УДК 517.52

ОЦЕНКИ СНИЗУ ДЛЯ ЯДЕР ДИРИХЛЕ ПО ОБОБЩЁННЫМ СИСТЕМАМ ХААРА И УОЛША

В. И. Щербаков (гор. Жуковский Московской области, Россия)
kafmathan@mail.ru (для В. И. Щербакова)

Получена оценка снизу для ядер Дирихле по системам Прайса и обобщённым системам Хаара относительно S- и V-мажорант (V-мажоранта — это определённая Н. Я. Виленкиным функция $\left[\frac{1}{t}\right]$), которые оказались различными для простых и составных p_n. Показано, что ранее полученная оценка сверху ядер Дирихле, вообще говоря, неулучшаемая; она не может быть улучшена в случае простых p_n с $\sup\limits_n p_n = \infty$.

Ключевые слова: абелева группа, модифицированный отрезок $[0, 1]$ и непрерывность на нём, системы Прайса и Виленкина, обобщённые системы Хаара, ядра Дирихле и их S- и V-мажоранты.

LOWER ESTIMATES OF DIRICHLET'S KERNELS BY GENERALIZED HAARS AND WALSH'S SYSTEMS

V. I. Shcherbakov (Zhukovsky of Moscow district, Russia)
kafmathan@mail.ru (for V. I. Sherbakov)

Lower bound estimations for Dirichlet's kernels on Price's and generalized Haar's systems regarding S- and V-majorants are received (V-majorant is a function $\frac{1}{t}$, obtained by N. Ja. Vilenkin) are obtained. These estimations turned out to be different for a prime and composite p_n. It is proved that a previously received estimations cannot be improved in general and it cannot be improved in the case of prime unbounded p_n.

Ключевые слова: Abelian group; modification segment $[0, 1]$ and a continuous functions on it, Price's and Vilenkin's systems, a generalized Haar's systems, a Dirichlet's kernels and it's S- and V-majorants.

Пусть $p_0 = 1, \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — целочисленная последовательность с $p_n \geq 2$; $m_n = \prod\limits_{k=0}^{n} p_k$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Всякое натуральное число n единственным образом представимо в виде

$$n = \sum_{k=0}^{s} a_k m_k = a_s m_s + n', \qquad (1)$$

где a_k, s и n' — целые с $0 \leq a_k < p_{k+1}$, $1 \leq a_s < p_{s+1}$, $0 \leq n' < m_s$, а любое действительное число $x \in [0, 1]$ можно разложить по формуле

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{m_n}, \text{ где } x_n - \text{ целые с } 0 \leq x_n < p_n. \qquad (2)$$

Если x — p_n-иррационально, а также $x = 0$ или $x = 1$, то его представление в виде равенства (2) единственно; для $x = \frac{l}{m_n}$ имеется два его разложения по формуле (2), одно из которых — конечно ($x_k = 0$ при $k > n$), которое мы обозначим за $\frac{l}{m_n}$, а другое — бесконечно ($x_k = p_k - 1$ для $k > n$); его будем записывать как $\frac{l}{m_n}$. Таким образом, отрезок $[0, 1]$ перешел в абелеву группу последовательностей $G = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} | x_n = 0, 1, \dots p_n - 1\}$ с операцией $\dot{+}$ покоординатного сложения по модулю p_n и обратной операцией $\dot{-}$.

