УДК 517.9

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ ИЗ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ЛЕБЕГА И СОБОЛЕВА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ СРЕДНИМИ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА

Т. Н. Шах-Эмиров (Махачкала, Россия)
tadgius@gmail.com

В работе иследованы аппроксимативные свойства средних Валле Пуссена тригонометрических сумм Фурье для функций из весовых пространств Соболева с переменным показателем. Получены оценки приближения функций из этих пространств средними Валле Пуссена.

Ключевые слова: весовые пространства Лебега с переменным показателем, пространства типа Соболева, средние Валле Пуссена.

ON APPROXIMATION OF FUNCTIONS IN WEIGHTED VARIABLE EXPONENT LEBESGUE AND SOBOLEV SPACES BY DE LA VALLEE-POUSSIN MEANS

T. N. Shakh-Emirov (Makhachkala, Russia)
tadgius@gmail.com

We study the approximative propeties of the de la Vallee-Poussin mean for the trigonometric Fourier sums for the functions from weighted variable exponent Sobolev spaces. The Estimates of the approximation for functions from these spaces by de la Valle-Poussin means are obtained.

Keywords: weighted variable exponent Lebesgue spaces, Sobolev type spaces, de la Valee-Poussin means.

Введение

Пусть $p = p(x)$ — измеримая 2π-периодическая функция такая, что $p(x) \geq 1$ почти всюду, $w = w(x)$ — суммируемая неотрицательная почти всюду положительная 2π-периодическая функция. Весовым пространством Лебега с переменным показателем $L^{p(x)}_{2\pi,w}$ назовем множество 2π-периодических измеримых функций, для которых

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^{p(x)} w(x)dx < \infty.$$

Как показано в [1], норму в пространстве $L^{p(x)}_{2\pi,w}$ можно определить следующим образом

$$\|f\|_{p(\cdot),w} = \|f\|_{p(\cdot),w}([-\pi,\pi]) = \inf\left\{\alpha > 0 : \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{f(x)}{\alpha}\right|^{p(x)} w(x)dx \leq 1\right\}.$$

Рассмотрим в $L^{p(x)}_{2\pi,w}$ подпространство $W^{r,p(x)}_{2\pi,w}$ из $r-1$-раз непрерывно дифференциируемых функций $f(x)$, для которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на $[-\pi,\pi]$, а $f^{(r)}(x)\in L^{p(x)}_{2\pi,w}$. В настоящей работе исследуются аппроксимативные свойства средних Валле Пуссена тригонометрических сумм Фурье для функций из $W^{r,p(x)}_{2\pi,w}$. Напомним их определение.

Пусть $f(x)$ – интегрируемая на $[-\pi,\pi]$ 2π-периодическая функция,

$$a_k=\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ktdt,\ \ b_k=\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ktdt$$

— коэффициенты Фурье,

$$S_n(f,x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx+b_k\sin kx$$

— частичная сумма ряда Фурье. Средние Валле Пуссена определяются следующим образом

$$V^n_m(f,x)=\frac{1}{m+1}[S_n(f,x)+\ldots+S_{n+m}(f,x)].$$

Основной результат

Для формулировки результата нам потребуется наложить некоторые ограничения на переменные показатели и весовые функции. Через $\mathcal{P}_{2\pi}$ обозначим класс 2π-периодических переменных показателей, для которых выполнено условие Дини–Липшица

$$|p(x)-p(y)|\ln\frac{2\pi}{|x-y|}\le c,\ \ x,y\in[-\pi,\pi].$$

Пусть $E=[-\pi,\pi]$, $E_1=\{x\in E: p(x)=1\}$, $E_2=E\setminus E_1$. Через $\mathcal{H}(E,p)$ обозначим класс весов, удовлетворяющих условиям

$$w(x)\ge C_1(w)>0 \text{ для почти всех } x\in E_1,$$

$$\|w^{-\frac{1}{p(\cdot)}}\|_{p(\cdot),1}(E_2)<\infty,\ \ \frac{1}{p(x)}+\frac{1}{p'(x)}=1,\ \ x\in E_2.$$

