УДК 517.518.82+519.677

КОНСТРУКТИВНЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА: ФОРМУЛЫ, СХОДИМОСТЬ, НУЛИ[1]

Д. Г. Цветкович (Москва, Россия)
dianacve@inbox.ru

В докладе дается краткий обзор недавних исследований, связанных с классическими полиномами Бернштейна. Выбирается класс кусочно линейных порождающих функций и, в частности, рациональных модулей на стандартном отрезке $[0,1]$. Для рациональных модулей получены регулярные представления полиномов Бернштейна в виде обобщенных разложений Поповичу. При помощи этих разложений проведено полное исследование поведения полиномов Бернштейна в комплексной плоскости. Дано точное описание области сходимости. Установлены оценки скорости сходимости внутри и на границе области. Построена теория аттракторов нулей полиномов Бернштейна, т.е. предельных множеств, притягивающих нули при неограниченном увеличении номера полинома.

Ключевые слова: полиномы Бернштейна, кусочно линейные функции, рациональный модуль, обобщенные разложения Поповичу, область сходимости, лемнискаты Канторовича, распределение нулей.

CONSTRUCTIVE METHODS IN THE THEORY OF BERNSTEIN POLYNOMIALS: FORMULAS, CONVERGENCE, AND ZEROS[1]

D. G. Tsvetkovich (Moscow, Russia)
dianacve@inbox.ru

A brief review of recent studies associated with the classical Bernstein polynomials is given. A class of piecewise linear generating functions and, in particular, rational modules on the standard segment $[0,1]$ is chosen. New regular representations of Bernstein polynomials for rational modules are obtained. By means of these representations a complete study of the behavior of Bernstein polynomials in the complex plane is carried out. The exact description of the convergence domain is given. Estimates of the convergence rate inside and on the boundary of the domain are established. The theory of zeros attractors for Bernstein polynomials is developed.

Keywords: Bernstein polynomials, piecewise linear functions, rational module, generalized Popoviciu representations, convergence domain, Kantorovich lemniscates, distribution of zeros.

Для функции $f \in C[0,1]$ рассматриваем полиномы Бернштейна

$$B_n(f,z) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k \, z^k (1-z)^{n-k}\,, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

комплексного переменного $z \in \mathbb{C}$. Здесь C_n^k — обычные биномиальные коэффициенты. Общие сведения по теории классических полиномов Бернштейна см. в [1]–[3].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00236).
[1]The article is done with the financial support of RFBR (project no. 18-01-00236).

В последнее время проведено систематическое исследование полиномов Бернштейна для кусочно линейных порождающих функций с рациональными абсциссами точек излома. Взятую функцию можно представить в виде

$$f(x) = \alpha + \beta x + \sum_{j=1}^{r} \gamma_j \, |q_j x - p_j|, \qquad x \in [0,1], \tag{2}$$

где α, β, $\gamma_1 \neq 0$, $\ldots$, $\gamma_r \neq 0$ — соответствующие вещественные коэффициенты. Абсциссы точек излома $x_j = p_j/q_j$, $j = 1, \ldots, r$, считаем несократимыми рациональными дробями из $(0,1)$ (для определенности упорядоченными по возрастанию).

В таком случае

1. установлены новые регулярные представления для полиномов Бернштейна, связывающие их с теорией степенных рядов;

2. дано описание области сходимости полиномов Бернштейна в комплексной плоскости вместе с точными оценками скорости сходимости внутри и на границе области;

3. построена теория аттракторов нулей полиномов $B_n(f,z)$, отражающая характер распределения нулей при больших номерах $n \in \mathbb{N}$.

Важнейшим примером кусочно линейной функции является простой рациональный модуль

$$f(x) = |qx - p|, \qquad x \in [0,1]. \tag{3}$$

В случае (3) удается установить все конструктивные свойства полиномов Бернштейна в наиболее полном и завершенном виде.

Ввиду большой громоздкости общих формул продемонстрируем результаты на примере простого рационального модуля

$$f(x) = |5x - 2|, \qquad x \in [0,1], \tag{4}$$

с изломом в точке $x = 2/5$.

Согласно определению (1), отнесенному к функции (4), запишем

$$B_n(f,z) = \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{5k}{n} - 2 \right| C_n^k \, z^k (1-z)^{n-k}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Как видим, числовые коэффициенты здесь зависят от номера $n \in \mathbb{N}$, что сильно затрудняет изучение полиномов Бернштейна.

