\max), \quad \mu=\mu(H)\in(\mu^-(H),\mu^+(H)),$$

Подобные задачи для ОДУ решались в литературе [3]. Функционал Лагранжа рассматриваемой задачи имеет вид, согласно [2, 4]:

$$\begin{aligned}L=\int\int_D w(x_N,y_N)\left(\frac{\partial}{\partial x_N}\left(\mu(|\nabla_N u|)\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)+\right.\\ \left.+\frac{\partial}{\partial y_N}\left(\mu(|\nabla_N u|)\frac{\partial u}{\partial y_N}\right)\right)dx_N dy_N+\\ +\int_\Gamma w_1(x_N,y_N)\left(\mu(|\nabla_N u|)\frac{\partial u}{\partial n_N}-\mu_0\frac{\partial v}{\partial n_N}\right)d\Gamma_N+w_2 u(0,0)+\\ +\int\int_D u(x_N,y_N)\delta(x_N-x_0,y_N-y_0)dx_N dy_N=0, \quad (x,y)\in D.\end{aligned}$$

Первый интеграл в данном функционале преобразуется к виду

$$\int_\Gamma w(x_N,y_N)\ \mu_0\frac{\partial v}{\partial n_N}d\Gamma_N-\int\int_D \mu(|\nabla_N u|)\nabla_N u\nabla_N w dx_N dy_N=0.$$

Для решения задачи вычисляется вариация по функции u и находится уравнение экстремалей функционала. Соответствующие верхней (нижней) оценке решения значения находятся из условия экстремума функционала Лагранжа: $L\to\max(\min)$, для всех $\mu(|\nabla u|)$ из допустимого множества (5). Экстремальное значение достигается, если магнитная характеристика описывается выражением

$$\mu^*=\mu^0(|\nabla u|)(1-0.5\omega(|\nabla u|)\,\mathrm{sign}(\nabla u\nabla p)).$$

Сопряженное уравнение имеет вид:

$$div\left(\mu^*(|\nabla u|)\nabla p + H^{-1}\frac{d\mu^*}{dH}(\nabla u \nabla p)\nabla u\right) +$$
$$+\delta(x - x_0, y - y_0) - \delta(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D.$$

Если требуется оценить не равномерную, а среднеквадратическую погрешность, например

$$\|u - u^0\|_{L_2(D)} \to \min(\max),$$

то сопряженное уравнение имеет вид:

$$div\left(\mu^*(|\nabla u|)\nabla p + H^{-1}\frac{d\mu^*}{dH}(\nabla u \nabla p)\nabla u\right) + C_0(u - u^0) = 0, \quad (x, y) \in D.$$

КЗ решались конечно-разностным методом на неравномерной сетке. Уравнения системы МКР приводятся к виду, удобному для применения итерационного метода релаксации и Зейделя. Итерации оканчиваются, если имеет место совпадение требуемого количества знаков в числовых значениях приближений. Эффективность метода проверена при решении на ЭВМ модельной задачи двусторонней оценки решения уравнений магнитостатики в объеме призматического ферромагнита.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Блох Ю. И.* Теоретические основы комплексной магниторазведки. М. : МГГА, 2012. 160 с.

[2] *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М. : Наука, 1978. 832 с.

[3] *Рогалев А.Н.* Границы множеств решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными начальными данными // Вычислительные технологии. 2004. Т. 9, № 1. С. 86–94.

[4] *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М. : Наука, 1988. 552 с.