УДК 517.984

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ: НЕЛИНЕЙНЫЙ СЛУЧАЙ[1]

В. А. Юрко (Саратов, Россия)

YurkoVA@info.sgu.ru

Рассматриваются дифференциальные операторы второго порядка на конечном интервале с отклоняющимся аргументом. Установлены свойства спектральных характеристик и исследуется нелинейная обратная задача, состоящая в восстановлении операторов по их спектрам. Разработаны конструктивные алгоритмы для решения обратных задач этого класса и доказана единственность решения.

Ключевые слова: Дифференциальные операторы, отклоняющийся аргумент, обратная спектральная задача.

ON RECOVERING DIFFERENTIAL OPERATORS WITH DEVIATING ARGUMENT: NONLINEAR CASE[1]

V. A. Yurko (Saratov, Russia)

YurkoVA@info.sgu.ru

Second order differential operators on a finite interval with deviating argument are considered. Properties of spectral characteristics are established, and a nonlinear inverse problem is studied which consist in recovering operators from their spectra. We suggest a constructive algorithms for solving such inverse problems and prove the uniqueness of the solution.

Keywords: Differential operators, deviating argument, inverse spectral problem.

Рассмотрим краевые задачи $\mathcal{L}_j$, $j = 1, 2$:

$$-y''(x) + q(x)y(x-a) = \lambda y(x), \quad 0 < x < \pi, \tag{1}$$

$$y'(0) - hy(0) = y'(\pi) + H_j y(\pi) = 0,$$

где $a \in [\pi/3, \pi/2)$, h и H_j — комплексные числа, $q(x)$ — комплекснозначная функция, $q(x) \in L(a, \pi)$ и $q(x) = 0$ п.в. на $(0, a)$. Пусть $\varphi(x, \lambda)$ – решение уравнения (1) при условиях $\varphi(0, \lambda) = 1$, $\varphi'(0, \lambda) = h$. Собственные значения $\{\mu_{nj}\}_{n\geq 0}$ задачи $\mathcal{L}_j$ совпадают с нулями целой функции $\mathcal{P}_j(\lambda) := \varphi'(\pi, \lambda) + H_j\varphi(\pi, \lambda)$, которая называется характеристической функцией для $\mathcal{L}_j$. В статье исследуется нелинейная обратная задача восстановления $q(x), h, H_j$ по заданным спектрам $\{\mu_{nj}\}_{n\geq 0}$, $j = 1, 2$. Отметим, что в [1] установлена единственность решения обратной задачи для уравнений с запаздыванием в весьма частном случае. В [2, 3] изучался линейный случай $a \geq \pi/2$, а в [4] исследовался нелинейный случай $a \in [2\pi/5, \pi/2)$ для краевого условия Дирихле в нуле.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-01-00102).

[1]This work was supported by the RFBR (project No. 19-01-00102)

Обозначим $A := \dfrac{1}{2}\int\limits_a^\pi q(t)\,dt$. Тогда

$$\sqrt{\mu_{nj}} = n + (h + H_j + A\cos na)/(\pi n) + o(1/n), \quad n \to \infty. \tag{2}$$

Задание спектра $\{\mu_{nj}\}_{n\ge 0}$ однозначно определяет характеристическую функцию:

$$\mathcal{P}_j(\lambda) = \pi(\mu_{0j} - \lambda)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_{nj} - \lambda}{n^2}, \quad j = 1, 2. \tag{3}$$

Положим $\Delta_k(\lambda) := \varphi^{(k)}(\pi, \lambda)$, $k = 0, 1$. Тогда

$$\Delta_0(\lambda) = (\mathcal{P}_1(\lambda) - \mathcal{P}_2(\lambda))/(H_1 - H_2),\ \Delta_1(\lambda) = (\mathcal{P}_1(\lambda)H_2 - \mathcal{P}_2(\lambda)H_1)/(H_2 - H_1). \tag{4}$$