Положив $\frac{l}{m_n} - < \frac{l}{m_n}$, с $[0, 1]$ на G переносится упорядочивание точек, и, следовательно, на G определён отрезок $[a, b] = \{x \in G \mid a \leq x \leq b\}$. А так как группа G и отрезок $[0, 1]$ различаются лишь на счётное множество точек, то с $[0, 1]$ на G переносятся понятия меры и ннтеграла Лебега, а токже ортогональные и ортонормированные системы функций. Рассмотрим следующие ортонормированные системы функций:

1. $\Psi = \{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty} : \psi_0(x) \equiv 1;\ \psi_{m_k}(x) = \exp \frac{2i\pi x_{k+1}}{p_{k+1}}$ и $\psi_n(x) = \prod\limits_{k=0}^{s} (\psi_{m_k}(x))^{a_k}$, а также

2. $\Gamma = \{\gamma_n(x)\}_{n=0}^{\infty} : \gamma_0(x) \equiv 1;$

$$\gamma_{m_k}(x) = \begin{cases} \sqrt{m_k} \exp(\frac{2i\pi x_{k+1}}{p_{k+1}}) & \text{, если } x \in G_k \\ 0 & \text{, для } x \in G \setminus G_k \end{cases}$$

$(k = 0, 1, 2, \dots)$ и $\gamma_n(x) = \gamma_{a_s m_s + n'}(x) = (\gamma_{m_s}(x \dot{-} (\frac{n'}{m_s})))^{a_s}$, где числа s, a_s и n' — определены равенством (1) , и $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in G$.

Систему $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называют системой Прайса [1] (для простых p_n на нульмерной компактной абелевой группе она переходит в системы Виленкина [2]). Для $p_n \equiv p$ она становится системой Крестенсона (или Крестенсона–Леви) [3], а при $p_n \equiv 2$ — системой Уолша [4] в нумерации Пэли [5]. Пусть $D_n(x \dot{-} t) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \psi_k(x)\psi_k(t) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \psi_k(x \dot{-} t)$ $-n$-е ядро Дирихле по системе Прайса.

Систему же $\{\gamma_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, как правило, называют обобщённой системой Хаара (или системой типа Хаара). При $p_n \equiv 2$ она (на отрезке $[0, 1]$) переходит в систему Хаара [6]; для $\sup\limits_n p_n < \infty$ эта система рассматривалась (также на отрезке $[0, 1]$) Н. Я. Виленкиным [7], Б. И. Голубовым и А. И. Рубинштейном [8]; для любых p_n (тоже на отрезке $[0, 1]$) — Б. И. Голубовым [9]; на нульмерных компактных абелевых группах она исследовалась С. Ф. Лукомским [10]. Пусть $D_n(x, t) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \gamma_k(x)\gamma_k(t)$ — n-е ядро Дирихле по обобщённой системе Хаара.

Известны следующие мажоранты ядер Дирихле по системам Прайса (а также системам Виленкина) и обобщённым системам Хаара: $V(t) = m_{n+1}$ для $t \in [\frac{1}{m_{n+1}}, \frac{1}{m_n}]$ и

$$S(t) = \frac{m_n}{\sin\frac{\pi l}{p_{n+1}}}, \text{ если } t \in [\frac{l}{m_{n+1}}, \frac{l+1}{m_{n+1}}-], \text{ где } l = 1, 2, \ldots, p_{n+1}-1 \text{ и } n = 1, 2, \ldots$$

В [2] $V(t)$ названа как $[\frac{1}{t}]$, а $S(t)$ в [11] обозначена как $q(t)$.

В [2, 11] и [12] получены следующие оценки:

$$|D_n(x)| \le 2S(x) \le V(x) \text{ для всех } x \in G \setminus \{0\} \text{ и любых целых } n > 0 \text{ и}$$

$$|D_n(x,t)| \le S(x\dot{-}t) \le \frac{V(x\dot{-}t)}{2}, \text{ если } x \in G \setminus \{0\} \text{ и } n = 1, 2, \ldots.$$

В [11] также получена оценка снизу:

