УДК 517.652

К РЕШЕНИЮ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ЭРМИТА ДЛЯ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В. В. Шустов (Москва, Россия)
vshustov@gosniias.ru

Рассмотрена задача о построении интерполяционного многочлена Эрмита для функции n переменных при условии, что в точках регулярной многомерной сетки узлов заданы матрицы производных этой функции. В данной постановке имеет место теорема о существовании многочлена Эрмита многих переменных, который удовлетворяет заданным условиям, наложенным на значения его производных в узловых точках. Указывается соответствие полученной общей формулы известным частным решениям интерполяционной задачи Эрмита.

Ключевые слова: интерполяционный многочлен Эрмита, многомерная интерполяция, формула Тейлора, функция многих переменных.

TO THE SOLUTION OF HERMITE INTERPOLATION PROBLEM FOR THE FUNCTION OF MANY VARIABLES

V. V. Shustov (Moscow, Russia)
vshustov@gosniias.ru

The problem of constructing the Hermite interpolation polynomial for a function of n variables is considered under the condition that derivative's matrices this function are given at the points of a regular multidimensional nodes grid. On this condition, there is a theorem on the existence Hermite polynomial of many variables, which satisfies the given conditions imposed on the values of its derivatives at the nodal points. The correspondence of the obtained general formula to the known particular solutions of Hermite interpolation problem is indicated.

Keywords: Hermite interpolation polynomial, multidimensional interpolation, Taylor formula, function of many variables.

Введение

Известно решение интерполяционной задачи Эрмита о построении многочлена по значениям функции и ее производных, заданным в точках сетки узлов, для случая функции одной переменной, представленное, например, в [1, с. 163] или [2], а также полученное более простым способом в [3].

Можно отметить частный вид этих многочленов, когда производные функции заданы только на концах отрезка [4], и обобщение задачи интерполяции двухточечными многочленами Эрмита на случай функции n переменных, представленное в [5].

Для интерполяции функций одной переменной разработан ряд методов, основанных на использовании многочленов Лагранжа, сплайн-функций, многочленов Бернштейна, реализованных в кривых Безье, B-сплайнов и другие. Задача многомерной интерполяции рассматривались в ряде работ, там же отмечены трудности, возникающие при решении этой задачи [1, с. 181]. Подход, который сводит многомерную интерполяцию к последовательности одномерных, возможен, но его сложность и трудоемкость значительно возрастают с увеличением числа переменных.

Более перспективным представляется расширение постановки общей интерполяционной задачи Эрмита с функции одной переменной до функции многих переменных. При этом рассматривается случай, когда многомерная сетка узловых точек является регулярной и, соответственно, представляется тензорным произведением одномерных сеток по каждой переменной. Далее используются представления и терминология, используемые в [6], в частности, то, что производные функции многих переменных представляются в общем случае многомерными матрицами частных производных.

Задача многомерной интерполяции решается при условии, когда в узлах регулярной пространственной сетки заданы n — мерные матрицы производных до порядка m включительно. В данной постановке имеет место следующая теорема.

Теорема и ее частные случаи

Теорема. *Пусть в n-мерной области $\mathbf{D}^n \subset \mathbf{E}^n$* введена регулярная сетка узлов $\mathbf{C}$

$$C = \left\{x^1_{i^1}\right\}^{l_1}_{i^1=0} \times \ldots \times \{x^n_{i^n}\}^{l_n}_{i^n=0}\,,$$

являющаяся декартовым произведением одномерных сеток вида $C^s = [x^s_0, x^s_1, ...x^s_{l_n}]$, $s = 1, 2...n$. Индекс вверху s означает номер координаты, индекс внизу i означает номер узла. Пусть в узлах сетки заданы значения функции и всех ее частных производных до порядка m включительно

$$\nabla^{(j)} f_{i^1,...,i^n} = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}\right)^{(j)} f_{i^1,...,i^n}, \qquad j = 0, 1, ...m.$$

Тогда существует многочлен $H(x)$ от n переменных, $x = (x^1, \ldots, x^n)$, определенный в области $\boldsymbol{D}^n$, удовлетворяющий условиям, наложенным на значения функции и ее производных в узлах сетки

$$\nabla^{(j)} H(x^1_{i^1}, ...x^n_{i^n},) = \nabla^{(j)} f_{i^1,...,i^n}, i^s = \{0, 1, \ldots,\ l_s\}, s\ = 1, 2, \ldots, n$$

и который может быть представлен в виде

$$H(x) = \sum_{i^1=0}^{l_1} \cdots \sum_{i^n=0}^{l_n} \sum_{j=0}^{m} \frac{\varphi^m_j(x^1, ..., x^n)}{j!} (\Delta x * \nabla)^{(j)} f_{i^1,...,i^n},$$

где функции влияния $\varphi_j^m(x^1, ..., x^n)$ *определены соотношением*

$$\varphi_j^m(x^1, ..., x^n) = \omega_{i^1,...,i^n}(x^1, ..., x^n) \sum_{k=0}^{m-j} \frac{1}{k!} (\Delta x * \nabla)^{(k)} \left(\frac{1}{\omega_{i^1,...,i^n}(x^1, ..., x^n)} \right),$$