Пусть $\lambda = \rho^2$. Обозначим

$$A_1 = \int\limits_{2a}^{\pi} q(t)dt\int\limits_a^{t-a} q(s)ds,\ Q_1(t) = q(t)\int\limits_a^{t-a} q(s)ds,\ Q_2(t) = q(t)\int\limits_{t+a}^{\pi} q(s)ds,$$

$$Q_3(t) = \int\limits_{t+a}^{\pi} q(s)q(s-t)ds,\ Q_{\mp}(\xi) = Q_1(\xi/2 + \pi/2 + a) - Q_2(\xi/2 + \pi/2) \mp Q_3(\xi/2 + \pi/2).$$

Тогда

$$\Delta_0(\lambda) = \cos\rho\pi + \frac{h\sin\rho\pi}{\rho} + \frac{A\sin\rho(\pi - a)}{\rho} - \frac{hA\cos\rho(\pi - a)}{\rho^2} + \frac{d_0(\rho)}{2\rho}, \tag{5}$$

$$\Delta_1(\lambda) = -\rho\sin\rho\pi + h\cos\rho\pi + A\cos\rho(\pi - a) + \frac{hA\sin\rho(\pi - a)}{\rho} + \frac{d_1(\rho)}{2}, \tag{6}$$

$$d_0(\rho) = -\int\limits_a^\pi q(t)\sin\rho(2t - \pi - a)\,dt + \frac{h}{\rho}\int\limits_a^\pi q(t)\cos\rho(2t - \pi - a)\,dt - \frac{A_1\cos\rho(\pi - 2a)}{2\rho}$$

$$-\frac{hA_1\sin\rho(\pi - 2a)}{2\rho^2} + \frac{1}{4\rho}\int\limits_{-(\pi-2a)}^{(\pi-2a)} Q_+(\xi)\cos\rho\xi\,d\xi + \frac{h}{4\rho^2}\int\limits_{-(\pi-2a)}^{(\pi-2a)} Q_-(\xi)\sin\rho\xi\,d\xi, \tag{7}$$

$$d_1(\rho) = \int\limits_a^\pi q(t)\cos\rho(2t - \pi - a)\,dt + \frac{h}{\rho}\int\limits_a^\pi q(t)\sin\rho(2t - \pi - a)\,dt + \frac{A_1\sin\rho(\pi - 2a)}{2\rho}$$

$$-\frac{hA_1\cos\rho(\pi - 2a)}{2\rho^2} + \frac{1}{4\rho}\int\limits_{-(\pi-2a)}^{(\pi-2a)} Q_+(\xi)\sin\rho\xi\,d\xi - \frac{h}{4\rho^2}\int\limits_{-(\pi-2a)}^{(\pi-2a)} Q_-(\xi)\cos\rho\xi\,d\xi. \tag{8}$$

Пусть заданы спектры $\{\mu_{nj}\}_{n\geq 0}$, $j=1,2$. Построим функции $\mathcal{P}_j(\lambda)$, $j=1,2$, используя (3). Затем, учитывая (2), вычисляем

$$H_1-H_2=\pi\lim_{n\to\infty}(\sqrt{\mu_{n1}}-\sqrt{\mu_{n2}})n. \tag{9}$$

Строим функцию $\Delta_0(\lambda)$ с помощью (4). Используя (5), находим h и A :

$$A=\lim_{n_k\to\infty}(-1)^{n_k+1}(\sin an_k)^{-1}(\Delta_0(n_k^2)-(-1)^{n_k})n_k, \tag{10}$$

$$h=\lim_{n\to\infty}\Big((2n+1/2)\Delta_0((2n+1/2)^2)-A\sin(2n+1/2)(\pi-a)\Big), \tag{11}$$

