УДК 517.53

О СЛАБОЙ ОБРАТИМОСТИ В ВЕСОВЫХ L^p-ПРОСТРАНСТВАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ТИПА ФОКА[1]

Ф. А. Шамоян (Саратов, Россия)
shamoyanfa@yandex.ru

В работе получено описание слабо обратимых элементов в весовых L^p-пространствах целых функций типа Фока.

Ключевые слова: целые функции, пространство Фока, линейные непрерывные функционалы, проблема Ватсона, весовая полиномиальная аппроксимация.

ON WEAK INVERTIBILITY IN L^p-WEIGHTED SPACES OF ENTIRE FUNCTIONS OF THE FOCK TYPE SPACES[1]

F. A. Shamoyan (Saratov, Russia)
shamoyanfa@yandex.ru

A description of weakly reversible elements in L^p-weighted spaces of entire functions of the Fock type spaces is obtained in this work.

Keywords: entire functions, the Fock type spaces, continuous linear functionals, the Watson problem, weighted polynomial approximation.

Пусть $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $H(\mathbb{C})$ — множество всех целых функций и пусть $R_+ = \{x \in R : x \geq 0\}$. Для любых σ, $\alpha \in R_+$, $p > 0$, введём в рассмотрение следующее весовое пространство целых функций:

$$F^p_{\sigma,\alpha} = \left\{ f \in H\left(C\right) : \|f\|_{F^p_{\sigma,\alpha}} = \left(\int_0^{+\infty} e^{-\sigma r^\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f\left(re^{\theta}\right) \right|^p d\theta dr \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\},$$

при $p = 2$, $\alpha = 2, \sigma = \frac{1}{2}$ пространство $F^2_{1,\frac{1}{2}}$ совпадает с классическим пространством Фока (см. [1]), а при $p = 2$, σ, $\alpha > 0$ эти пространства были введены и изучены М. М. Джрбашяном в работах [2], [3]. В дальнейшем пространства $F^2_{\sigma,\alpha}$ и связанное с ним уравнение свёртки были введены в работах В. В. Напалкова и его учеников (см. [4]).

Пусть P — множество всех алгебраических многочленов от z, X — некоторое пространство целых функций $P \subset X$, причем P составляет всюду плотное множество в X.

Предположим, что $f \in X$, при этом для произвольного многочлена $p \in P$, $pf \in X$. Скажем, что функция f слабо обратима в пространстве X, если существует последовательность многочленов p_n, $n = 1, 2, ...$, таких что $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n f = 1$, причем сходимость имеет место в топологии пространства X.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, научный проект №17-51-15005-НЦНИ

[1]The work was financially supported by Russian Foundation for Fundamental Research (project 17-51-15005).

Описание слабо обратимых элементов в конкретных функциональных пространствах тесно связано с широким кругом задач нескольких дисциплин: от теории дифференциальных операторов и их обобщений до абстрактного гармонического анализа (см. [5, 6]).

В работе устанавливается, что функция $f \in F^p_{\sigma,\alpha}$ слабо обратима в $F^p_{\sigma,\alpha}$ тогда и только тогда, когда $f(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$, при этом получено полное описание таких функций. Также в статье строится пространство типа Фока, в котором существуют сильно обратимые функции, не обладающие слабой обратимостью.

Основными результатами работы являются следующие утверждения:

Теорема 1. *Пусть* $0 < p < +\infty$, $0 < \alpha, \sigma < +\infty$, $f \in H(\mathbb{C})$, $f(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$. *Тогда*

1. *если* $\alpha \overline{\in} N$, *то следующие условия равносильны*

   i) $f \in F^p_{\sigma,\alpha}$,

   ii)
$$f(z) = \exp(h(z)),\ h(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k,\ z \in \mathbb{C},\ n < \alpha \qquad (*)$$

2. *если* $\alpha = n \in N$, $f \in F^p_{\sigma,\alpha}$, *то* f *имеет вид (*), где* $n \leq \alpha$, *причем, если* $\alpha = n$, $n \leq 2$, *то* $f \in F^p_{\sigma,\alpha}$ *тогда и только тогда, когда* $|a_n| < \frac{\sigma}{p}$, *если же* $n > 2$, *то возможен и случай* $n = \frac{\sigma}{p}$;

3. *функция* $f \in F^p_{\sigma,\alpha}$ *тогда и только тогда слабо обратима, когда* $f(z)$ *допускает представление (*), при чем* $|a_n| < \frac{\sigma}{p}$.