выражение$(\Delta x * \nabla)^{(j)} f_{i^1,,...,i^n}$*есть соответствующий член многочлена Тейлора для функции n переменных* [6, с. 10], *который представляется формулой*

$$(\Delta x * \nabla)^{(j)} f_{i^1,...,i^n} = \left((x^1 - x^1_{i^1}) \frac{\partial}{\partial x^1} + ... + (x^n - x^n_{i^n}) \frac{\partial}{\partial x^n} \right)^{(j)} f_{i^1,...,i^n},$$

выражение $\omega_{i^1,...,i^n}(x^1, ..., x^n)$*определяется формулой*

$$\omega_{i^1,...,i^n}(x^1, ..., x^n) = \frac{\Omega_{i^1}(x)}{(x^1 - x^1_{i^1})^{m+1}}, ..., \frac{\Omega_{i^n}(x)}{(x^n - x^n_{i^n})^{m+1}}, \text{ где}$$

$$\Omega_{i^s}(x) = \prod_{t^s=0}^{l_s} (x^s - x^s_{t^s})^{m+1}, s = 1, 2...n.$$

При использовании обозначений для вектора переменных $x = x^1, \ldots, x^n)$, *мультииндекса узловой точки* $i = (i^1, \ldots, i^n)$ *и дифференциалов функции* $d^j f(x)$ *высших порядков [7, с. 317] как*

$$d^j f(x) = \left((x^1 - x^1_{i^1}) \frac{\partial}{\partial x^1} + ... + (x^n - x^n_{i^n}) \frac{\partial}{\partial x^n} \right)^{(j)} f(x)$$

формула для интерполяционного многочлена Эрмита $H(x)$ *для функции n переменных может быть записана в более компактном и обозримом виде:*

$$H(x) = \sum_{i^1=0}^{l_1} ... \sum_{i^n=0}^{l_n} \sum_{j=0}^{m} \left\{ \frac{d^j f_i}{j!} \left(\omega_i(x) \sum_{k=0}^{m-j} \frac{1}{k!} d^k \left[\frac{1}{\omega_i(x)} \right] \Bigg|_{x=x_i} \right) \right\},$$

где

$$\omega_i(x) = \prod_{s=1}^{n} \left[\frac{1}{(x^s - x^s_{i^s})^{m+1}} \prod_{t^s=0}^{l_s} (x^s - x^s_{t^s})^{m+1} \right].$$

Идея доказательства теоремы основана, так же, как и в [3] на использовании формулы Тейлора применительно к функции многих переменных.

Частный случай 1. Пусть значения функции и ее производных заданы только в одной точке $x_0 = (x_0^1, ...x_0^n,)$, т.е сетка узлов **C** вырождается в единственную точку. Тогда функция влияния $\omega_{i^1,...,i^n}(x^1, ..., x^n) = 1$ и многочлен Эрмита для функции многих переменных превращается в многочлен Тейлора функции многих переменных:

$$H(x) = T(x) = \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!}(\Delta x * \nabla)^{(j)} f(x_0).$$

Частный случай 2. Пусть задана функция только одной переменной ($n = 1$). В этом случае полученная формула для интерполяционного многочлена Эрмита $H(x)$, для функции одной переменной принимает вид

$$H(x) = \sum_{i=0}^{l} \omega_i(x) \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{m-j} f_i^{(j)} \frac{(x - x_i)^{j+k}}{j!k!} \left[\frac{1}{\omega_i(x)}\right]_{x=x_i}^{(k)},$$

которая с точностью до обозначений соответствует формуле, приведенной в [1, с. 172] для одинакового порядка m производных в узлах сетки

$$m_i = m, \quad i = 0, 1...l.$$

С развитием электронно-вычислительной техники многомерные многочлены Эрмита могут использоваться для интерполяции сеточных функций и для аппроксимации функций многих переменных, обладающих требуемым уровнем гладкости. Отметим, что интерполяционные многочлены Эрмита многих переменных дают явное выражение для приближающей функции, не требуя решение уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений. Т. 1 М. : Физматлит, 1962. 464 с.

[2] *Spitzbart A.* A generalization of Hermite's interpolation formula // Amer. Math. Monthly. 1960. Vol. 67. P. 42–46.

[3] *Шустов В. В.* Простое решение интерполяционной задачи Эрмита // Международный научно-исследовательский журнал. 2018. Т. 70, № 4. С. 146–151.

[4] *Шустов В. В.* О приближении функций двухточечными интерполяционными многочленами Эрмита // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 7. С. 1091–1108.

[5] *Шустов В. В.* К задаче многомерной интерполяции функций двухточечными многочленами Эрмита от n переменных // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы международ. Сарат. зимн. шк. Саратов : Научная книга, 2018. С. 361–364.

[6] *Кудрявцев Л. Д.* Математический анализ : в 2 т. Т. 2 М. : Высшая школа, 1981. 584 с.

[7] *Кудрявцев Л. Д.* Математический анализ : в 2 т. Т. 1 М. : Высшая школа, 1970. 590 с.