Оказывается, для полиномов (5) справедливо представление

$$
\begin{aligned}
B_{5m+r}(f,z) = 2 + z - 2z\,(1-z) \sum_{k=0}^{\varepsilon_m(1,r)} \frac{2}{5k+1}\, C_{5k+1}^{2k} \left(z^2\,(1-z)^3\right)^k - \\
- 2z\,(1-z)^2 \sum_{k=0}^{\varepsilon_m(2,r)} \frac{1}{5k+2}\, C_{5k+2}^{2k+1} \left(z^2\,(1-z)^3\right)^k - \\
- 2z^2\,(1-z)^2 \sum_{k=0}^{\varepsilon_m(3,r)} \frac{1}{5k+3}\, C_{5k+3}^{2k+1} \left(z^2\,(1-z)^3\right)^k - \\
- 2z^2\,(1-z)^3 \sum_{k=0}^{\varepsilon_m(4,r)} \frac{2}{5k+4}\, C_{5k+4}^{2k+2} \left(z^2\,(1-z)^3\right)^k
\end{aligned}
\tag{6}
$$

при всех значениях $m \in \mathbb{N}$ и $r = 0,\,1,\,2,\,3,\,4$. Здесь символ $\varepsilon_m(\nu,r)$ при переборе $\nu = 1,\,2,\,3,\,4$ вычисляется по правилу

$$
\begin{aligned}
& r = 0,\,1 && \Longrightarrow && \varepsilon_m(\nu,r) = m-1 \text{ для } \nu = 1,\,2,\,3,\,4\,; \\
& r = 2,\,3,\,4 && \Longrightarrow && \varepsilon_m(\nu,r) = m \text{ для } \nu = 1,\,\dots\,,\,r-1 \quad \text{и} \\
& && && \varepsilon_m(\nu,r) = m-1 \text{ для } \nu = r,\,\dots\,,\,4\,.
\end{aligned}
$$

Разложение (6) для полиномов (5) называем *обобщенным разложением Поповичу* по одному частному результату работы [4].

При помощи разложения (6) удается провести полное исследование сходимости полиномов (5). Для формулировки результатов введем несколько специальных понятий, восходящих к классической работе Л. В. Канторовича [5]. Определим *первичный полином Канторовича*

$$
T_{2,5}(z) = \frac{3125}{108}\, z^2(1-z)^3, \qquad z \in \mathbb{C},
\tag{7}
$$

где $3125/108 \equiv q^q\, p^{-p}\,(q-p)^{-(q-p)}$ при $p = 2$, $q = 5$. Посредством полинома (7) зададим *компакт Канторовича*

$$
K_{2,5} = \left\{ z \in \mathbb{C} :\ \frac{3125}{108}\, \left|z^2(1-z)^3\right| \leqslant 1 \right\}
\tag{8}
$$

и ограничивающую его *лемнискату Канторовича*

$$
\Lambda_{2,5} :\quad \frac{3125}{108}\, \left|z^2(1-z)^3\right| = 1.
\tag{9}
$$

Объекты (7)–(9) построены по точке излома $x = 2/5$.

Компакт $K_{2,5}$ состоит из левой и правой петель вида

$$K_{2,5}^{(1)} \equiv K_{2,5} \cap \{\operatorname{Re} z \leqslant 2/5\}, \qquad K_{2,5}^{(2)} \equiv K_{2,5} \cap \{\operatorname{Re} z \geqslant 2/5\}.$$

Ясно, что $K_{2,5}^{(1)} \cup K_{2,5}^{(2)} = K_{2,5}$ и $K_{2,5}^{(1)} \cap K_{2,5}^{(2)} = \{2/5\}$. Все точки основного отрезка $[0,1]$ попадают строго внутрь компакта $K_{2,5}$ за исключением одной лишь точки $x = 2/5$ — точки самопересечения лемнискаты (9).

Аппарат обобщенных разложений Поповичу позволяет установить следующий результат (см. также [1, 5]).