Теорема S. *Для всех x и t с $x\dot{-}t \in [\frac{1}{m_{n+1}}, \frac{1}{m_n}-]$ найдётся целое $j = j(x,t) = j(x\dot{-}t)$, удовлетворяющее условию $1 \le j \le p_{n+1}-1$ и такое, что выполнено неравенство*

$$|D_{jm_n}(x\dot{-}t)| \ge \frac{S(x\dot{-}t)}{2}. \qquad (3)$$

Оценку (3) можно улучшить, ибо справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. *Для любого целого $n > 0$ и при всех x и t удовлетворяющих условию $x\dot{-}t \in [\frac{1}{m_{n+1}}, \frac{1}{m_n}-]$ найдётся целое $j = j(x\dot{-}t)$ с $1 \le j \le p_{n+1}-1$ такие, что имеет место неравенство*

$$|D_{jm_n}(x,t)| = |D_{jm_n}(x\dot{-}t)| \ge \frac{\sqrt{3}}{2} S(x\dot{-}t). \qquad (4)$$

Теорема 2. *Для всякого целого $n > 0$ можно подобрать x и t с $x\dot{-}t \in [\frac{1}{m_{n+1}}, \frac{1}{m_n}-]$ и целое $j = j(x\dot{-}t)$ с $1 \le j \le p_{n+1}-1$ такие, что справедлива оценка*

$$|D_{jm_n}(x,t)| = |D_{jm_n}(x\dot{-}t)| \ge \frac{\sqrt{3}}{2\pi} V(x\dot{-}t). \qquad (5)$$

Для простых $p_{n+1} \ge 5$ неравенства (4) и (5) можно улучшить, ибо выполнены

Теорема 3. *Если число p_{n+1} простое, то для любых x и t с $x\dot{-}t \in [\frac{1}{m_{n+1}}, \frac{1}{m_n}-]$ существует целое $j = j(x\dot{-}t)$ с $1 \le j \le p_{n+1}-1$ такое, что имеет место неравенство*

$$|D_{jm_n}(x,t)| = |D_{jm_n}(x\dot{-}t)| \ge (1 - \frac{\pi^2}{8p_{n+1}^2}) S(x\dot{-}t) \text{ и} \qquad (6)$$

Теорема 4. *Для простых* p_{n+1} *существуют* x *и* t *с* $x\dot{-}t \in [\frac{1}{m_{n+1}}, \frac{1}{m_n}-]$ *и целое* $j = j(x\dot{-}t)$ *с* $1 \leq j \leq p_{n+1}-1$ *такие, что справедлива оценка*

$$|D_{jm_n}(x,t)| = |D_{jm_n}(x\dot{-}t)| \geq \frac{1}{\pi}(1 - \frac{\pi^2}{8p_{n+1}^2})V(x\dot{-}t) =$$
$$= (\frac{1}{\pi} - \frac{\pi}{8p_{n+1}^2})V(x\dot{-}t). \tag{7}$$

Отметим, что требование на то, чтобы вся последовательность $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ состояла бы только из простых чисел, в теоремах 3 и 4 не накладывается.

В случае составных p_{n+1} неравенства (6) и (7) для любых x и t с $x\dot{-}t \in [\frac{1}{m_{n+1}}, \frac{1}{m_n}-]$, вообще говоря, неверны, ибо имеет место следующая

Теорема 5. *Если* p_{n+1} *кратно 3, то оценки (4) и (5), вообще говоря, неулучшаемы.*

Для составных p_{n+1} имеют место следующие утверждения:

Теорема 6. *Если* p_{n+1} *является целой степенью двойки* ($p_{n+1} = 2^k$), *то для любых* x *и* t *с* $x\dot{-}t \in [\frac{1}{m_{n+1}}, \frac{1}{m_n}-]$ *можно подобрать целое* $j = j(x,t) = j(x\dot{-}t)$, *удовлетворяющие условию* $1 \leq j \leq p_{n+1}-1$, *такие, что выполнено равенство*

$$|D_{jm_n}(x,t)| = |D_{jm_n}(x\dot{-}t)| = S(x\dot{-}t);$$

Теорема 7. *В случае, когда* $p_{n+1} = 2^k$ *при некотором целом* $k > 0$ *найдутся* x, t *с* $x\dot{-}t \in [\frac{1}{m_{n+1}}, \frac{1}{m_n}-]$ *и* $j \in \{1, 2, \ldots, p_{n+1}-1\}$, *при которых справедливо равенство*

$$|D_{jm_n}(x,t)| = |D_{jm_n}(x\dot{-}t)| = \frac{V(x\dot{-}t)}{2\pi}.$$

В случае, когда p_{n+1} не является целой степенью двойки, верны следующие теоремы:

Теорема 8. *для всех* x *и* t *с* $x\dot{-}t \in [\frac{1}{m_{n+1}}, \frac{1}{m_n}-]$ *найдётся целое* $j = j(x,t) = j(x\dot{-}t)$ *такое, что имеет место неравенство*

$$|D_{jm_n}(x,t)| = |D_{jm_n}(x\dot{-}t)| \geq (1 - \frac{\pi^2}{8q_{n+1}^2})S(x\dot{-}t),$$

где q_{n+1} *— наименьший и отличный от единицы положительный нечётный делитель числа* p_{n+1}.

Теорема 9. *Существуют* x *и* t *с* $x\dot{-}t \in [\frac{1}{m_{n+1}}, \frac{1}{m_n}-]$ *а также* $j = j(x,t) = j(x\dot{-}t) \in \{1, 2, \ldots, p_{n+1} - 1\}$ *такие, что справедлива оценка*

$$|D_{jm_n}(x,t)| = |D_{jm_n}(x\dot{-}t)| \geq \frac{1}{\pi}(1 - \frac{\pi^2}{8q_{n+1}^2})V(x\dot{-}t) = (\frac{1}{\pi} - \frac{\pi}{8q_{n+1}^2})V(x\dot{-}t),$$

где q_{n+1} *определено в теореме 8.*

Отметим, что q_{n+1} должно быть простым (как **наименьший** и **отличный от единицы** *положительный* **нечётный делитель**.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Price J. J.* Certain groups of orthonormal step functions // Canad. J. Math., 1957. Vol. 9, № 3. P. 413–425.

[2] *Виленкин Н. Я.* Об одном классе полных ортонормальных систем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1947. Т. 11, № 4. С. 363–400.

[3] *Chrestenson H. E.* A class of generalized Walsh functions // Pac. J. Math. 1955. Vol. 5, № 1. P. 17–31.

[4] *Walsh J. L.* A constructive of normal orthonormal functions // Amer. J. Math. 1923. Vol. 49, № 1. P. 5–24.

[5] *Paley R. E. A. C.* A remarkable series of orthonormal functions // Proc. of London Math. Soc. 1932. Vol. 36. P. 241–264.

[6] *Haar A.* Zur Theorie des Orthogonalischen Functionsysteme // Math. An. 1910. Vol. 69. P. 331–371.

[7] *Качмаж С. Штейнгауз Г.* Теория ортгональных рядов / дополнения Н. Я. Виленкина. М. : Физматгиз, 1958. § 1, п. 6. С. 475–479.

[8] *Голубов Б. И. Рубинштейн А. И.* Об одном классе систем сходимости // Матем. сб. Нов. сер. 1966. Т. 71, вып. 1. С. 96–115.

[9] *Голубов Б. И.* Об одном классе полных ортонормальных систем // Сиб. матем. журн. 1968. Т. IX, № 2. С. 297–314.

[10] *Лукомский С. Ф.* О рядах Хаара на компактной нульмерной группе // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 1. С. 24–29.

[11] *Щербаков В. И.* О поточечной сходимости рядов Фурье по мультипликативным системам // Вестн. МГУ. Сер. матем. 1983. № 2. С. 37–42.

[12] *Щербаков В. И.* Мажоранты ядер Дирихле и поточечные признаки Дини для бобщённых систем Хаара // Матем. заметки. 2017. Т. 101, № 3. С. 446–473.