где n_k выбраны так, что $|\sin an_k|>\delta>0$. Используя (2), вычисляем H_1 и H_2, а затем строим функцию $\Delta_1(\lambda)$ согласно (4). Теперь можно найти функции $d_k(\rho)$, $k=0,1$, с помощью (5)-(6). Для упрощения выкладок предположим, что $q(x)$ и $q'(x)$ абсолютно непрерывны на $[a,\pi]$. Интегрирование по частям в (7)-(8) дает

$$2\rho d_0(\rho)=B_0\cos\rho(\pi-a)+\int_a^\pi g(t)\cos\rho(2t-\pi-a)dt-A_1\cos\rho(\pi-2a)$$

$$-\frac{hA_1\sin\rho(\pi-2a)}{\rho}+\frac{1}{2}\int\limits_{-(\pi-2a)}^{(\pi-2a)}Q_+(\xi)\cos\rho\xi\,d\xi+\frac{h}{2\rho}\int\limits_{-(\pi-2a)}^{(\pi-2a)}Q_-(\xi)\sin\rho\xi\,d\xi, \tag{12}$$

$$2\rho d_1(\rho)=B_1\sin\rho(\pi-a)+\int_a^\pi g(t)\sin\rho(2t-\pi-a)dt+A_1\sin\rho(\pi-2a)$$

$$-\frac{hA_1\cos\rho(\pi-2a)}{\rho}+\frac{1}{2}\int\limits_{-(\pi-2a)}^{(\pi-2a)}Q_+(\xi)\sin\rho\xi\,d\xi-\frac{h}{2\rho}\int\limits_{-(\pi-2a)}^{(\pi-2a)}Q_-(\xi)\cos\rho\xi\,d\xi, \tag{13}$$

где $g(x)=-q'(x)+2hq(x)$, $B_0=q(\pi)-q(a)$, $B_1=q(\pi)+q(a)$. Используя (12)-(13), находим B_0,B_1 и A_1:

$$A_1=2\lim_{m_k\to\infty}\Big(\rho_{m_k}d_1(\rho_{m_k})(\sin\alpha m_k\pi)^{-1}\Big), \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} B_1&=\lim_{n\to\infty}\Big(2\rho_{n1}d_1(\rho_{n1})-A_1\sin\rho_{n1}(\pi-2a)\Big),\ \rho_{n1}=(2n+1/2)\pi/(\pi-a),\\ B_0&=\lim_{n\to\infty}\Big(2\rho_{n0}d_0(\rho_{n0})+A_1\cos\rho_{n0}(\pi-2a)\Big),\ \rho_{n0}=2n\pi/(\pi-a),\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

где $\alpha=(\pi-2a)/(\pi-a)<1$, и m_k выбраны так, что $|\sin\alpha m_k\pi|>\delta>0$.

Так как B_0 и B_1 известны, , то мы можем найти $q(a)$ и $q(\pi)$ по формулам $q(\pi) = (B_1 + B_0)/2$ и $q(a) = (B_1 - B_0)/2$. Рассмотрим теперь функции

$$\left.\begin{aligned} d_0^*(\rho) &= 2\rho d_0(\rho) - B_0 \cos\rho(\pi - a) + A_1 \cos\rho(\pi - 2a) + \frac{hA_1 \sin\rho(\pi - 2a)}{\rho}, \\ d_1^*(\rho) &= 2\rho d_1(\rho) - B_1 \sin\rho(\pi - a) - A_1 \sin\rho(\pi - 2a) + \frac{hA_1 \cos\rho(\pi - 2a)}{\rho}. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Из (12)–(13) получаем

$$d_0^*(\rho) = \int\limits_a^\pi g(t) \cos\rho(2t - \pi - a)dt + \frac{1}{2}\int\limits_{-(\pi-2a)}^{(\pi-2a)} Q_+(\xi)\cos\rho\xi\, d\xi + \frac{h}{2\rho}\int\limits_{-(\pi-2a)}^{(\pi-2a)} Q_-(\xi)\sin\rho\xi\, d\xi,$$

$$d_1^*(\rho) = \int\limits_a^\pi g(t) \sin\rho(2t - \pi - a)dt + \frac{1}{2}\int\limits_{-(\pi-2a)}^{(\pi-2a)} Q_+(\xi)\sin\rho\xi\, d\xi + \frac{h}{2\rho}\int\limits_{-(\pi-2a)}^{(\pi-2a)} Q_-(\xi)\cos\rho\xi\, d\xi.$$