Теорема 1. *Пусть $B_n(f,z)$ — полиномы Бернштейна* (5) *от функции* (4). *Тогда при $n \to \infty$ последовательность $B_n(f,z)$ сходится равномерно на компакте $K_{2,5}$ из формулы* (8), *в левой петле $K_{2,5}^{(1)}$ — к функции $\varphi_1(z) = 2 - 5z$, а в правой петле $K_{2,5}^{(2)}$ — к функции $\varphi_2(z) = 5z - 2$. При любом выборе внешней точки $z \in \mathbb{C} \setminus K_{2,5}$ последовательность $B_n(f,z)$ расходится, т. е. не имеет конечного предела в $\mathbb{C}$.*

Теорему 1 удается существенно дополнить, охарактеризовав скорость сходимости полиномов (5) к результирующей предельной функции

$$\varphi(z) \equiv \begin{cases} 2 - 5z, & z \in K_{2,5}^{(1)}\,, \\ 5z - 2, & z \in K_{2,5}^{(2)}\,. \end{cases} \tag{10}$$

Ясно, что $\varphi(x) = f(x) = |5x - 2|$ при $x \in [0,1]$.

Теорема 2. *Пусть $B_n(f,z)$ — полиномы Бернштейна* (5) *от функции* (4). *Пусть уклонения полиномов от предельной функции* (10) *заданы формулой*

$$R_n(f,z) \equiv B_n(f,z) - \varphi(z), \quad z \in K_{2,5}\,, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда при всех $z \in \operatorname{int} K_{2,5}$, т. е. внутри компакта Канторовича (8) (*когда $|T_{2,5}(z)| < 1$*), *имеем оценку*

$$|R_{5m+l}(f,z)| \leqslant \frac{M_{2,5}}{1 - |T_{2,5}(z)|}\,\frac{|T_{2,5}(z)|^m}{m^{3/2}}\,, \quad m \in \mathbb{N}, \quad l = 0,\, 1,\, 2,\, 3,\, 4.$$

Если же $z \in \partial K_{2,5} = \Lambda_{2,5}$, то

$$|R_{5m+l}(f,z)| \leqslant \frac{2M_{2,5}}{\sqrt{m}} \left(1 + \frac{1}{2m}\right), \quad m \in \mathbb{N}, \quad l = 0,\, 1,\, 2,\, 3,\, 4.$$

Здесь $M_{2,5} > 0$ — некоторая константа, вычисляемая конструктивно.

Теорема 2 показывает, что полиномы Бернштейна от функции (4) сходятся внутри компакта $K_{2,5}$ с экспоненциальной скоростью, но по мере приближения точки $z \in \operatorname{int} K_{2,5}$ к границе $K_{2,5}$ скорость сходимости «портится», переходя на самой границе, т. е. на лемнискате $\Lambda_{2,5}$, в медленное степенное стремление. Перечисленные результаты с соответствующими поправками распространяются на полиномы Бернштейна от любого рационального модуля (3).

Особый интерес представляет задача о распределении нулей полиномов Бернштейна, поставленная И. Я. Новиковым [6]. В цикле работ И. В. Тихонова, В. Б. Шерстюкова и автора построена систематическая теория *аттракторов нулей* полиномов Бернштейна на классе порождающих функций вида (2). Применительно к нашему примеру (4) эта теория позволяет сформулировать такой результат.

Пусть $B_n(f, z)$ — полиномы Бернштейна (5) от функции (4). Тогда при $n \to \infty$ все нули полиномов $B_n(f, z)$ (кроме отдельных *девиантных нулей*) стягиваются снаружи к границе области сходимости полиномов Бернштейна — лемнискате Канторовича $\Lambda_{2,5}$ из формулы (9). Наглядное представление о происходящем дает рис. 1.

