УДК 517.9

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ ОПЕРАТОРОВ С РАЗРЫВНОЙ ОБЛАСТЬЮ ЗНАЧЕНИЙ

Г. В. Хромова (Саратов, Россия)
KhromovaGV@info.sgu.ru

На базе интегральных операторов с финитными полиномиальными ядрами и разрывной областью значений построены методы решения задач получения равномерных приближений к функциям и их производным любого порядка на отрезке. Общая идея конструирования подобных операторов принадлежит А.П. Хромову и была использована автором при решении ряда задач из теории приближений и теории уравнений 1 рода. Предлагаемые операторы обладают некоторым преимуществом перед ранее рассмотренными.

Ключевые слова: интегральный оператор, разрывная область значений, равномерная сходимость.

ON A FAMILY OF OPERATORS WITH DISCONTINUOUS RANGE

G. V. Khromova (Saratov, Russia)
KhromovaGV@info.sgu.ru

By means of integral operators with compactly supported kernels and discontinuous range methods are constructed of getting uniform approximations of functions and their derivatives of any order on an interval. The general idea of constructed such operators belongs to A.P. Khromov and was already used by the author for solving some problems in approximation theory and 1-st type equations theory. These operators have some advantages in comparison with those used before.

Keywords: integral operator, discontinuous range, uniform approximations.

Применение операторов с разрывной областью значений в задачах, решения которых являются непрерывными функциями, дано в [1, 2].

1. Пусть $f(x) \in C[0,1]$. Рассмотрим семейство операторов

$$T_\alpha f = \begin{cases} T_{\alpha 2} f, x \in [0, \frac{1}{2}] \\ T_{\alpha 1} f, x \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} T_{\alpha 2} f &= \frac{6}{\alpha^3} \int\limits_x^{x+\alpha} (t-x)(\alpha-(t-x)) f(t) dt, \\ T_{\alpha 1} f &= \frac{6}{\alpha^3} \int\limits_{x-\alpha}^{x} (x-t)(\alpha-(x-t)) f(t) dt. \end{aligned} \tag{1}$$

Легко убедиться, что операторы T_α инвариантны относительно единицы. На основании этого справедлива

Теорема 1. *Имеет место сходимость:*

$$\|T_\alpha f - f\|_{L_\infty[0,1]} \to 0 \quad \text{при} \quad \alpha \to 0,$$

$$\left(\|\cdot\|_{L_\infty} = \max\left\{\|\cdot\|_{C[0,1/2]}\,,\ \|\cdot\|_{C[1/2,1]}\right\}\right).$$

Теперь рассмотрим семейство $T_\alpha^{(1)}$,

$$T_\alpha^{(1)} f = \begin{cases} T_{\alpha 2}^{(1)} f, x \in [0, \frac{1}{2}] \\ T_{\alpha 1}^{(1)} f, x \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

где $T_\alpha^{(1)}, T_{\alpha 1}^{(1)} T_{\alpha 2}^{(1)}$ определяются по формулам (1) с заменой ядер на их производные по x.

Справедлива

Теорема 2. *Имеет место сходимость*

$$\left\| T_\alpha^{(1)} f - f' \right\|_{L_\infty[0,1]} \to 0 \quad \textit{при} \quad \alpha \to 0.$$

2. Пусть $f(x) \in C^{(k)}[0,1]$, $k = 2, 3, ...$

Рассмотрим оператор

$$T_{\alpha k} f = \begin{cases} T_{\alpha 2,k} f, x \in [0, \frac{1}{2}] \\ T_{\alpha 1,k} f, x \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} T_{\alpha 2,k} f &= a_k(\alpha) \int\limits_x^{x+\alpha} (t-x)^k (\alpha - (t-x))^k f(t) dt, \\ T_{\alpha 1,k} f &= a_k(\alpha) \int\limits_{x-\alpha}^{x} (x-t)^k (\alpha - (x-t))^k f(t) dt, \end{aligned} \tag{2}$$