Интегрирование по частям дает

$$2\rho d_0^*(\rho) = b_0 \sin\rho(\pi - a) + \omega_0 \sin\rho(\pi - 2a) - \int\limits_{-(\pi-a)}^{(\pi-a)} g_0(\xi)\sin\rho\xi\, d\xi - \int\limits_{-(\pi-2a)}^{(\pi-2a)} G(\xi)\sin\rho\xi\, d\xi, \tag{17}$$

$$2\rho d_1^*(\rho) = b_1 \cos\rho(\pi - a) + \omega_1 \cos\rho(\pi - 2a) + \int\limits_{-(\pi-a)}^{(\pi-a)} g_0(\xi)\cos\rho\xi\, d\xi + \int\limits_{-(\pi-2a)}^{(\pi-2a)} G(\xi)\cos\rho\xi\, d\xi, \tag{18}$$

где $G(\xi) = Q'_+(\xi) - hQ_-(\xi)$, $g_0(\xi) = g_1((\xi + \pi + a)/2)/2$, $g_1(x) = g'(x)$, $b_0 = g(a) + g(\pi)$, $b_1 = g(a) - g(\pi)$, $\omega_0 = Q_+(\pi - 2a) + Q_+(-(\pi - 2a))$, $\omega_1 = Q_+(\pi - 2a) - Q_+(-(\pi - 2a))$.
Используя (17)–(18), находим b_0, b_1, ω_0 и ω_1:

$$\left.\begin{aligned} \omega_0 &= 2\lim_{m_k\to\infty}\Big(\rho_{m_k} d_0^*(\rho_{m_k})(\sin\alpha m_k\pi)^{-1}\Big), \\ \omega_1 &= 2\lim_{r_k\to\infty}\Big(\rho_{r_k} d_1^*(\rho_{r_k})(\cos\alpha(2r_k + 1/2)\pi)^{-1}\Big), \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

$$\left.\begin{aligned} b_0 &= \lim_{n\to\infty}\Big(2\rho_n^0 d_0^*(\rho_n^0) - \omega_0 \sin\rho_n^0(\pi - 2a)\Big),\ \rho_n^0 = (2n + 1/2)\pi/(\pi - a), \\ b_1 &= \lim_{n\to\infty}\Big(2\rho_n^1 d_1^*(\rho_n^1) - \omega_1 \cos\rho_n^1(\pi - 2a)\Big),\ \rho_n^1 = 2n\pi/(\pi - a), \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

где r_k выбраны так, что $|\cos\alpha(2r_k + 1/2)\pi| > \delta > 0$.

Так как b_0 и b_1 известны, то мы можем найти $g(a)$ и $g(\pi)$ по формулам $g(\pi) = (b_0 - b_1)/2$ и $g(a) = (b_0 + b_1)/2$, и следовательно, можем найти

$q'(a)$ и $q'(\pi)$ по формулам $q'(a) = -g(a) + 2hq(a)$, $q'(\pi) = -g(\pi) + 2hq(\pi)$. Построим теперь функции

$$\left.\begin{aligned} D_0(\rho) &= 2\rho d_0^*(\rho) - b_0 \sin\rho(\pi - a) - \omega_0 \sin\rho(\pi - 2a), \\ D_1(\rho) &= 2\rho d_1^*(\rho) - b_1 \cos\rho(\pi - a) - \omega_1 \cos\rho(\pi - 2a). \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Из (17)–(18) получаем

$$D_0(\rho) = -\int\limits_{-(\pi-a)}^{(\pi-a)} R(\xi)\sin\rho\xi\, d\xi, \quad D_1(\rho) = \int\limits_{-(\pi-a)}^{(\pi-a)} R(\xi)\sin\rho\xi\, d\xi, \tag{22}$$

$$R(\xi) = g_0(\xi) + G(\xi), \tag{23}$$

и $G(\xi) \equiv 0$ при $\xi \notin (-(\pi-2a), \pi-2a)$. Используя (22), построим функцию $R(\xi)$. Так как $G(\xi) \equiv 0$ при $\xi \notin (-(\pi - 2a), \pi - 2a)$, то мы можем найти $g_0(\xi)$ при $\xi \notin (-(\pi - 2a), \pi - 2a)$ по формуле $g_0(\xi) = R(\xi)$. Это дает

$$q''(x) - 2hq'(x) = -2R_1(x), \quad x \in [a, 3a/2] \cup [\pi - a/2, \pi], \tag{24}$$

где $R_1(x) := R(2x - \pi - a)$. Так как $q(a), q'(a), q(\pi), q'(\pi)$ известны, то мы можем построить потенциал $q(x)$ при $x \in [a, 3a/2] \cup [\pi - a/2, \pi]$, решая линейное уравнение (24).