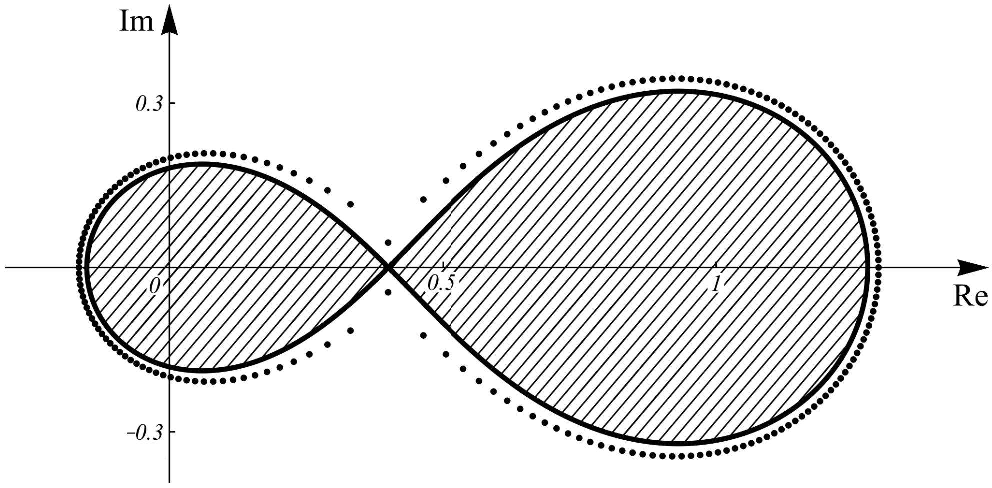

Рис. 1. Результат компьютерного расчета нулей полинома $B_{200}(f, z)$ от функции (4) вместе с компактом Канторовича $K_{2,5}$. Видно, что нули «стягиваются» к границе компакта — лемнискате $\Lambda_{2,5}$. При $n = 200$ картина получается стандартной: девиантные нули отсутствуют

Дадим дополнительные ссылки по теме исследований. В особое направление обсуждаемый круг вопросов был выделен в докладе [7]. По поводу обобщенных разложений Поповичу в случае произвольного рационального модуля (3) см. [8–10]. Сходимость полиномов Бернштейна для рационального модуля (3) и в общем случае кусочно линейных порождающих функций вида (2) обсуждается в [10, 11]. Проблеме распределения нулей полиномов Бернштейна посвящены работы [12–14].

Автор признательна И. В. Тихонову и В. Б. Шерстюкову за постановку задачи, поддержку и помощь на всех этапах исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Lorentz G. G.* Bernstein polynomials. Toronto : University of Toronto Press, 1953. 134 p.

[2] *Виденский В. С.* Многочлены Бернштейна. Учебное пособие к спецкурсу. Л. : ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1990. 64 с.

[3] *Bustamante J.* Bernstein operators and their properties. Birkhäuser, 2017. 420 p.

[4] *Popoviciu T.* Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur // Mathematica (Cluj). 1935. Vol. 10. P. 49–54.

[5] *Канторович Л. В.* О сходимости последовательности полиномов С. Н. Бернштейна за пределами основного интервала // Изв. АН СССР. VII сер. Отд-ние матем. и естеств. наук, 1931. № 8. С. 1103–1115.

[6] *Новиков И. Я.* Асимптотика корней полиномов Бернштейна, используемых в построении модифицированных всплесков Добеши // Матем. заметки, 2002. Т. 71, № 2. С. 239–253.

[7] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г.* Специальные задачи для полиномов Бернштейна в комплексной области // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2016, СПб. : РГПУ им. А. И. Герцена, 2016. С. 139–145.

[8] *Цветкович Д. Г., Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Специальные представления для полиномов Бернштейна от рационального модуля на стандартном отрезке // Современные проблемы теории функции и их приложения : материалы 19-й междунар. Сарат. зимн. шк., посвящ. 90-летию со дня рожд. акад. П. Л. Ульянова. Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2018. С. 339–342.

[9] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г.* Уточненный вид разложений Поповичу для полиномов Бернштейна от рационального модуля // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы международ. конф. : Воронежская зимняя математическая школа, Воронеж : ИД ВГУ, 2019. С. 258–261

[10] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г.* Обобщенные разложения Поповичу для полиномов Бернштейна от рационального модуля // Итоги науки и техники. Сер. Совр. матем. и ее прилож. Тематич. обзоры. (В печати.)

[11] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г.* О скорости сходимости полиномов Бернштейна в комплексной области на классе кусочно линейных порождающих функций // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения — 2019. СПб. : РГПУ им. А. И. Герцена, 2019. С. 116–121.

[12] *Тихонов И. В., Цветкович Д. Г., Шерстюков В. Б.* Компьютерное исследование аттракторов нулей для классических полиномов Бернштейна // Фундамент. и прикл. матем. 2016. Т. 21, № 4. С. 151–173.

[13] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г.* Как выглядят аттракторы нулей для классических полиномов Бернштейна // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2017. № 2. С. 59–73.

[14] *Цветкович Д. Г.* Подробный атлас аттракторов нулей для классических полиномов Бернштейна // Челяб. физ.-матем. журнал, 2018. Т. 3, № 1. С. 58–89.