$a_k(\alpha) = A_{0k} \alpha^{-(2k+1)}$ (нормированный множитель)

$$A_{0k} = \left(\sum_{l=0}^{k} (-1)^l \frac{C_k^l}{k+l+1} \right)^{-1}.$$

Очевидно, для операторов $T_{\alpha k}$ справедлива теорема 1. Для аппроксимации $f^{(k)}(x)$ рассмотрим операторы $T_{\alpha k}^{(k)}$, определяемые по формуле (2) с заменой $T_{\alpha j,k}$ на $T_{\alpha j,k}^{(k)}$, и $T_{\alpha j,k}^{(k)}$ имеют вид $T_{\alpha j,k}$ с заменой ядер на их производные по x порядка k.

Теорема 3. *Для любой* $f(x) \in C^{(k)}[0,1]$ *выполняется сходимость*

$$\left\| T_{\alpha k}^{(k)} f - f^{(k)} \right\|_{L_\infty[0,1]} \to 0 \quad \textit{при} \quad \alpha \to 0.$$

3. Пусть теперь вместо $f(x)$ нам известна $f_\delta(x) : \|f_\delta - f\|_{L_2} \leq \delta$ и требуется по $f_\delta(x)$ и δ найти равномерные приближения к $f(x)$ и $f^{(k)}(x)$ на отрезке $[0,1]$.

Будем обозначать операторы в п.п. 1, 2 единообразно: считая $k = 0, 1, \dots$, положим $T_\alpha \equiv T_{\alpha 1}^{(0)}$, $T_\alpha^{(1)} \equiv T_{\alpha 1}^{(1)}$.

Справедлива

Лемма. *Имеют место формулы*

$$\|T_{\alpha k}^m\|_{L_2[0,1] \to L_\infty[0,1]} = C_{k,m} \alpha^{-m-1/2}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1.$$

(Константы $C_{k,m}$ легко вычисляются.)

На основании леммы и того, что операторы $T_{\alpha k}^m$ при применении их к точной функции $f(x)$ дают равномерную сходимость либо к ней, либо к её производным, эти операторы являются регуляризирующими [3].

Рассмотрим величины

$$\Delta(\delta, T_{\alpha k}^{(m)}, f) = \sup \left\{ \left\| T_{\alpha k}^{(m)} f_\delta - f^{(m)} \right\|_{L_\infty[0,1]} : \|f_\delta - f\|_{L_2[0,1]} \leq \delta \right\},$$

$$m = 0, k, \quad k = 1, 2, \dots$$

На основании теоремы 1.6 из [1] справедлива

Теорема. *Для того, чтобы $\Delta(\delta, T_{\alpha k}^{(m)}, f) \to 0$ при $\alpha \to 0, \delta \to 0$ необходимо и достаточно выполнения согласования $\alpha = \alpha(\delta)$, удовлетворяющего условиям: $\alpha(\delta) \to 0$ и $\delta(\alpha(\delta))^{-m-1/2} \to 0$ при $\delta \to 0$.*

Замечание. Операторы $T_{\alpha k}^{(k)}$ имеют некоторое преимущество перед операторами из [1], построенными на базе степеней оператора Стеклова: с возрастанием k пределы интегрирования в них остаются неизменными и поэтому отпадает необходимость налагать дополнительные ограничения на параметр α.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Хромова Г. В.* Операторы с разрывной областью значений в задачах приближения функций и некорректных задачах // В кн. «Новые методы аппроксимации и оптимизации в задачах действительного и комплексного анализа» : коллективная монография. Раздел IV. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2016. С. 237–294.

[2] *Хромова Г. В.* О разрывном операторе Стеклова // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 18-й международ. Сарат. зим. шк. Саратов : Изд-во «Научная книга», 2016. С. 314–316.

[3] *Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М. : Наука, 1978. 206 с.