Далее, в силу (23) имеем

$$q''(x) - 2hq'(x) = -2R_1(x) + Q_1'(x + a/2) - Q_2'(x - a/2) + Q_3'(x - a/2)$$

$$-2hQ_1(x+a/2)+2hQ_2(x-a/2)+2hQ_3(x-a/2), \ x \in [3a/2, \pi-a/2]. \tag{25}$$

Так как $q(x)$ известна при $x \in [a, 3a/2] \cup [\pi - a/2, \pi]$, то соотношение (25) является линейным относительно $q(x)$. В частности, если $a \in [2\pi/5, \pi/2)$, то правая часть в (25) является известной функцией. Решая линейное уравнение (25), находим $q(x)$ при $x \in [3a/2, \pi - a/2]$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Задание спектров* $\{\mu_{nj}\}_{n\geq 0}$, $j = 1, 2$, *однозначно определяет потенциал* $q(x)$ *и коэффициенты* h, H_1, H_2. *Решение обратной задачи может быть найдено по следующему алгоритму:*

1) строим $\mathcal{P}_j(\lambda)$, $j = 1, 2$, *согласно (3);*

2) находим $H_1 - H_2$ *посредством (2);*

3) вычисляем $\Delta_0(\lambda)$, *используя (4);*

4) Ннаходим A *и* h *с помощью (5), например, по формулам (10)–(11);*

5) вычисляем H_1 *и* H_2*, используя (2);*

6) строим функцию $\Delta_1(\lambda)$ *посредством (4);*

7) находим функции $d_j(\rho)$, $j = 0, 1$, *с помощью (5) и (6);*

8) вычисляем B_0, B_1 *и* A_1*, используя (12)-(13), например, согласно (14)–(15);*

9) находим $q(\pi) = (B_1 + B_0)/2$ *и* $q(a) = (B_1 - B_0)/2$*;*

10) строим функции $d_j^*(\rho)$, $j = 0, 1$, *по формуле (16);*

11) вычисляем ω_0, ω_1, b_0 *и* b_1*, используя (17)–(18), например, посредством (19)–(20);*

12) находим $g(a) = (b_0 + b_1)/2$ *и* $g(\pi) = (b_0 - b_1)/2$*;*

13) вычисляем $q'(a) = -g(a) + 2hq(a)$ *и* $q'(\pi) = -g(\pi) + 2hq(\pi)$*;*

14) строим функции $D_j(\rho)$, $j = 0, 1$, *согласно (21);*

15) находим $R(\xi)$*, используя (22);*

16) вычисляем потенциал $q(x)$ *при* $x \in [a, 3a/2] \cup [\pi - a/2, \pi]$*, решая уравнение (24);*

17) вычисляем потенциал $q(x)$ *при* $x \in [3a/2, \pi - a/2]$*, используя (25).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Freiling G., Yurko V. A.* Inverse problems for differential operators with a constant delay // Applied Mathematics Letters. 2012. Vol. 25, № 11. P. 1999–2004.

[2] *Vladičić V. Pikula M.* An inverse problem for Sturm–Liouville-type differential equation with a constant delay // Sarajevo J. Math. 2016. Vol. 12 (24), № 1. P. 83–88.

[3] *Buterin S. A., Yurko V. A.* An inverse spectral problem for Sturm–Liouville operators with a large constant delay // Analysis and Mathematical Physics. 2019. Vol. 9, № 1. P. 17–27.

[4] *Bondarenko N. P., Yurko V. A.* An inverse problem for Sturm–Liouville differential operators with deviating argument // Applied Mathematics Letters. 2019. Vol. 83. P. 140–144.