В [2] показано, что $f(x)\in L^{p(x)}_{2\pi,w}$ — суммируемая функция, если $w(x)\in\mathcal{H}(E,p)$. Таким образом, для $f(x)\in L^{p(x)}_{2\pi,w}$ можно определить функцию Стеклова

$$s_h(f)=s_h(f,x)=\frac{1}{h}\int\limits_0^h f(x+t)dt.$$

Ввиду того, что (см. [3])

$$\|s_h(f)\|_{p(\cdot),w} \le c(p,w)\|f\|_{p(\cdot),w},$$

можно показать, что

$$\lim_{h\to 0}\|f - s_h(f)\|_{p(\cdot),w} = 0.$$

назовем модулем непрерывности величину

$$\Omega(f,0)_{p(\cdot),w} = 0,\ \Omega(f,\delta)_{p(\cdot),w} = \sup_{0<h<\delta}\|f - s_h(f)\|_{p(\cdot),w},$$

а через $E_n(f)_{p(\cdot),w}$ обозначим величину наилучшего приближения функции $f(x) \in L^{p(x)}_{2\pi,w}$ тригонометрическими полиномами $T_n(x)$ порядка n

$$E_n(f)_{p(\cdot),w} = \inf_{T_n}\|f - T_n\|_{p(\cdot),w}.$$

Далее, пусть $N = \left[\frac{1}{h}\right]$, где $[a]$ – целая часть числа a, $\lambda = \frac{1}{N}$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$x_k = (k\lambda - 1)\pi,\ \Delta_k(\lambda) = [x_k, x_{k+1}],$$

$$\tilde{\Delta}_k(\lambda) = \Delta_{k-1}(\lambda) \cup \Delta_k(\lambda) \cup \Delta_{k+1}(\lambda)$$
$$p_k = \underline{p}(\tilde{\Delta}_k(\lambda)) = ess \inf_{x\in\tilde{\Delta}_k(\lambda)} p(x).$$

Нам потребуются следующие системы отрезков

$$\mathfrak{B}^1_\varepsilon = \{\Delta_k(\lambda) : p_k = 1, |\Delta_k(\lambda)| < \varepsilon\}_{k\in\mathbb{Z}},$$

$$\mathfrak{B}^{p(\cdot)}_\varepsilon \left\{\tilde{\Delta}_k(\lambda) : p_k > 1, |\tilde{\Delta}_k(\lambda)| < 3\varepsilon\right\}_{k\in\mathbb{Z}}.$$

Основным результатом является следующая

Теорема 1. *Пусть* $p = p(x) \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $w(x) \in \mathcal{H}(E,p)$, $r \ge 1$ $f \in W^{r,p(x)}_{2\pi,w}$, $b > 0$, $n \le bm$,

$$\sup_{B\in\mathfrak{B}^1_\varepsilon}\frac{1}{|B|}\int\limits_B w(x)dx \le c(p,w),$$

$$\sup_{B\in\mathfrak{B}^{p(\cdot)}_\varepsilon}\left(\frac{1}{|B|}\int\limits_B w(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int\limits_B w(x)^{-\frac{1}{\underline{p}(B)-1}}dx\right)^{\underline{p}(B)-1} \le c(p,w),$$

Тогда имеют место следующие оценки

$$\|f - V^n_m(f)\|_{p(\cdot),w} \le \frac{c_r(b,p,w)}{(n+1)^r}E_n(f^{(r)})_{p(\cdot),w},$$

$$\|f - V_m^n(f)\|_{p(\cdot),w} \leq \frac{c_r(b,p,w)}{(n+1)^r} \Omega \left(f^{(r)}, \frac{1}{n+1} \right)_{p(\cdot),w}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Шарапудинов И. И.* О топологии пространства $L^{p(t)}([0,1])$ // Матем. заметки. 1979. Т. 26, № 4. С. 613–632.

[2] *Магомед-Касумов М. Г.* Базисность системы Хаара в весовых пространствах Лебега с переменным показателем // Владикавказский математический журнал. 2014. Т. 16, № 3. С. 38–46.

[3] *Шах-Эмиров Т. Н.* О равномерной ограниченности некоторых семейств интегральных операторов свертки в весовых пространствах Лебега с переменным показателем // Известия Сарат. ун-та. Нов. Сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 4(1). С. 422–427.