Следующая теорема уточняет последнее утверждение теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть* $p, \sigma, \alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus 0$, f *— целая функция, представленная в виде (*),*

$$\psi(x) = \left(\sigma - |a_n| p - \frac{b_{n-1} p}{x^{1/n}} - \varepsilon(x)\right),\ x \in \mathbb{R}_+,$$

где $b_{n-1} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} |a_k|$, $\varepsilon(x)$ *— положительная функция из* $C^{(1)}(\mathbb{R}_+)$, *причем* $\lim\limits_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\varepsilon'(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\varepsilon(x)}{\ln x} = +\infty$,

$$F^p_{\sigma,\alpha,\psi} = \Big\{ f \in H(\mathbb{C}) : \|f\|^p_{\sigma,\alpha,\psi} = \int_0^{+\infty} \exp\left(-\sigma r^\alpha + \right.$$

$$+\psi(r^{\alpha}))\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^{p}d\vartheta dr<+\infty\Big\},$$

где $\alpha=n\in\mathbb{N}$.

Тогда следующие утверждения равносильны:

а) функция f *вида (*) принадлежит* $F^{p}_{\sigma,\,\alpha}$ *и слабо обратима в* $F^{p}_{\sigma,\,\alpha,\,\psi}$*;*

б) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\sigma/p-|a_n|-\psi(x)}{x^{1/2}}dx=+\infty.$

Теорема 3. *Существует функция* φ *— монотонно растущая, положительная на* R_{+}*, такая что* $f\in F^{p}_{\sigma,\,\alpha,\,\varphi}$*,* $pf\in F^{p}_{\sigma,\,\alpha,\,\varphi}$*,для произвольного многочлена* p*,такая,что* $1/f\in F^{p}_{\sigma,\,\alpha,\,\varphi}$*, в то же время*

$$\inf\left\{\|Qf-1\|_{F^{p}_{\sigma,\,\alpha,\,\varphi}}=C_f>0,\quad Q\in P\right\}.$$

Замечание 1. Аналоги теорем 1 и 2 при $p=+\infty$ и при более общих весовых функциях ранее были установлены в работах автора [7, 8].

Замечание 2. Отметим,что аналог теоремы 3 в случае весовых пространств аналитических функциq в круге бsл установлен в работах [7,8], а в случае весовых пространств Бергмана в единичном круге в работе [9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Zhu K.* Analysis on Fock Spaces. Springer-Verlag, 2012. Vol. 263. 355 p. (Graduate Texts in Mathematics).

[2] *Дэкрбашян М. М* О представимости некоторых классов целых функций // Дан. Арм. ССР. 1947 Т. 7, № 5. С. 193–197.

[3] *Дэкрбашян М. М* К проблеме представимости аналитических функций // Сообщения института математики и механики Арм. ССР. 1948. № 2. С. 3–48.

[4] *Дильмухаметова М., Муллабаева А. У., Напалков В. В.* Обобщение Пространства Фока // Уфимск. матем. журн. 2010. Т. 2, № 1. С. 51–58.

[5] *Nikolskii N. K.* Operators,functions and systems: an easy reading. Vol. 1: Hardy, Hankel, and Toplitz. Providence, RI : Amer. Math. Soc., 2002. (Mathematical Surveys and Monographs. Iss. 92).

[6] *Хавин В.П* Методы и структура коммутативного гармонического анализа // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М. : ВИНИТИ, 1987. Т. 15.

[7] *Шамоян Ф.А.* Слабая обратимость в некоторых пространствах аналитических функций // Докл. АН Арм. ССР. 1982. Т. 74, С. 157–161.

[8] *Шамоян Ф.А.* О слабой обратимости в весовых пространствах аналитических функций // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60, № 5. С. 191–202.

[9] *Borichev A., Hedenmalm H.* Harmonic function of maximal growth: invertibility and ciclicity in Bergman spaces // J. Amer Math. Soc. 1997. Vol. 10. P. 921–946.