УДК 517.9

О ПОЛНОТЕ ДВОИЧНЫХ БАЗИСНЫХ СПЛАЙНОВ В ПРОСТРАНСТВЕ L_p

С. А. Чумаченко (Саратов, Россия)
chumachenkosergei@gmail.com

Рассматривается система сжатий и сдвигов двоичного базисного сплайна. Доказывается, что такая система является переполненной в пространстве L_p и любое конечное число функций из этой системы можно удалить, не теряя полноты системы.

Ключевые слова: Системы сжатий и сдвигов, базисные сплайны, гладкая интерполяция.

COMPLETENESS OF BINARY BASIC SPLINES IN L_p

S. A. Chumachenko (Saratov, Russia)
chumachenkosergei@gmail.com

We consider scales and shifts of a binary basic spline. It is proved that such system is overflow in L_p and we can remove any finite number of functions from this system without losing the completeness.

Keywords: Basic splines, smooth interpolation, scales and shifts systems.

Введение

Система сжатий и сдвигов двоичного базисного сплайна является обобщением системы Фабера-Шаудера [1] с заданным порядком гладкости. Двоичный базисный сплайн определяется как результат многократного интегрирования функции Уолша W_{2_n-1}.

Попытки нахождения обобщения системы Фабера-Шаудера или гладкого аналога предпринимались достаточно давно. В частности, в работах [2] и [3] была доказана базисность в $C[0,1]$, однако без оценки погрешности через модуль непрерывности. Как и система Фабера–Шаудера, система сжатий и сдвигов двоичного базисного сплайна является базисом в $C[0,1]$(данный результат показан в работе [4]), в то время как антипериодический сдвиг этой функции является базисом Рисса в пространстве L_2 [5].

В данной работе указан алгоритм построения равномерного сходящегося ряда по системе сжатий и сдвигов двоичного базисного сплайна степени $n > 1$ и приведена оценка скорости сходимости этого ряда к приближаемой функции в терминах модулей непрерывности 1-го и 2-го порядка. Полученная оценка является уточнением предыдущего результата [4]. Доказывается также, что построенная система сжатий и сдвигов не является минимальной в L_p. Для системы Фабера-Шаудера это свойство было отмечено П.Л.Ульяновым [6]).

Система сжатий и сдвигов двоичного базисного сплайна в L_p

Пусть $If(x) = \int_0^x f(t)dt (x \in [0,1])$ - оператор интегрирования, $r_k(x) = \mathrm{sign}(\sin(2^{k+1}\pi x))$ - функции Радемахера, $W_{2^n-1}(x) = \prod_{k=0}^{n-1} r_k(x)$ - функции Уолша. Тогда функцию

$$\varphi_{n,N}(x) = Q(n,N) I^N W_{2^n-1}(x), (x \in [0,1], n, N \in \mathbb{N}, N \leq n)$$

будем называть двоичным базисным сплайном N-й степени от n-й функции Уолша, где $Q(n,N)$ - нормирующий коэффициент $\varphi_{n,N}(x)$ в $C[0,1]$.

Теорема 1. Нормирующий коэфициент $Q(n,N)$ для $1 \leq N \leq n$ равен $2^{\frac{2nN+3N-N^2-2}{2}}$

Рассмотрим систему сжатий и сдвигов $\psi_{m,j}(x) = \varphi_{n,n}(2^m x - j), m \in Z_0, j \in [0, 2^m - 1]$. Пусть $f(x)$ - функция из $C_0[0,1]$. Обозначим:

$$R_0(x) = f(x),$$

$$S_0(x) = R_0\left(\frac{0+1/2}{2^0}\right)\psi_{0,0}(x).$$

В общем случае полагаем:

$$S_m(x) = R_m\left(\frac{j+1/2}{2^m}\right)\psi_{m,j}(x), \tag{1}$$

$$R_{m+1}(x) = R_m(x) - S_m(x), x \in \left[\frac{j}{2^m}, \frac{j+1}{2^m}\right]. \tag{2}$$

Таким образом, $S_m(x)$ — частичная сумма порядка 2^m ряда по системе $\psi_{m,j}(x)$, R_m —отклонение частичной суммы от приближаемой функции f.

Пусть $\omega_f(\delta)$ и $\omega_f^2(\delta)$ — соответственно модуль непрерывности 1 и 2 порядков.

Теорема 2. *$\psi_{m,j}(x)$ — базис в $C_0[0,1]$. Имеет место следующая оценка через модуль непрерывности:*

$$|R_{2m+1}(x)| \leq \omega_f\left(\frac{1}{2^{2m+2}}\right) + \frac{14}{9} * \omega_f^2\left(\frac{1}{2^{m+1}}\right) + \frac{5/4+m}{2^{2m+2}} * ||f||_{C_0[0,1]}.$$

Теорема 3. Пусть $p \geq 1$. Для любых $m_1, j_1 \in Z_0$, для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная сумма $\sum_{m>m_1,j} \psi_{m,j}(x)$ такая что

$$||\psi_{m_1,j_1}(x) - \sum \psi_{m,j}(x)||_{L_p} < \varepsilon$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Faber G.* Uber die ortogonalenfunctionen des Herrn Haar // Jahresber. Deutsch Math. 1910. Vol. 19. P. 104–112.

[2] *Шайдуков К. М.* О базисах в пространстве непрерывных функций, построенных из дуг парабол // Ученые записки Казанского университета. 1965. Т. 125, № 2. С. 133–142.

[3] *Аубакиров Т. У., Бокаев Н. А.* О новом классе систем функций типа Фабера–Шаудера // Матем. заметки. 1974. Т. 82, № 5. С. 643–651.

[4] *Чумаченко С. А.* Об одном из аналогов системы Фабера–Шаудера // Труды математического центра имени Н. И. Лобачевского. 2016. Т. 53. С. 163–164.

[5] *Лукомский С. Ф., Терехин П. А., Чумаченко С. А.* Хаосы Радемахера в задачах построения сплайновых аффинных систем // Матем. заметки. 2018. Т. 103, № 6. С. 863–874.

[6] *Ульянов П. Л.* О некоторых свойствах рядов по системе Шаудера // Матем. заметки. 1970. Т. 7, № 4. С. 431–442.